

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ МЕМБРАННОГО УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА С ПРИСОЕДИНЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

В. Л. ТКАЛИЧ¹, М. Е. КАЛИНКИНА¹, А. Г. КОРОБЕЙНИКОВ^{1,2}, О. И. ПИРОЖНИКОВА¹

¹Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: maria_kalinkina@mail.ru

²Санкт-Петербургский филиал

Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН, 199034, Санкт-Петербург, Россия

Рассматриваются вопросы динамики нестационарных колебаний прямоугольной мембраны с одной и двумя присоединенными массами. Построены математические модели с использованием методов решения прямых задач механики упругодеформированного тела, а именно уравнений Вольтерры и метода Крамера. Полученное решение прямой задачи имеет экспериментальное приложение к задачам анализа перемещений, прогибов, деформаций и напряжений при нестационарных колебаниях мембран с присоединенной сосредоточенной массой, используемых в коммутационных элементах (мембранных герконах) и микромеханических датчиках давления. На основе полученных математических моделей произведен расчет мембранных упругих элементов запатентованной серии коммутационных элементов и датчиков давления.

Ключевые слова: мембранный элемент, присоединенные массы, сосредоточенная масса, сила нагружения, нестационарные колебания, величина прогиба, уравнения Вольтерры, метод Крамера, решение прямой задачи

При анализе динамики мембранных упругих элементов, испытывающих действия нестационарных колебаний, необходимо учитывать инерционное влияние на данный упругий элемент сосредоточенной массы, расположенной на поверхности прямоугольной или круглой мембраны.

Вопросам анализа нестационарных колебаний мембраны посвящены работы [1—11], где приведены решения задач динамики мембран в прямой и обратной постановке применительно к механике упругодеформированного тела. Однако в настоящее время нестационарные колебания мембран с сосредоточенными массами изучены и математически описаны недостаточно полно.

Рассмотрим математическую модель динамического процесса при нестационарных колебаниях мембранной пластины в случае наличия у нее одной присоединенной массы. Схематическое изображение такой пластины в декартовых координатах представлено на рис. 1.

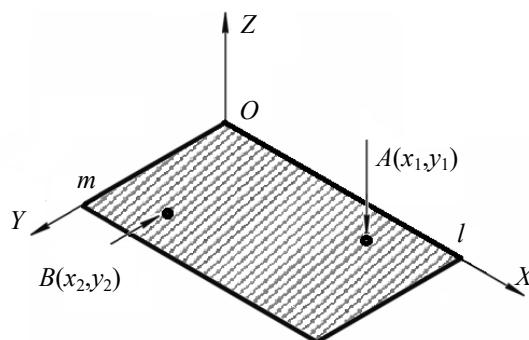


Рис. 1

Нестационарные колебания мембранной пластины описываются волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + G(x_1, y_1, t) + R(x_2, y_2, t), \quad (1)$$

где $u = u(x, y, t)$ — перемещение мембранной пластины относительно начала координат; $G(x_1, y_1, t) = \frac{1}{\rho} \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) G(t)$ — внешняя возбуждающая сила колебания, приложенная к точке $A(x_1, y_1)$; $R(x_2, y_2, t) = \frac{1}{\rho} \delta(x - x_2) \delta(y - y_2) R(t)$ — сила, действие которой связано с наличием присоединенной массы и сосредоточенная в точке $B(x_2, y_2)$; $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака, ρ — поверхностная плотность материала мембраны; a — скорость распространяющейся деформационной волны.

С учетом нулевых начальных и краевых условий, используя разложение в ряд Фурье, решение (1) искомой функции $u(x, y, t)$ можно представить в форме [11]

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(\tau) \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} \right), \quad (2)$$

где $C_{1k,n} = \frac{1}{\rho} \frac{4}{lm} \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m}$, $\lambda_{k,n} = a\pi \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}$; l — расстояние по оси OX , m — расстояние по оси OY .

Выражение (2) содержит функции, позволяющие учесть фактор влияния присоединенной массы на параметры прогиба, деформации и напряжения при нестационарных колебаниях мембраны. При этом перемещение массы $u_M(t)$ определяется как

$$u_M(t) = u(x_2, y_2, t). \quad (3)$$

Запишем уравнение прогиба мембраны в условиях отсутствия присоединенной массы:

$$M_1 \ddot{u}_M(t) = -R(t). \quad (4)$$

Тогда решение уравнение (4) примет следующий вид:

$$u_M(t) = -\frac{1}{M_1} \int_0^t (t-\tau) R(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Для решения задачи компьютерного моделирования динамики состояния поверхности прямоугольной мембраны с одной и двумя присоединенными массами преобразуем выражение (5) к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(\tau) \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \right) = \\ & = \int_0^t R(\tau) \left(-\frac{t-\tau}{M} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \right) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

где $C_{2k,n} = \frac{1}{\rho} \frac{4}{lm} \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m}$.

Приведем (6) к стандартному виду

$$f(t) = \int_0^t F(t) K(t-\tau) d\tau,$$

для чего произведем замену интеграла на конечную сумму:

$$f_j = \sum_{p=1}^j R_p \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} K(t_j - \tau) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (7)$$

Решая (7), получаем

$$R_j = \frac{f_j - \sum_{p=1}^{j-1} R_p \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} K(t_j - \tau) d\tau}{\int_0^{\Delta t} K(\tau) d\tau}, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (8)$$

Представленный процесс математического моделирования нестационарных колебаний мембранного элемента, имеющего присоединенные сосредоточенные массы при известных величинах, входящих в уравнение (2), позволяет с использованием уравнения (8) провести корректный расчет таких параметров, как прогиб и величина деформации мембранного элемента в динамике в любой требуемой точке. С учетом того, что наличие присоединенных масс приводит к существенному уменьшению амплитуды колебаний поверхности мембранного элемента, необходимо внести коррективы в получаемые значения прогиба.

Аналогично можно промоделировать положения мембранного элемента при нестационарных колебаниях, в случае когда мембранная пластина снабжена двумя и более сосредоточенными массами, например M_2 и M_3 . Тогда в уравнение (1) будут включены контактные силы, число которых равно числу этих сосредоточенных присоединенных масс (рис. 2).

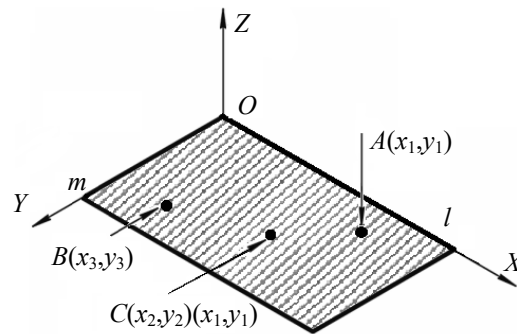


Рис. 2

Допустим, что сосредоточенная масса M_2 имеет координаты (x_2, y_2) , а сосредоточенная масса M_3 — координаты (x_3, y_3) . Нестационарная нагрузка $G(t)$ приложена в точке (x_1, y_1) . Тогда уравнение (2) примет следующий вид:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{array}{l} G(t) \sin(\lambda_{k,n}(t - \tau)) d\tau, \\ R_2(\tau) \sin(\lambda_{k,n}(t - \tau)) d\tau, \\ \frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_3(\tau) \sin(\lambda_{k,n}(t - \tau)) d\tau \end{array} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m}. \quad (9)$$

Контактная сила определяется с помощью решения следующей системы интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
& \int_0^t R_2(\tau) \left(\frac{t-\tau}{M_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{k\pi y_2}{m} \frac{C_{2k,n} \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau))}{\lambda_{k,n}} \right) d\tau + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_3(\tau) \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau \right) = \\
& = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(t) \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau, \\
& \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{k\pi x_3}{l} \sin \frac{n\pi y_3}{m} \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_2(\tau) \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau \right) + \\
& + \int_0^t R_3(\tau) \left(\frac{t-\tau}{M_3} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{3k,n} \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau))}{\lambda_{k,n}} \sin \frac{k\pi x_3}{l} \sin \frac{n\pi y_3}{m} \right) d\tau = \\
& = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x_3}{l} \sin \frac{n\pi y_3}{m} \frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(t) \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau.
\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Для численного решения системы (10), представляющей собой систему уравнений Вольтерры второго рода, необходимо преобразовать входящие в нее интегралы в конечные суммы, после чего (10) можно записать в матричном виде:

$$\left. \begin{aligned}
R_2 A_{11} + R_3 A_{12} &= f_1, \\
R_2 A_{21} + R_3 A_{22} &= f_2.
\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Используя метод Крамера, вычислим векторы R_1 и R_2 :

$$R_1 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & A_{12} \\ f_2 & A_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}}, \quad R_2 = \frac{\begin{vmatrix} A_{12} & f_1 \\ A_{22} & f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}}. \quad (12)$$

Полученное решение демонстрирует прикладное значение найденных решений прямых задач, которое заключается в возможности определения перемещений, прогибов, деформаций и напряжений мембранного чувствительного элемента в любой произвольной точке при воздействии на него сосредоточенных присоединенных масс [12], в частности присоединенных масс в ртутно-смачиваемых мембранных магнитоуправляемых контактах [13—18], а также в случае приложения сосредоточенных жестких присоединенных масс к выбранному элементу датчиков давления [19].

Найденное корректное решение прямых задач, т.е. задач, в которых четко заданы начальные параметры, а именно координаты сосредоточенных масс и нагрузка на мембранный элемент, позволяет при возникновении нестационарных колебаний найти выходные параметры мембраны. Аналогично могут быть найдены решения для трех и более сосредоточенных присоединенных масс. На основе математических моделей произведен расчет мембранных упругих элементов запатентованной серии коммутационных элементов и датчиков давления [20—23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баничук Н. В. Расчет нагружения упругопластического тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969. № 1. С. 128—135.

2. Галин Л. А. Упругопластическое кручение призматических стержней // Прикладная математика и механика. 1949. Т. 13, вып. 3. С. 285—296
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
4. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. Т. 1. 648 с.; Мир, 1969. Т. 2. 863 с.
5. Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 398 с.
6. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с.
7. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеориздат, 1956. 407 с.
8. Черноушко Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 4. С. 749—754.
9. Черноушко Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
10. Тертычный-Даури В. Ю. Решение вариационных динамических задач в условиях параметрической неопределенности // Проблемы передачи информации. 2005. Т. 41, вып. 1. С. 35—49.
11. Гришенцев А. Ю., Коробейников А. Г. Декомпозиция n -мерных цифровых сигналов по базису прямоугольных всплесков // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 4 (80). С. 75—79.
12. Калинкина М. Е., Коробейников А. Г., Коновалов Н. Ю., Пирожникова О. И., Ткалич В. Л., Шмаков Н. А. Влияние электростатических воздействий и температурного фактора на деформирование чувствительного элемента микромеханических приборов // Научно-технический вестник Поволжья. 2019. № 1. С. 78—80.
13. Пат. 2287837 (С1) РФ, МПК7 G01R 33/038. Датчик магнитометра / В. М. Мусалимов, В. Л. Ткалич, А. Г. Коробейников, М. С. Петрицев, П. А. Сергушин. Оpubл. 20.11.2006.
14. Пат. 2309419 (С2) РФ, МПК7 G01R 33/24. Устройство для измерения параметров магнитного поля / В. М. Мусалимов, В. Л. Ткалич, А. Г. Коробейников, М. С. Петрицев. Оpubл. 27.10.2007.
15. Пат. 144305 (U1) РФ, МПК7 H01H 1/66. Магнитоуправляемый контакт / В. Л. Ткалич, А. Г. Коробейников, Р. Я. Лабковская, О. И. Пирожникова. Оpubл. 20.08.2014.
16. Пат. 136920 (U1) РФ, МПК7 H01H 1/66. Магнитоуправляемый контакт / В. Л. Ткалич, А. Г. Коробейников, Р. Я. Лабковская, О. И. Пирожникова. Оpubл. 20.01.2014.
17. Пат. 166022 (U1) РФ, МПК7 H01H 1/66, H01H 37/52, G08B 17/06. Мембранный термобиметаллический магнитоуправляемый контакт / В. Л. Ткалич, Р. Я. Лабковская, О. И. Пирожникова, А. С. Козлов. Оpubл. 10.11.2016.
18. Пат. 176399 (U1) РФ, МПК7 G01R 33/038. Датчик магнитометра / В. Л. Ткалич, Р. Я. Лабковская, О. И. Пирожникова, А. С. Козлов. Оpubл. 17.01.2018.
19. Пат. 192957 (U1) РФ, МПК7 G01L 9/04, B82Y 40/00. Чувствительный элемент прецизионного датчика давления / В. Л. Ткалич, Р. Я. Лабковская, О. И. Пирожникова, А. С. Козлов, М. Е. Калинкина. Оpubл. 17.01.2018.
20. Богатырев В. А., Богатырев С. В. Надежность мультикластерных систем с перераспределением потоков запросов // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 2. С. 171—177.
21. Богатырев В. А., Богатырев С. В. Резервированное обслуживание в группе одноканальных систем с назначением различных приоритетов копиям запроса // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 11. С. 1033—1039.
22. Гришенцев А. Ю., Гурьянов А. В., Кузнецова О. В., Шукалов А. В., Коробейников А. Г. Математическое обеспечение в системах автоматизированного проектирования. СПб: Университет ИТМО, 2017. 88 с.
23. Гришенцев А. Ю., Коробейников А. Г. Улучшение сходимости метода конечных разностей с помощью вычисления промежуточного решения // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 3 (79). С. 124—127.

Сведения об авторах

Вера Леонидовна Ткалич

— д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультет безопасности информационных технологий;
E-mail: vera_leonidovna_tkalich@mail.ru

- Мария Евгеньевна Калинин** — аспирант; Университет ИТМО, факультет безопасности информационных технологий; E-mail: maria_kalinkina@mail.ru
- Анатолий Григорьевич Коробейников** — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультет безопасности информационных технологий; Санкт-Петербургский филиал ИЗМИРАН им. Н. В. Пушкова; зам. директора по науке; E-mail: Korobeynikov_A_G@mail.ru
- Ольга Игоревна Пирожникова** — канд. техн. наук; Университет ИТМО, факультет безопасности информационных технологий; E-mail: cheesecake@mail.ru

Поступила в редакцию
06.02.2020 г.

Ссылка для цитирования: Ткалич В. Л., Калинин М. Е., Коробейников А. Г., Пирожникова О. И. Анализ динамики мембранного упругого элемента с присоединенной сосредоточенной массой // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 5. С. 444—450.

DYNAMICS ANALYSIS OF THE MEMBRANE ELASTIC ELEMENT WITH ATTACHED CONCENTRATED MASS

V. L. Tkalich¹, M. E. Kalinkina¹, A. G. Korobeynikov^{1,2}, O. I. Pirozhnikova¹

¹ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: maria_kalinkina@mail.ru

²Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation of the RAS,
St. Petersburg Branch, 199034, St. Petersburg, Russia

The dynamics of unsteady oscillations of a rectangular membrane with one and two attached masses is studied. Adequate mathematical models are constructed using methods for solving direct problems in the mechanics of an elastically deformable body, namely, the Volterra equations and the Cramer method. It is noted that the obtained solution of the direct problem has an experimental application to the problems of analysis of displacements, deflections, deformations and stresses during unsteady vibrations of membranes with attached concentrated mass used in switching elements (membrane reed switches) and micromechanical pressure sensors. Based on the developed mathematical models, calculations of membrane elastic elements of a patented series of switching elements and pressure sensors are performed.

Keywords: membrane element, attached masses, concentrated mass, loading force, non-stationary oscillations, deflection value, Volterra equations, Cramer method, direct problem solution

REFERENCES

- Banichuk N.V. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1969, no. 1, pp. 128–135. (in Russ.)
- Galin L.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1949, no. 3(13), pp. 285–296. (in Russ.)
- Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* (Fundamentals of the Theory of Plasticity), Moscow, 1969, 420 p. (in Russ.)
- Nadai A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*, McGraw-Hill, 1950, 1277 p.
- Prager W., Hodge Ph.G. *Theory of Perfectly Plastic Solids*, NY, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1951.
- Sokolovskiy V.V. *Teoriya plastichnosti* (Plasticity Theory), Moscow, 1969, 608 p. (in Russ.)
- Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford, Clarendon press, 1950.
- Chernous'ko F.L. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 1965, no. 4(5), pp. 749–754. (in Russ.)
- Chernous'ko F.L., Banichuk N.V. *Variatsionnyye zadachi mekhaniki i upravleniya* (Variational Problems of Mechanics and Control), Moscow, 1973, 238 p. (in Russ.)
- Tertychny-Dauri V.Yu. *Problems of Information Transmission*, 2005, no. 1(41), pp. 45–58.
- Grishentsev A.Yu., Korobeynikov A.G. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2012, no. 4(80), pp. 75–79. (in Russ.)
- Kalinkina M.E., Korobeynikov A.G., Konovlov N.Yu., Pirozhnikova O.I., Tkalich V.L., Shmakov N.A. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Povolzh'ya*, 2019, no. 1, pp. 78–80. (in Russ.)
- Patent RU 2287837 (C1), G01R 33/038, *Datchik magnitometra* (Magnetometer Sensor), V.M. Musalimov, V.L. Tkalich, A.G. Korobeynikov, M.S. Petrishchev, P.A. Sergushin, Patent application no. 2005111814/28, Priority 20.04.2005, Published 20.11.2006. (in Russ.)
- Patent RU 2309419 (C2), G01R 33/24, *Ustroystvo dlya izmereniya parametrov magnitnogo polya* (Device for Measuring Magnetic Field Parameters), V.M. Musalimov, V.L. Tkalich, A.G. Korobeynikov, M.S. Petrishchev, Patent application no. 2005130568/28, Priority 03.10.2005, Published 27.10.2007. (in Russ.)
- Patent RU144305 (U1), H01H 1/66. *Magnitoupravlyayemyy kontakt* (Magnetically Controlled Contact),

- V.L. Tkalich, A.G. Korobeynikov, R.Ya. Labkovskaya, O.I. Pirozhnikova, Patent application no. 2014108108/07, Priority 03.03.2014, Published 20.08.2014. (in Russ.)
16. Patent RU 136920 (U1), H01H 1/66, *Magnitoupravlyayemyy kontakt* (Magnetically Controlled Contact), V.L. Tkalich, A.G. Korobeynikov, R.Ya. Labkovskaya, O.I. Pirozhnikova, Patent application no. 2013137233/07, Priority 08.08.2013, Published 20.01.2014. (in Russ.)
 17. Patent RU 166022 (U1), H01H 1/66, H01H 37/52, G08B 17/06, *Membrannyy termobimetallicheskiy magnitoupravlyayemyy kontakt* (Membrane thermobimetallic magnetically controlled contact), V.L. Tkalich, R.Ya. Labkovskaya, O.I. Pirozhnikova, A.S. Kozlov, Patent application no. 2016115033/07, Priority 18.04.2016, Published 10.11.2016. (in Russ.)
 18. Patent RU 176399 (U1), G01R 33/038, *Datchik magnetometra* (Magnetometer Sensor), V.L. Tkalich, R.Ya. Labkovskaya, O.I. Pirozhnikova, A.S. Kozlov, Patent application no. 2017120116, Priority 07.06.2017, Published 17.01.2018. (in Russ.)
 19. Patent RU 192957 (U1), G01L 9/04, B82Y 40/00, *Chuvstvitel'nyy element pretsizionnogo datchika davleniya* (Sensor Element for Precision Pressure Detector), V.L. Tkalich, R.Ya. Labkovskaya, O.I. Pirozhnikova, A.S. Kozlov, M.E. Kalinkina, Patent application no. 2017120116, Priority 07.06.2017, Published 17.01.2018. (in Russ.)
 20. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2017, no. 2(60), pp. 171–177. (in Russ.)
 21. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2017, no. 11(60), pp. 1033–1039. (in Russ.)
 22. Grishentsev A.Yu., Gur'yanov A.V., Kuznetsova O.V., Shukalov A.V., Korobeynikov A.G. *Matematicheskoye obespecheniye v sistemakh avtomatizirovannogo proyektirovaniya* (Software in Computer-Aided Design Systems), St. Petersburg, 2017, 88 p. (in Russ.)
 23. Grishentsev A.Yu., Korobeynikov A.G. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2012, no. 3(79), pp. 124–127. (in Russ.)

Data on authors

- Vera L. Tkalich** — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Secure Information Technologies; E-mail: vera_leonidovna_tkalich@mail.ru
- Maria E. Kalinkina** — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Secure Information Technologies; E-mail: mariia_kalinkina@mail.ru
- Anatoly G. Korobeynikov** — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Secure Information Technologies; Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation of the RAS, St. Petersburg Branch; Deputy Director for Science; E-mail: Korobeynikov_A_G@mail.ru
- Olga I. Pirozhnikova** — PhD; ITMO University, Faculty of Secure Information Technologies; E-mail: cheesecake@mail.ru

For citation: Tkalich V. L., Kalinkina M. E., Korobeynikov A. G., Pirozhnikova O. I. Dynamics analysis of the membrane elastic element with attached concentrated mass. *Journal of Instrument Engineering*. 2020. Vol. 63, N 5. P. 444–450 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2020-63-5-444-450