УДК 621.396:681.323
DOI: 10.17586/0021-3454-2019-62-11-951-957

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ФИЛЬТРОВ

С. И. Зиатдинов

*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
190000, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kaf53@guap.ru*

Рассмотрена методика, позволяющая по заданной частотной передаточной функции получить дифференциальные уравнения непрерывных комплексных фильтров нижних и верхних частот, полосовых и режекторных фильтров. Представлено уравнение, связывающее спектральные плотности комплексных входного и выходного сигналов фильтра с его частотной передаточной функцией. Для получения дифференциального уравнения, описывающего работу комплексного фильтра, к обеим частям уравнения применяется обратное преобразование Фурье, с помощью которого входной и выходной сигналы фильтра преобразуются из частотной области во временную область. В качестве примеров рассмотрены непрерывные комплексные фильтры различных порядков, которые при нулевой частоте настройки являются либо фильтрами нижних частот, либо фильтрами верхних частот и при частоте настройки, не равной нулю, — либо полосовыми, либо режекторными фильтрами в зависимости от вида рассматриваемой частотной передаточной функции. Показано, что дифференциальные уравнения непрерывных комплексных фильтров являются комплексными функциями времени, которые определяются двумя квадратурными составляющими. Для нахождения переходных и импульсных характеристик непрерывных комплексных фильтров рассмотрено решение дифференциального уравнения комплексного фильтра нижних частот (полосового фильтра) при единичном ступенчатом входном сигнале. Получены общее и частное решения комплексного дифференциального уравнения, определившее комплексную переходную характеристику рассмотренного фильтра, которая описывается двумя квадратурными составляющими. Путем дифференцирования комплексной переходной характеристики найдено выражение для импульсной характеристики фильтра, которая также является комплексной и представляется двумя квадратурными составляющими.

Ключевые слова: *комплексный фильтр, дифференциальные уравнения, частотная передаточная функция*

Введение. При разработке цифровых устройств обнаружения сигналов на фоне разного рода помех [1—4], проектировании систем автоматического сопровождения по дальности, угловым координатам [5, 6] и скорости [7, 8] и т.д. широко используются различные фильтры нижних и верхних частот, полосовые и режекторные фильтры. В каждом конкретном случае к частотным и временным свойствам фильтров предъявляются специфические требования.

В когерентных системах обработки сигналов применяются комплексные фильтры, использование которых, в отличие от действительных фильтров, позволяет легко изменять частоту настройки без изменения формы амплитудно- и фазочастотных характеристик. Свойства фильтров определяются их частотными передаточными функциями, импульсными и переходными характеристиками, дифференциальными уравнениями. Все эти характеристики жестко связаны между собой.

Описание комплексных фильтров с использованием частотных передаточных функций, а также импульсных и переходных характеристик приведено в работах [9—12]. Исследования по дифференциальным уравнениям непрерывных комплексных фильтров в литературе практически отсутствуют. Определение указанных характеристик комплексных фильтров составляет основное содержание настоящей статьи.

Методика получения дифференциальных уравнений непрерывных комплексных фильтров. В общем виде частотная передаточная функция непрерывного комплексного фильтра n-го порядка записывается следующим образом:

$$W(j\omega)=\frac{b_0[j(\omega-\omega_0)]^m+b_1[j(\omega-\omega_0)]^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0[j(\omega-\omega_0)]^n+a_1[j(\omega-\omega_0)]^{n-1}+\ldots+a_n};\ \ m\le n, \tag{1}$$

где a_i, b_i — весовые коэффициенты; ω_0 — частота настройки фильтра, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Частотную передаточную функцию (1) можно представить в форме отношения [13]

$$W(j\omega)=\frac{z_{\text{вых}}(j\omega)}{z_{\text{вх}}(j\omega)}, \tag{2}$$

где $z_{\text{вх}}(j\omega), z_{\text{вых}}(j\omega)$ — спектральные плотности входного и выходного комплексных сигналов фильтра.

После объединения выражений (1) и (2) находим

$$z_{\text{вх}}(j\omega)\{b_0[j(\omega-\omega_0)]^m+b_1[j(\omega-\omega_0)]^{m-1}+\ldots+b_m\}=$$

$$=z_{\text{вых}}(j\omega)\{[a_0 j(\omega-\omega_0)]^n+a_1[j(\omega-\omega_0)]^{n-1}+\ldots+a_n\}. \tag{3}$$

Для получения дифференциального уравнения, описывающего работу комплексного фильтра, необходимо применить к обеим частям соотношения (3) обратное преобразование Фурье [13].

Результаты. Для конкретизации теоретических положений рассмотрим ряд частных случаев.

1. *Комплексный фильтр нижних частот (полосовой фильтр) первого порядка*. Частотная передаточная функция рассматриваемого фильтра на основании формулы (1) принимает вид

$$W(j\omega)=\frac{1}{1+j(\omega-\omega_0)\tau},$$

где τ — постоянная времени фильтра.

При частоте настройки $\omega_0=0$ фильтр является фильтром нижних частот, при $\omega_0\ne 0$ — полосовым фильтром. Тогда соотношение (3) для данного фильтра записывается следующим образом:

$$z_{\text{вых}}(j\omega)[1+j(\omega-\omega_0)\tau]=z_{\text{вх}}(j\omega). \tag{4}$$

Раскроем скобки в выражении (4), тогда

$$j\omega\tau z_{\text{вых}}(j\omega)+z_{\text{вых}}(j\omega)(1-j\omega_0\tau)=z_{\text{вх}}(j\omega). \tag{5}$$

Применим обратное преобразование Фурье к левой и правой частям формулы (5). В результате дифференциальное уравнение непрерывного комплексного фильтра первого порядка принимает вид

$$\tau\frac{dz_{\text{вых}}(t)}{dt}+z_{\text{вых}}(t)(1-j\omega_0\tau)=z_{\text{вх}}(t), \tag{6}$$

где $z_{\text{вх}}(t)$ и $z_{\text{вых}}(t)$ — комплексные входной и выходной сигналы фильтра, которые выражаются через их квадратурные составляющие:

$$z_{\text{вх}}(t)=x_{\text{вх}}(t)+jy_{\text{вх}}(t),\quad z_{\text{вых}}(t)=x_{\text{вых}}(t)+jy_{\text{вых}}(t).$$

Комплексное дифференциальное уравнение (6) представим в виде вещественной и мнимой составляющих:

$$\tau\frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt}+x_{\text{вых}}(t)+\omega_0\tau y_{\text{вых}}(t)=x_{\text{вх}}(t),$$

$$\tau\frac{dy_{\text{вых}}(t)}{dt}+y_{\text{вых}}(t)-\omega_0\tau x_{\text{вых}}(t)=y_{\text{вх}}(t).$$

2. *Комплексный фильтр верхних частот (режекторный фильтр) первого порядка*. На основании выражения (1) частотная передаточная функция рассматриваемого фильтра принимает вид

$$W(j\omega)=\frac{j(\omega-\omega_0)\tau}{1+j(\omega-\omega_0)\tau}.\tag{7}$$

При $\omega_0=0$ фильтр является фильтром верхних частот, при $\omega_0\neq 0$ — режекторным фильтром.

В данном случае соотношение (5) записывается следующим образом:

$$j\omega\tau z_{\text{вых}}(j\omega)+z_{\text{вых}}(j\omega)(1-j\omega_0\tau)=z_{\text{вх}}(j\omega)j(\omega-\omega_0)\tau.\tag{8}$$

Так же, как и в предыдущем случае, применив к (8) обратное преобразование Фурье, получим дифференциальное уравнение рассматриваемого комплексного фильтра первого порядка:

$$\tau\frac{dz_{\text{вых}}(t)}{dt}+z_{\text{вых}}(t)(1-j\omega_0\tau)=\tau\frac{dz_{\text{вх}}(t)}{dt}-j\tau\omega_0 z_{\text{вх}}(t).\tag{9}$$

Выделим в соотношении (9) вещественную и мнимую составляющие:

$$\tau\frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt}+x_{\text{вых}}(t)+\omega_0\tau y_{\text{вых}}(t)=\tau\frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt}+\tau\omega_0 y_{\text{вх}}(t),$$

$$\tau\frac{dy_{\text{вых}}(t)}{dt}+y_{\text{вых}}(t)-\omega_0\tau x_{\text{вых}}(t)=\tau\frac{dy_{\text{вх}}(t)}{dt}-\tau\omega_0 x_{\text{вх}}(t).$$

3. *Комплексный фильтр нижних частот (полосовой фильтр) второго порядка*. Частотная передаточная функция фильтра записывается следующим образом:

$$W(j\omega)=\frac{1}{1+a_1 j(\omega-\omega_0)+a_0[j(\omega-\omega_0)]^2}.$$

Выражение (5) для рассматриваемого фильтра принимает вид

$$z_{\text{вых}}(j\omega)\{1+ja_1(\omega-\omega_0)+a_0[j(\omega-\omega_0)]^2\}=z_{\text{вх}}(j\omega).\tag{10}$$

Применив к (10) обратное преобразование Фурье, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$a_0\frac{d^2z_{\text{вых}}(t)}{dt^2}+(a_1-2a_0 j\omega_0)\frac{dz_{\text{вых}}(t)}{dt}+(1-ja_1\omega_0-a_0\omega_0^{\,2})z_{\text{вых}}(t)=z_{\text{вх}}(t).\tag{11}$$

Выделив в уравнении (11) вещественную и мнимую составляющие, найдем пару дифференциальных уравнений, определяющих работу рассматриваемого комплексного фильтра:

$$a_0\frac{d^2x_{\text{вых}}(t)}{dt^2}+a_1\frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt}+2a_0\omega_0\frac{dy_{\text{вых}}(t)}{dt}+(1-a_0\omega_0^{\,2})x_{\text{вых}}(t)+a_1\omega_0 y_{\text{вых}}(t)=x_{\text{вх}}(t),$$

$$a_0\frac{d^2y_{\text{вых}}(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy_{\text{вых}}(t)}{dt}-2a_0\omega_0\frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt}+(1-a_0\omega_0^{\,2})y_{\text{вых}}(t)-a_1\omega_0 x_{\text{вых}}(t)=y_{\text{вх}}(t).$$

4. *Комплексный фильтр верхних частот (режекторный фильтр) второго порядка*. На основании (1) запишем частотную передаточную функцию рассматриваемого фильтра

$$W(j\omega)=\frac{b_1 j(\omega-\omega_0)+b_0[j(\omega-\omega_0)]^2}{1+a_1 j(\omega-\omega_0)+a_0[j(\omega-\omega_0)]^2}. \tag{12}$$

Выражение (5), связывающее частотную передаточную функцию (12) и спектральные плотности комплексных входного и выходного сигналов, приобретает вид

$$z_{\text{вых}}(j\omega)\{1+ja_1(\omega-\omega_0)+a_0[j(\omega-\omega_0)]^2\}=z_{\text{вх}}(j\omega)\{b_1 j(\omega-\omega_0)+b_0[j(\omega-\omega_0)]^2\}. \tag{13}$$

Применяя к (13) обратное преобразование Фурье, получаем дифференциальное уравнение комплексного фильтра верхних частот (режекторного фильтра) второго порядка:

$$a_0\frac{d^2z_{\text{вых}}(t)}{dt^2}+(a_1-2a_0 j\omega_0)\frac{dz_{\text{вых}}(t)}{dt}+(1-ja_1\omega_0\text{-}a_0\omega_0{}^2)z_{\text{вых}}(t)=$$

$$=b_1\frac{d^2z_{\text{вх}}(t)}{dt^2}+(b_1-2b_0 j\omega_0)\frac{dz_{\text{вх}}(t)}{dt}-(jb_1\omega_0+b_0\omega_0{}^2)z_{\text{вх}}(t). \tag{14}$$

Как и в предыдущих случаях, выделим в (14) вещественную и мнимую составляющие:

$$a_0\frac{d^2x_{\text{вых}}(t)}{dt^2}+a_1\frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt}+2a_0\omega_0\frac{dy_{\text{вых}}(t)}{dt}+(1-a_0\omega_0{}^2)x_{\text{вых}}(t)+a_1\omega_0 y_{\text{вых}}(t)=$$

$$=b_1\frac{d^2z_{\text{вх}}(t)}{dt^2}+b_1\frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt}+2b_0\omega_0\frac{dy_{\text{вх}}(t)}{dt}-b_0\omega_0{}^2z_{\text{вх}}(t)+b_1\omega_0 y_{\text{вх}}(t);$$

$$a_0\frac{d^2y_{\text{вых}}(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy_{\text{вых}}(t)}{dt}-2a_0\omega_0\frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt}+(1-a_0\omega_0{}^2)y_{\text{вых}}(t)-a_1\omega_0 x_{\text{вых}}(t)=$$

$$=b_1\frac{d^2y_{\text{вх}}(t)}{dt^2}+b_1\frac{dy_{\text{вх}}(t)}{dt}-2b_0\omega_0\frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt}-b_0\omega_0{}^2y_{\text{вх}}(t)-b_1\omega_0 x_{\text{вх}}(t).$$

Поскольку частотные передаточные функции, импульсные и переходные характеристики, дифференциальные и интегральные уравнения фильтров жестко связаны между собой, рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Необходимо по заданному дифференциальному уравнению непрерывного комплексного фильтра нижних частот (полосового фильтра) первого порядка найти его переходную и импульсную характеристики. Для этого запишем дифференциальное уравнение (6) при $z_{\text{вх}}(t)=1$ в виде

$$\frac{dz_{\text{вых}}(t)}{dt}+z_{\text{вых}}(t)(\omega_{\text{ср}}-j\omega_0)=\omega_{\text{ср}}, \tag{15}$$

где $\omega_{\text{ср}}=1/\tau$ — частота среза фильтра.

Дифференциальное уравнение (15) является неоднородным. Его решение складывается из общего решения однородного уравнения

$$\frac{dz_{\text{вых}}(t)}{dt}+z_{\text{вых}}(t)(\omega_{\text{ср}}-j\omega_0)=0 \tag{16}$$

и частного решения при заданных начальных условиях [14, 15].

Решение однородного дифференциального уравнения (16) будем искать в виде [14]

$$z_{\text{вых}}(t)=c_1e^{kt}.$$

Найдем значение коэффициентов c_1 и k. Характеристическое уравнение, соответствующее (16), имеет вид $k=-(\omega_{\text{ср}}-j\omega_0)$.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (15) будем искать в виде

$$z_{\text{вых}}(t)=c_1 e^{-(\omega_{\text{ср}}-j\omega_0)t}+c_2. \tag{17}$$

Воспользуемся начальными условиями, когда при $t=0$ $z_{\text{вых}}(0)=0$. Из выражения (17) получаем $c_1=-c_2$. После подстановки (17) в (15) находим $c_2=\omega_{\text{ср}}/(\omega_{\text{ср}}-j\omega_0)$. Тогда в окончательном виде можно записать выражение для выходного сигнала рассматриваемого комплексного фильтра при $z_{\text{вх}}(t)=1$:

$$z_{\text{вых}}(t)=\frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega_{\text{ср}}-j\omega_0}\left(1-e^{-\omega_{\text{ср}}t}e^{j\omega_0 t}\right)=\frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega_{\text{ср}}-j\omega_0}\left[1-e^{-\omega_{\text{ср}}t}(\cos\omega_0 t+j\sin\omega_0 t)\right]. \tag{18}$$

Полученное соотношение (18) является переходной характеристикой комплексного фильтра нижних частот (полосового фильтра) первого порядка.

Выделив в уравнении (18) вещественную и мнимую составляющие, получим следующие соотношения для квадратур переходной характеристики фильтра:

$$g_x(t)=\frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\omega_{\text{ср}}^2+\omega_0^2}-\frac{\omega_{\text{ср}}^2\cos\omega_0 t-\omega_{\text{ср}}\omega_0\sin\omega_0 t}{\omega_{\text{ср}}^2+\omega_0^2}e^{-\omega_{\text{ср}}t},$$

$$g_y(t)=\frac{\omega_{\text{ср}}\omega_0}{\omega_{\text{ср}}^2+\omega_0^2}-\frac{\omega_{\text{ср}}\omega_0\cos\omega_0 t+\omega_{\text{ср}}^2\sin\omega_0 t}{\omega_{\text{ср}}^2+\omega_0^2}e^{-\omega_{\text{ср}}t}.$$

После дифференцирования по времени (18) найдем соотношение для импульсной характеристики рассматриваемого фильтра:

$$h(t)=\omega_{\text{ср}}e^{-\omega_{\text{ср}}t}(\cos\omega_0 t+j\sin\omega_0 t),$$

откуда получим модуль и аргумент импульсной характеристики

$$|h(t)|=\sqrt{h_x(t)^2+h_y(t)^2}=\omega_{\text{ср}}e^{-\omega_{\text{ср}}t};\quad \varphi(t)=\operatorname{arctg}\frac{h_y(t)}{h_x(t)}=\omega_0 t,$$

где $h_x(t)=\omega_{\text{ср}}e^{-\omega_{\text{ср}}t}\cos\omega_0 t$, $h_y(t)=\omega_{\text{ср}}e^{-\omega_{\text{ср}}t}\sin\omega_0 t$ — квадратуры импульсной характеристики.

Аналогичным образом можно найти выражения для дифференциального уравнения, переходной и импульсной характеристик непрерывных комплексных фильтров более высоких порядков.

Заключение. Рассмотренная методика позволяет по заданной частотной передаточной функции получить дифференциальные уравнения непрерывных комплексных фильтров нижних и верхних частот, полосовых и режекторных фильтров, которые можно использовать для исследования временных характеристик комплексных фильтров. Дифференциальные уравнения комплексных фильтров носят комплексный характер и связывают квадратурные составляющие комплексных входного и выходного сигналов. Переходные и импульсные характеристики комплексных фильтров также являются комплексными функциями времени и определяются двумя квадратурными составляющими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воробьев С. Н.* Цифровая обработка сигналов. М.: Академия, 2013. 318 с.
2. *Ширман Я. Д., Манжос В. Н.* Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981. 316 с.
3. *Кузьмин С. З.* Цифровая обработка радиолокационной информации. М.: Сов. радио, 1967. 400 с.
4. *Бакулев П. А., Стенин В. М.* Методы и устройства селекции движущихся целей. М.: Радио и связь, 1986. 286 с.

5. *Фельдман Ю. И., Гидаспов Ю. Б., Гомзин В. Н.* Сопровождение движущихся целей. М.: Радио и связь, 1978. 287 с.

6. Управление движущимися объектами / Под ред. *А. А. Елисеева, А. А. Оводенко*. М.: Мир книги, 1994. 426 с.

7. *Пестряков В. Б.* Фазовые радиотехнические системы. М.: Сов. радио, 1998. 466 с.

8. *Колчинский В. Е., Мандуровский И. А., Константиновский М. И.* Доплеровские устройства и системы навигации. М.: Сов. радио, 1975. 430 с.

9. Микропроцессорные системы автоматического управления / Под ред. *В. А. Бесекерского*. Л.: Машиностроение, 1988. 365 с.

10. *Зиатдинов С. И., Соколова Ю. В.* Синтез комплексных дискретных фильтров // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2017. № 4. С. 12—19.

11. *Зиатдинов С. И., Соколова Ю. В.* Анализ комплексных фильтров на основе переходных характеристик // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 7. С. 641—647.

12. *Зиатдинов С. И., Осипов Л. А., Соколова Ю. В.* Синтез комплексных дискретных фильтров методом инвариантных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Приборостроение. 2018. Т. 61, № 4. С. 317—322.

13. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1971. 671 с.

14. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1965. Т. 2. 312 с.

15. *Бермант А. Ф., Араманович И. Г.* Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1969. 735 с.

Сведения об авторе

Сергей Ильич Зиатдинов — д-р техн. наук, профессор; СПбГУАП, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: kaf53@guap.ru

Поступила в редакцию
05.06.19 г.

Ссылка для цитирования: *Зиатдинов С. И.* Дифференциальные уравнения непрерывных комплексных фильтров // Изв. вузов. Приборостроение. 2019. Т. 62, № 11. С. 951—957.

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CONTINUOUS COMPLEX FILTERS

S. I. Ziatdinov

St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 190000, St. Petersburg, Russia
E-mail: kaf53@guap.ru

A method to derive differential equation for complex continuous filter using specified frequency transfer function is considered. The method may be applied to low-pass and high-pass filters, band-pass and band-reject continuous complex filters. An equation is presented that relates the spectral densities of the complex input and output signals of the filter with its frequency transfer function. To obtain a differential equation describing the complex filter operation, the inverse Fourier transform is applied to both parts of the equation, so that the input and output signals of the filter are converted from the frequency domain to the time domain. As examples, continuous complex filters of various orders are considered, which at the zero tuning frequency are either low-pass filters or high-pass filters, and at a nonzero tuning frequency, they are either band-pass or notch filters, depending on the specified frequency transfer function type. The differential equations of continuous complex filters are shown to be complex functions of time determined by two quadrature components. To find the transient and impulse characteristics of continuous complex filters, solution of the differential equation of low-pass filter (band-pass filter) for a single step input signal is analyzed. The general and particular solutions of the complex differential equation are obtained that determine two quadrature components of the complex transition characteristic of the filter under consideration. By differentiating the complex transient response, an expression is found for the impulse response of the filter, which is also complex and is represented by two quadrature components.

Keywords: complex filter, differential equation, frequency transfer function

REFERENCES

1. Vorob'ev S.N. *Tsifrovaya obrabotka signalov* (Digital Signal Processing), Moscow, 2013, 317 p. (in Russ.)

2. Shirman Ya.D., Manzhos V.N. *Teoriya i tekhnika obrabotki radiolokatsionnoy informatsii na fone pomekh* (Theory and Technique of Processing Radar Information on the Background of Interference), Moscow, 1981, 316 p. (in Russ.)
3. Kuz'min S.Z. *Tsifrovaya obrabotka radiolokatsionnoy informatsii* (Digital Processing of Radar Information), Moscow, 1967, 400 p. (in Russ.)
4. Bakulev P.A., Stenin V.M. *Metody i ustroystva selektsii dvizhushchikhsya tseley* (Methods and Devices for Moving Targets Selection), Moscow, 1986, 286 p. (in Russ.)
5. Fel'dman Yu.I., Gidaspov Yu.B., Gomzin V.N. *Soprovozhdeniye dvizhushchikhsya tseley* (Tracking Moving Targets), Moscow, 1978, 287 p. (in Russ.)
6. Eliseyev A.A., Ovodenko A.A., ed., *Upravleniye dvizhushchimisya ob'yektami* (Moving Object Management), Moscow, 1994, 426 p. (in Russ.)
7. Pestryakov V.B. *Fazovyye radiotekhnicheskiye sistemy* (Phase Radio Engineering Systems), Moscow, 1998, 466 p. (in Russ.)
8. Kolchinskiy V.E., Mandurovskiy I.A., Konstantinovskiy M.I. *Doplerovskiye ustroystva i sistemy navigatsii* (Doppler Devices and Navigation Systems), Moscow, 1975, 430 p. (in Russ.)
9. Besekerskiy V.A., ed., *Mikroprotsessornyye sistemy avtomaticheskogo upravleniya* (Microprocessor-Based Automatic Control Systems), Leningrad, 1988, 365 p. (in Russ.)
10. Ziatdinov S.I., Sokolova Yu.V. *Radioelectronics and Communications Systems*, 2017, no. 4, pp. 12–19. (in Russ.)
11. Ziatdinov S.I., Sokolova Yu.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2017, no. 7(60), pp. 641–647. (in Russ.)
12. Ziatdinov S.I., Osipov L.A., Sokolova Yu.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2018, no. 4(61), pp. 317–322. (in Russ.)
13. Gonorovskiy I.S. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly* (Radio Engineering Chains and Signals), Moscow, 1986, 512 p. (in Russ.)
14. Piskunov N.S. *Differentsial'noye i integral'noye ischisleniya* (Differential and Integral Calculus), Moscow, 1965, vol. 2, 312 p. (in Russ.)
15. Bermant A.F., Aramanovich I.G. *Kratkiy kurs matematicheskogo analiza* (Short Course in Mathematical Analysis), Moscow, 1969, 735 p. (in Russ.)

Data on author

Sergey I. Ziatdinov — Dr. Sci., Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Information and Network Technologies;
E-mail: kaf53@guap.ru

For citation: Ziatdinov S. I. Differential equations of continuous complex filters. *Journal of Instrument Engineering*. 2019. Vol. 62, N 11. P. 951—957 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2019-62-11-951-957