

## DGC-АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОФИЛЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. М. МУСАЛИМОВ

*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: musvm@ya.ru*

Объектом исследования являются профилограммы (случайные векторы) двух функциональных металлических поверхностей, находившихся во фрикционном взаимодействии. Определены возможности анализа основных компонентов с использованием свойств ковариационных матриц. Выполнена оценка выборочной матрицей ковариаций. Вычисляются собственные векторы и собственные значения матрицы ковариаций. Система координат, заданная собственными векторами, позволила оценить максимальную и минимальную дисперсию. Прослежена эволюция изменчивости микрогеометрии при различном времени взаимодействия трибопар. Таким образом, предложена методика DGC-анализа.

**Ключевые слова:** профилограммы, случайные векторы, ковариационный анализ, эллипсы дисперсий

**Введение.** Проблемам контроля микрогеометрии поверхностей деталей посвящены многочисленные исследования. При этом оценка и контроль профилей поверхностей ограничивались в основном одной случайной выборкой — оцифрованными значениями профиля поверхности [1—3]. Методам ковариационного анализа также посвящены многочисленные работы. Так, в [4] дается доступное введение в предмет, в [5] показано, что ковариационный анализ обеспечивает устойчивость статистических оценок. В фундаментальной работе [6] дано теоретическое обоснование использования ковариационного анализа. В [7] приводится алгоритм генерации случайных векторов с заданной матрицей ковариаций. Таким образом, естественным является путь „вложения“ дисперсионного анализа (D) с генерацией реализаций случайных векторов (G) в ковариационный (C). Для краткости назовем такой подход DGC-анализом.

Целью работы является создание методики DGC-анализа с использованием экспериментальной базы исследования микрогеометрии функциональных поверхностей [1—3].

**Матрица ковариаций.** В настоящей работе рассматриваются две случайные выборки данных, полученных с обеих трущихся поверхностей. Эти данные организованы в виде векторов  $\mathbf{z}=(z_1, \dots, z_q)^T$ . Предварительный анализ показывает, что эти векторы относятся к классу гауссовых случайных.

Введем обозначения:  $\mathbf{x}=(x_1, x_2)^T$  — случайный вектор, индексы 1 и 2 соответствуют номеру контрпары. Матрица ковариаций имеет вид  $\mathbf{C} = \mathbf{M}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]$  [6, 7].

На рис. 1, *a* представлена центрированная профилограмма-вектор  $x_1$ , а на рис. 1, *б* — профилограмма-вектор  $x_2$  (*l* — база). Это стартовые профилограммы.

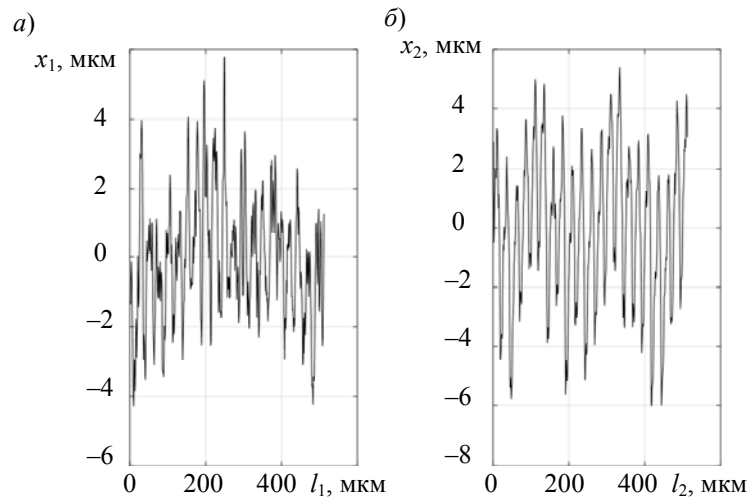


Рис. 1

В настоящей работе использованы данные испытаний образцов из сплава CuAl10Ni на установке Трибал [1, 8].

Для профилограмм, представленных на рис. 1, получена матрица ковариаций:

$$C = \begin{bmatrix} 3,1481 & -1,1647 \\ -1,1647 & 6,2805 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $D_1=3,1481$ ,  $D_2=6,2806$  — дисперсии,  $\mu_{12}=\mu_{21}=-1,1647$  — ковариации.

Матрица (1) является выборочной, ее оценка осуществляется генерацией случайных векторов с заданной матрицей с использованием разложения Холецкого [7]. На рис. 2 отображена область локализации 1000 сгенерированных случайных векторов в среде MATLAB.

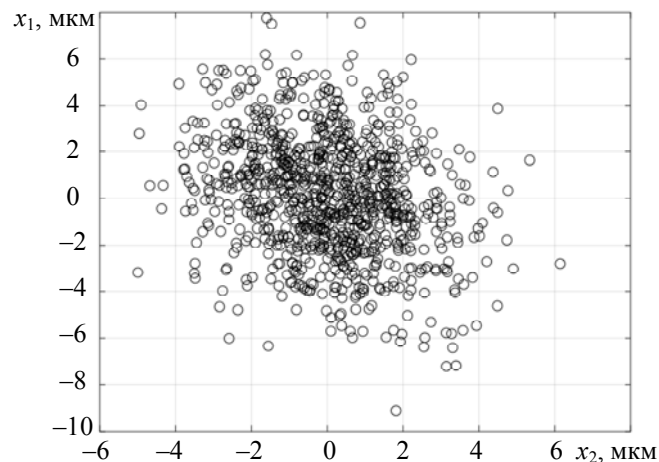


Рис. 2

Выполним оценку ковариационной матрицы (1):

$$Q = \begin{bmatrix} 3,2042 & -1,0697 \\ -1,0697 & 5,9161 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

**Собственные векторы и собственные значения матрицы ковариаций.** Рассмотрим матрицу ковариаций как матрицу преобразования [9—11]:  $Cv = \lambda v$ , где  $v$  — собственные векторы, а  $\lambda$  — собственные значения матрицы.

С использованием среды MATLAB вычислены  $v$  и  $\lambda$ :

$$vQ = \begin{bmatrix} -0,9493 & -0,3143 \\ -0,3143 & 0,9493 \end{bmatrix}; \quad \lambda Q = \begin{bmatrix} 2,7625 & 0 \\ 0 & 6,6661 \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$$vC = \begin{bmatrix} -0,9447 & -0,3278 \\ -0,3278 & 0,9447 \end{bmatrix}; \quad \lambda C = \begin{bmatrix} 2,8331 & 0 \\ 0 & 6,2872 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $vQ$ ,  $\lambda Q$ ,  $vC$ ,  $\lambda C$  — собственные векторы (столбцы матриц  $vQ$ ,  $vC$ ) и собственные значения (диагональные элементы  $\lambda Q$ ,  $\lambda C$ ) исходной матрицы ковариаций и ее оценки. Собственно, в (3) и (4) вычислены ортогональные базисы путем максимизации прогнозируемой дисперсии для каждого базисного вектора. Ковариационная матрица в координатах собственных векторов с учетом диагональных элементов и определяет значения дисперсии в направлении собственных векторов. Собственные векторы максимизируют дисперсию, позволяют оценить дисперсию сверху, а угол между осью абсцисс и собственным вектором наибольшего разброса данных, равный в данном случае  $\beta = \pi - 1,2514$  рад, используется для построения эллипса разброса значений сгенерированных случайных векторов. При этом собственные значения матрицы (дисперсии) равны „длинам“ осей эллипсов — соответствующих собственным векторам. На рис. 3 этот эллипс представлен с большой осью  $6,6661 \text{ мкм}^2$  (дисперсия), и с длиной малой оси, равной  $2,7625 \text{ мкм}^2$ . В приведенных расчетах использованы данные по стартовым профилограммам. Аналогичный анализ главных компонент выполнен для профилограмм, полученных для поверхностей с разным временем фрикционного взаимодействия: изначально  $\beta = -1,25$  рад; через 5 мин —  $-0,30$ ; 15 мин —  $-0,65$ ; 20 мин —  $-1,33$ ; 30 мин —  $1,24$ .

В таблице представлены главные собственные значения матриц ковариаций ( $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ), а также площадь эллипсов ( $S_1$  и  $S_2$ ).

Главные значения	Время фрикционного взаимодействия, мин				
	0	5	15	20	30
$\sigma_1, \text{ мкм}^2$	2,83	1,51	0,91	0,19	0,59
$\sigma_2, \text{ мкм}^2$	6,28	1,77	1,38	0,60	3,26
$S_1, \text{ мкм}^4$	0,3106	0,4604	0,3974	0,2405	0,1532
$S_2, \text{ мкм}^4$	0,6894	0,5396	0,6026	0,7995	0,8468

Разделим собственное значение каждого компонента  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на их сумму, получим, что в момент старта  $S_1=0,31$  и  $S_2=0,69$  (соответственно дисперсия данных 31 и 69 %). Таким образом, главные компоненты (главные собственные значения) представляют собой оценку дисперсии. Из рис. 3, а видно, как изменяются во времени значения дисперсий (длины осей) и как изменяются во времени направления главных векторов (осей эллипсов). На рис. 3, б приведены два эллипса, соответствующие 20 и 30 мин фрикционного взаимодействия. Здесь обнаруживается скачкообразная смена знака скорости при использовании линейной модели связи векторов.

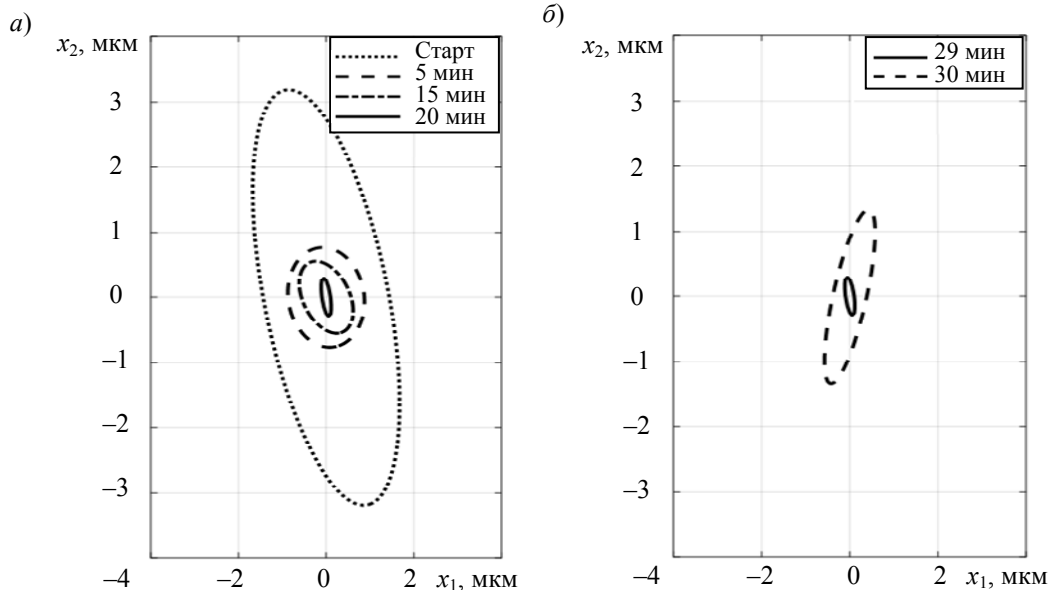


Рис. 3

Таким образом, использование образов эллипсов дисперсии позволяет нагляднее представить особенности стационарных процессов в трибологии. А сами эллипсы представляют собой оценивающее множество.

**Обсуждение результатов.** Методика DGC-анализа предполагает, в определенной степени, последовательное исследование случайных векторов, для которых рассчитывается выборочная матрица ковариаций; далее выполняются моделирование случайных векторов с заданной выборочной матрицей ковариаций и расчет оценки выборочной матрицы ковариаций (ОВМК). Дальнейший этап анализа состоит в матричных вычислениях собственных векторов и собственных значений ОВМК с использованием среды MATLAB. Отметим, что собственные значения матрицы ковариаций представляют собой обычные дисперсии случайного стационарного процесса. Сами дисперсии изменяются во времени, как это видно из таблицы.

**Заключение.** Разработанная методика DGC-анализа случайных векторов использована для исследования профилограмм контрпар. Получены оценки матриц ковариаций. Установлены закономерности изменения во времени оценивающих множеств-эллипсов рассеяния (дисперсий). Методика адаптирована для инженерных приложений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусалимов В. М., Валетов В. А. Динамика фрикционного взаимодействия. СПб: Изд-во ПИМаш (ЛМЗ-ВТУЗ), 2006. 168 с.
2. Третьяков С. Д. Исследование микрогеометрии поверхностей трения-скольжения: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб, 2003. 16 с.
3. Андреев Ю. С. Разработка технологических методов оптимизации микрогеометрии функциональных поверхностей деталей приборов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб, 2012. 24 с.
4. Cox D. R. Planning of Experiments. NY, 1958. 350 p.
5. Atiqullah M. The robustness of the covariance analysis of a one-way classification // Biometrika. 1964. Vol. 51. P. 365.
6. Кендалл М., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976. 736 с.
7. Сирота А. А. Методы и алгоритмы анализа данных и их моделирование в MATLAB. СПб: БХВ-Петербург, 2016. 384 с.
8. Мусалимов В. М., Нурдин К. А. Моделирование внешней динамики фрикционного взаимодействия с применением теории устойчивости упругих систем // Трение и износ. 2019. Т. 40, № 1. С. 68—76.
9. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974. 464 с.
10. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
11. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

#### Сведения об авторе

**Виктор Михайлович Мусалимов** — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; E-mail: musvm@yandex.ru

Поступила в редакцию  
15.03.2021 г.

**Ссылка для цитирования:** Мусалимов В. М. DGC-анализ случайных профилей поверхностей // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 6. С. 498—502.

## DGC-ANALYSIS FOR RANDOM PROFILES OF SURFACES

V. M. Musalimov

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia

E-mail: musvm@ya.ru

The object of research is profilograms (random vectors) of two functional metal surfaces that were in frictional interaction. Possibilities of analysis of the main components using the properties of covariance matrices are determined. The evaluation by the sample covariance matrix is carried out. The eigenvectors and eigenvalues of the covariance matrix are calculated. The coordinate system defined by the eigenvectors makes it possible to estimate the maximum and minimum variance. The evolution of microgeometry variability is traced at different times of interaction of tribopairs. Thus, a DGC analysis technique has been proposed.

**Keywords:** profilograms, random vectors, covariance analysis, ellipses of dispersion

## REFERENCES

1. Musalimov V.M., Valetov V.A. *Dinamika friktsionnogo vzaimodeystviya* (Dynamics of Frictional Interaction), St. Petersburg, 2006, 168 p. (in Russ.)
2. Tret'yakov S.D. *Issledovaniye mikrogeometrii poverkhnostey treniya – skol'zheniya* (Investigation of the Microgeometry of Friction–Sliding Surfaces), Extended abstract of candidate's thesis St. Petersburg, 2003, 16 p. (in Russ.)
3. Andreev Yu.S. *Razrabotka tekhnologicheskikh metodov optimizatsii mikrogeometrii funktsional'nykh poverkhnostey detaley priborov* (Development of Technological Methods for Optimizing the Microgeometry of the Functional Surfaces of Instrument Parts), Extended abstract of candidate's thesis St. Petersburg, 2012, 24 p. (in Russ.)
4. Cox D.R. *Planning of Experiments*, NY, 1958, 350 p.
5. Atiqullah M. *Biometrika*, 1964, no. 51, pp. 365.
6. Kendall M.G., Stuart A. *The Advanced Theory of Statistics*, 1964.
7. Sirota A.A. *Metody i algoritmy analiza dannykh i ikh modelirovaniye v MATLAB* (Methods and Algorithms for Data Analysis and Modeling in MATLAB), St. Petersburg, 2016, 384 p. (in Russ.)
8. Musalimov V.M., Nuzhdin K.A. *Journal of Friction and Wear*, 2019, no. 1(40), pp. 51–57.
9. Bendat J.S., Piersol A.G. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley, 2010, 640 p. ISBN: 0470248777, 9780470248775
10. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. *Matritsy i vychisleniya* (Matrices and calculations), Moscow, 1984.
11. Bellman R. *Introduction to Matrix Analysis*, NY, McGrawhill, 1960.

**Data on author**

**Viktor M. Musalimov** — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: musvm@yandex.ru

**For citation:** Musalimov V. M. DGC-Analysis for Random Profiles of Surfaces. *Journal of Instrument Engineering*. 2021. Vol. 64, N 6. P. 498–502 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2021-64-6-498-502