

**НОВЫЕ УСТОЙЧИВЫЕ МЕТОДЫ
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИСКАЖЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

В. С. СИЗИКОВ*, Н. Г. РУЩЕНКО

*Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
sizikov2000@mail.ru

Аннотация. Предложены новые устойчивые методы и алгоритмы реставрации поврежденных (искаженных, испорченных) изображений объектов в результате расфокусировки, размазывания, зашумленности. Тип и параметры повреждения оцениваются разработанным „спектральным способом“ на примере поврежденных снимков Черного моря, после чего выполняется элиминация (устранение) повреждения снимка с помощью устойчивого решения интегральных уравнений методом регуляризации Тихонова и преобразования Фурье. Это позволяет повысить разрешающую способность оптических приборов — фотокамер, телескопов, микроскопов и др.

Ключевые слова: расфокусировка, размазывание, зашумленность, интегральные уравнения, „спектральный способ“ оценки типа и параметров повреждений, элиминация (устранение), резекция (повреждение), MatLab

Благодарности: работа выполнена в рамках темы НИР № 620164 „Методы искусственного интеллекта для киберфизических систем“.

Ссылка для цитирования: Сизиков В. С., Рущенко Н. Г. Новые устойчивые методы восстановления искаженных изображений // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 7. С. 559—567. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-7-559-567.

NEW SUSTAINABLE METHODS FOR DISTORTED IMAGE RECOVERING

V. S. Sizikov*, N. G. Rushchenko

*ITMO University, St. Petersburg, Russia
sizikov2000@mail.ru

Abstract. New sustainable methods and algorithms are proposed for recovering object images damaged (distorted, corrupted) as a result of defocusing, spreading, and noising. The type and parameters of damage are estimated by the developed “spectral method”, as demonstrated on the example of distorted images of the Black Sea, and then the image damage is eliminated (removed) based on a stable solution of integral equations using the Tikhonov regularization method and the Fourier transform. The approach makes it possible to increase the resolution of optical instruments - cameras, telescopes, microscopes, etc.

Keywords: defocusing, spreading, noising, integral equations, “spectral method” for damage type and parameters estimating, elimination (removal), resection (damage), MatLab

Acknowledgment: the work was carried out within the framework of research project No. 620164 "Artificial intelligence methods for cyber-physical systems".

For citation: Sizikov V. S., Rushchenko N. G. New sustainable methods for distorted image recovering. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 7. P. 559—567 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-7-559-567.

Введение. В оптике важной задачей является получение качественных снимков различных подвижных и неподвижных объектов с помощью оптических устройств и приборов регистрации изображений — фото- и кинокамер, следящих систем, телескопов и т.д. Такие снимки позволяют получить важную техническую информацию об объектах, а также о некоторых характеристиках различных процессов. Устройства регистрации изображений могут быть установлены стационарно, например на производственных конвейерах, либо на движущихся объектах, таких как самолет, телескоп, беспилотный летательный аппарат, спутник,

и могут выполнять обзор физических сред, имея удаленный доступ к автоматическому управлению [1, с. 39—47]. Однако получаемые снимки часто бывают испорченными или плохого качества вследствие *повреждений*, к которым относятся:

- *расфокусирование* из-за ошибочной установки фокуса устройства;
- *размазывание* (смазывание)* из-за движения объекта за время экспозиции;
- *зашумленность* (зашумление) вследствие внешних (атмосферных) и внутренних (инструментальных) воздействий.

Повреждения могут быть устранены с помощью математической и компьютерной обработки изображений ([4, 5] и др.). Известен ряд методов обработки: использование интегральных уравнений для восстановления изображений путем решения уравнений регулярными методами, элиминация (удаление) шумов с изображений методами фильтрации и т.д. [1—3, 6—8]. Однако не в полной мере освещены следующие вопросы, относящиеся к обработке поврежденных изображений: оценка типа и параметров повреждения, одновременные расфокусировка, размытие и зашумленность, неравномерный смаз и т.д.

В настоящей статье развивается „спектральный способ“ оценки типа и параметров повреждений изображений, а также найденные параметры применяются для элиминации повреждений снимков путем решения интегральных уравнений. На рис. 1 приведены три снимка (изображения 434×700 пкс) Черного моря, полученные со спутника, с различной функцией рассеяния точки.



Рис. 1

Такой пример уже рассмотрен в [9], однако в данной работе изображения переставлены местами по сравнению с [9] для проверки эффективности „спектрального способа“.

По этим снимкам нельзя визуально определить *тип повреждения* — какой снимок расфокусирован, а какой размазан, а также определить наличие и тип шума (например, гауссов, импульсный и т.д.). Важной задачей является также оценка *параметрических показателей повреждений*: метрических характеристик пятна расфокусирования ρ или σ в случае расфокусировки снимка, величины Δ и угла направления θ размазывания, применяемых в случае смазывания изображения, а также параметров самого шума.

Способы определения типа и параметров повреждения снимков. В [2, 6] изложен „спектральный способ“ оценки типа повреждения изображения (снимка) и значений параметров повреждения на основе преобразования Фурье (ПФ) поврежденного изображения. Наряду с работами [2, 6] была опубликована работа [7], в которой также использованы ПФ поврежденных изображений, но не выведены формулы для оценки параметров повреждений.

Существуют следующие *способы* оценки *типа* повреждения (расфокусировки или размазывания) и способы определения его *параметров*.

— Оценка функции рассеяния точки (ФРТ) в случае расфокусировки [1, 7]. В этом случае точка на объекте воспроизводится как кружок размытия (пятно) [7, с. 192] на расфокусированном изображении. Это пятно и определяется как ФРТ. Однако сложность заключается в том, что чаще всего такая (яркая) точка отсутствует на объекте и соответственно на снимке.

* Искажение в результате сдвига будем называть *смазыванием* или *размазыванием* [2], а нечеткость краев изображения в результате эффекта Гиббса [3] — *размытием* краев.

— Оценка параметров Δ и θ по штрихам на изображении в случае прямолинейного и равномерного размазывания [1, с. 387, 394; 7, с. 107]. Здесь может возникнуть трудность при поиске на объекте четкой точки, которая далее превращается в штрих с параметрами Δ и θ на размазанном изображении, но такой точки обычно нет на объекте.

— Методы „слепой“ деконволюции (обратной свертки) [10—13], предназначенные для определения ФРТ и затем истинного изображения (с регуляризацией), после чего вычисление этой пары итеративно уточняется. В этих методах выполняется минимизация функционала с ограничениями на решение, требуется удачное начальное приближение и т.д. Это активно развиваемые методы, но они не гарантируют сходимость к изображению, близкому к истинному.

Очевидно, что отмеченные способы характеризуются либо недостатком данных, либо сложностью для применения в данных условиях, а погрешность определения угла размытия θ лишь в $1-2^\circ$ может привести к последующей значительной погрешности реставрированного изображения [2, 6—8] даже устойчивым методом (регуляризации Тихонова, фильтрации Винера и др.) из-за некорректности (в первую очередь, неустойчивости) задачи реставрации изображений [7, 14—18]. Сошлемся также на работы [19—22], посвященные способам определения ФРТ.

В данной работе для оценки типа повреждения изображения (расфокусировка или размазывание) и его параметров предлагается модификация „спектрального способа“, обновленная по сравнению с [2, 6—8]. Данная модификация ориентирована на случай слабого повреждения, когда визуально его невозможно различить и можно выявить лишь математически, а затем определить тип повреждения и его параметры.

Спектральный метод оценки типа повреждения снимка. Обозначим как $g(x,y)$ интенсивность поврежденного (испорченного, искаженного) изображения, например фотоснимка, при этом определим направление осей: ось x направим горизонтально, а ось y — вертикально вниз.

Используем в данных условиях двумерное преобразование Фурье поврежденного снимка $g(x,y)$:

$$G(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy, \quad (1)$$

где ω_x и ω_y — частоты Фурье, направленные вдоль x и y .

Полагаем, что ПФ (фурье-спектр) (1) изображения вычислено как ДПФ/БПФ (дискретное ПФ/быстрое ПФ) в системе MatLab [10], например, по m -функции `fftshift.m` с центрированием. Будет получен комплексный фурье-спектр $G(\omega_x, \omega_y)$, который для дальнейшего удобства выведем в виде модуля спектра $|G(\omega_x, \omega_y)|$. На рис. 2 приведены модули фурье-спектров $|G(\omega_x, \omega_y)|$ трех поврежденных снимков $g(x,y)$, представленных на рис. 1.

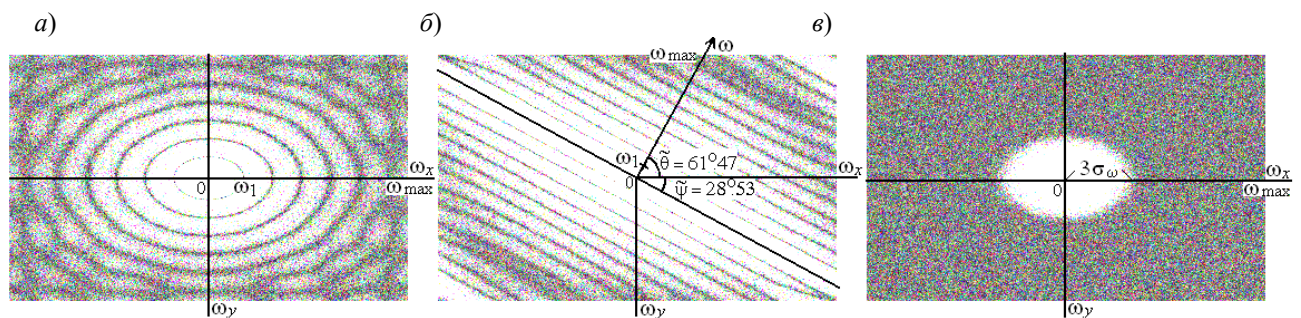


Рис. 2

Вид спектров на рис. 2 весьма различен, что поможет дать оценку типов, а также параметров повреждений снимков, приведенных на рис. 1.

Теория и практика спектральной обработки поврежденных снимков с использованием ПФ [6, 8, 10] четко демонстрирует следующее:

— фурье-спектр расфокусированного снимка, когда ФРТ — однородный диск, есть набор эллипсов (см. рис. 2, *a*), а когда ФРТ — гауссиана, то спектр — 2-мерная гауссиана (рис. 2, *в*);

— фурье-спектр размазанного снимка имеет вид почти параллельных линий с углом наклона, равным углу смаза θ (рис. 2, *б*).

Поэтому по виду спектров на рис. 2 можно определить, что на рис. 1, *a* приведен расфокусированный снимок, когда ФРТ — однородный диск, на рис. 1, *б* — размазанный снимок, а на рис. 1, *в* — расфокусированный снимок, когда ФРТ — гауссиана.

Оценим параметры искажений, применяя спектральный способ [2, 6].

Оценка параметров расфокусирования (2 варианта). Оценим параметры расфокусирования снимков на рис. 1, *a* и 1, *в* спектральным способом [2, 6].

Вариант 1. Вид фурье-спектра $|G(\omega_x, \omega_y)|$ на рис. 2, *a* в виде эллипсов указывает (как показано выше) на то, что на рис. 1, *a* представлен *расфокусированный* снимок, причем ФРТ — однородный диск радиусом ρ . Вариант 1 в оптике соответствует прохождению света через тонкую линзу [6, с. 100].

Используя нули функции Бесселя [2]: $\omega\rho = 0, 3,84, 7,02, \dots$, получаем: $\rho = 3,84/\omega_1, \dots$, где $\omega_1 = (\omega_1/\omega_{\max})\pi$ или $\omega_1 = 0,553$. Вычисляем параметр расфокусирования $\rho = 3,84/\omega_1$ и, производя несколько замеров ω_1 на рис. 2, *a*, получаем окончательно: $\rho = 6,94 \pm 0,2$, что близко к точному значению $\rho = 7$ пкс.

О реставрации изображения с использованием найденного параметра ρ см. далее.

Вариант 2. Если при расфокусировке каждая точка объекта превращается на поврежденном снимке в двухмерную *гауссиану*, то ФРТ будет также гауссианой (см. рис. 2, *в*):

$$h(r) = \frac{1}{2\pi\sigma_r^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где σ_r — СКО ФРТ-гауссианы.

Фурье-спектр H такой ФРТ и спектр $G(\omega_x, \omega_y)$ расфокусированного снимка также примут вид гауссиан:

$$G(\omega_x, \omega_y) = G(\omega) \sim H(\omega) \sim \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\sigma_r^2\right) \sim \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\sigma_\omega^2}\right), \quad \omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}. \quad (2)$$

Спектр G получается вещественным в виде пятна с монотонным убыванием яркости от центра (см. рис. 2, *в*). Отметим, что в варианте 1 имеются нули в спектре G , и это поспособствовало оценке параметра ρ , а в варианте 2 таких нулей нет. Однако гауссиана (2) убывает быстро и при $\omega_x \approx 3\sigma_\omega$ практически обнуляется, поэтому предлагаем способ „*трех сигм*“. Как следует из (2), $\sigma_r = 1/\sigma_\omega$. Соответственно, согласно способу „*трех сигм*“,

$$\sigma_r = \frac{3}{3\sigma_\omega}. \quad (3)$$

Учтем, что $\omega_{\max} = \pi$ (согласно Найквисту). Оценим по рис. 2, *в* значение $3\sigma_\omega \approx 1-1,15$. Тогда, используя (3), получаем в среднем по нескольким замерам: $\sigma_r = 2,8 \pm 0,3$, что близко к точному значению $\sigma_r = 3$ пкс. В данном варианте из-за нечеткости границы (где $G \approx 0$) относительная погрешность оценки σ_r получилась довольно большой, а именно $(0,3/2,8) \cdot 100\% \approx 10,7\%$. Тем не менее благодаря использованию нескольких замеров величины $3\sigma_\omega$ среднее значение σ_r приблизилось к точному.

Видим, что спектральный способ позволяет с приемлемой погрешностью оценить параметры ρ и σ_r расфокусирования снимка. Эти параметры понадобятся далее при реставрации снимков путем решения интегральных уравнений.

Оценки параметров размазывания. По спектру размазанного снимка (рис. 2, б) угол размазывания θ , как показано в [2, 6, 23], определяется по формуле: $\theta = 90^\circ - \psi$, где

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} \tilde{\psi}}{r}\right), \quad (4)$$

причем здесь θ и ψ — истинные углы, а $\tilde{\psi} = 90^\circ - \tilde{\theta}$, где $\tilde{\theta}$ — измеренный угол между горизонталью и осью ω ; здесь $r = M/N$, где M — число строк, а N — число столбцов в снимке g ; отличие r от единицы дает отличие $\tilde{\theta}$ от θ (если снимок квадратный, то $\tilde{\theta} = \theta$).

По рис. 2, б было выполнено несколько замеров угла $\tilde{\theta}$. В среднем получено: $\tilde{\theta} = 61,47^\circ$ и $\tilde{\psi} = 90^\circ - \tilde{\theta} = 28,53^\circ$. Значения M и N : $M = 434$, $N = 700$, поэтому $r = M/N = 0,620$. Используя формулу (4), находим в среднем: $\psi = 41,24^\circ \pm 0,35$ и $\theta = 48,75^\circ \pm 0,40$, что вполне сравнимо с точным значением угла размытия $\theta = 49^\circ$.

Чтобы оценить параметр Δ (величину размытия), отметим на оси ω (см. рис. 2, б) значения частоты ω_1 и частоту Найквиста ω_{\max} — первый и последний нули функции $|G(\omega_x, \omega_y)|$. Тогда параметр Δ будет равен [2, 6]

$$\Delta = 2 \frac{\omega_{\max}}{\omega_1}. \quad (5)$$

По нескольким замерам безразмерного отношения ω_{\max}/ω_1 и формуле (5) получаем в среднем: $\Delta = 21,4 \pm 0,3$, что близко к точному значению величины размазывания $\Delta = 21$ пкс.

Видим, что спектральный метод позволяет достаточно точно оценить параметры размазывания снимка. О реставрации снимка с использованием найденных параметров θ и Δ см. далее.

Элиминация (устранение) искажений снимков. После оценки спектральным методом типа и параметров повреждения снимка решим задачу устойчивой элиминации (устранения) математическим и программным путем повреждений (резекции) снимка и его реставрации (восстановления, реконструкции).

Элиминация расфокусировки и реставрация снимка. В данном случае решаем двухмерное интегральное уравнение (ИУ) типа свертки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi, y-\eta) w(\xi, \eta) d\xi d\eta = g(x, y), \quad (6)$$

где g — поврежденный измеренный снимок, w — искомый реставрируемый снимок, h — функция рассеяния точки, или ядро ИУ, x и ξ — внешняя и внутренняя горизонтальные переменные, y и η — аналогичные вертикальные переменные.

Для решения ИУ (6), нужно знать ядро ИУ h . При этом если ФРТ — однородный диск радиусом ρ , то ядро ИУ равно

$$h(x, y) = \begin{cases} 1/\pi\rho^2, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq \rho, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (7)$$

а если ФРТ — гауссиана, то

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_r^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_r^2}. \quad (8)$$

Решение ИУ (6) будем осуществлять устойчивым методом регуляризации Тихонова с использованием преобразования Фурье (РТ — ПФ) [2, 3, 6—9]:

$$w_{\alpha}(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H^*(\omega_1, \omega_2) G(\omega_1, \omega_2)}{|H(\omega_1, \omega_2)|^2 + \alpha(\omega_1^2 + \omega_2^2)^p} e^{-i(\omega_1 \xi + \omega_2 \eta)} d\omega_1 d\omega_2, \quad (9)$$

где $H(\omega_1, \omega_2)$ и $G(\omega_1, \omega_2)$ — двумерные ПФ функций $h(x, y)$ и $g(x, y)$, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, $p \geq 0$ — порядок регуляризации (обычно p равно 1 или 2).

Параметры ρ (см. вариант 1) и σ_r (см. вариант 2) определены выше спектральным методом. Это позволяет решать двумерное ИУ (6) методом РТ — ПФ согласно (9) (по разработанной m -функции `refocusingT.m`).

На рис. 3, *a* представлен результат элиминации расфокусировки снимка, приведенного на рис. 1, *a*, путем решения ИУ (6) методом РТ — ПФ согласно (9) с ФРТ (7) при $\rho = 7$ пкс, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$, а на рис 3, *в* — аналогичный результат, для рис. 1, *в*, с ФРТ (8) при $\sigma_r = 3$ пкс, $\alpha = 0,4 \cdot 10^{-5}$.



Рис. 3

Элиминация размазывания и реставрация снимка. В случае размазывания направим оси x и ξ вдоль смаза, а ось y перпендикулярно смазу.

Согласно интегральному исчислению, внешняя и внутренняя переменные должны обозначаться по-разному: x и ξ , хотя имеют одинаковый смысл (оси вдоль смаза) [25, с. 6].

Обратная задача элиминации равномерного и прямолинейного размазывания снимка сводится к решению набора одномерных интегральных уравнений Фредгольма I рода типа свертки при каждом значении y , которое рассматривается как параметр [2, 6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi) w_y(\xi) d\xi = g_y(x), \quad (10)$$

где ядро ИУ (или ФРТ) равно [2, 6]

$$h(x) = \begin{cases} 1/\Delta, & -\Delta \leq x \leq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (11)$$

Устойчивое решение ИУ (10) методом РТ — ПФ имеет следующий вид [2]:

$$w_{y\alpha}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(-\omega) G_y(\omega)}{|H(\omega)|^2 + \alpha\omega^{2p}} e^{-i\omega\xi} d\omega, \quad (12)$$

где $H(\omega)$ и $G_y(\omega)$ — одномерные ПФ функций $h(x)$ и $g_y(x)$ соответственно.

На рис. 3, *б* представлен результат элиминации размазывания на снимке, приведенном на рис. 1, *б*. Был решен набор ИУ (10) методом РТ — ПФ согласно (11) и (12) по разработанной m -функции `desmearingf.m` при $\alpha = 10^{-4}$, $p = 2$ (значения α и p выбраны путем подбора [24]).

При этом величина размазывания Δ и угол направления размазывания θ были оценены спектральным методом, изложенным выше: $\Delta = 21$, $\theta = 49^\circ$ (рис. 1, *б*). Видно, что размазывание практически удалено (см. рис. 3, *б*).

Анализ изображений на рис. 3 показывает, что задача устранения расфокусировки и размазывания достаточно надежно выполнена. При этом восстановился также имеющийся шум, причем достаточно хорошо видно, что это биполярный импульсный шум [7].

Элиминация шума. На рис. 4, а можно наблюдать результат фильтрации импульсного шума с применением медианного фильтра Тьюки (как показано в [14], импульсный шум лучше всего фильтруется именно медианным фильтром). Применение адаптивного медианного фильтра Гонсалеса или модифицированного медианного фильтра (рис. 4, б, в соответственно) дает схожие результаты фильтрации шума [1, 3, 10].



Рис. 4

Рис. 4 демонстрирует удовлетворительный завершающий *результат*: спектральным методом оценены типы и параметры повреждений изображений (см. рис. 1 и 2), что дало возможность реставрировать с повышенной точностью поврежденные снимки путем решения интегральных уравнений (см. рис. 3 и 4).

Заключение. Рассмотрена задача элиминации (удаления, устранения) математическим путем повреждений (искажений, порчи) изображений снимков (расфокусирования, размазывания, зашумленности) на примере снимков Черного моря. Типы, характеристики и параметры повреждений оценивались оригинальным спектральным способом. После их оценивания выполнена реставрация поврежденных снимков путем решения интегральных уравнений устойчивым методом регуляризации Тихонова. В заключение устранен импульсный шум тремя модификациями медианного фильтра.

Результаты данной статьи могут быть использованы для повышения качества реставрации снимков при их расфокусировке, размазывании и зашумленности. Это позволит повысить разрешающую способность оптических устройств регистрации изображений (съемочных камер, следящих систем, фотоаппаратов, микроскопов и т.д.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gonzalez R. C., Woods R. E. Digital Image Processing. New Jersey: Prentice Hall, 2002. 793 p.
2. Sizikov V. S. Spectral method for estimating the point-spread function in the task of eliminating image distortions // J. Optical Technology. 2017. Vol. 84, N 2. P. 95—101. DOI: 10.1364/JOT.84.000095.
3. Sizikov V. et al. Eliminating non-uniform smearing and suppressing the Gibbs effect on reconstructed images // Computers. 2020. Vol. 9, N 30. P. 1—16. DOI: 10.3390/computers9020030.
4. Voskoboïnikov Yu. E., Litasov V. A. A stable image reconstruction algorithm for inexact point-spread function // Avtometriya (Optoelectr. Instrum. Data Proces.). 2006. Vol. 42, N 6. P. 3—15.
5. Бойков И.В. и др. О приближенных методах восстановления потенциальных полей // Изв. РАН. Физика Земли. 2010. Т. 16, № 4. С. 67—77.
6. Грузман И. С., Киричук В. С., Косых В. П., Перетягин Г. И., Спектор А. А. Цифровая обработка изображений в информационных системах. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. 352 с.
7. Сизиков В. С. Прямые и обратные задачи восстановления изображений, спектроскопии и томографии с MatLab. СПб: Изд-во „Лань“, 2017. 412 с.
8. Sizikov V. S., Dovgan A. N., Tsepeleva A. D. Restoration of nonuniformly smeared images // J. Optical Technology. 2020. Vol. 87, N 2. P. 110—116. DOI: 10.1364/JOT.87.000110.
9. Sizikov V., Loseva P., Medvedev E., Sharifullin D., Dovgan A., Rushchenko N. Removal of complex image distortions via solving integral equations using the "spectral method" // CEUR Workshop Proc. 2020. Vol. 2893. P. 11.

10. *Gonsales R. C., Woods R. E., Eddins S. L.* Digital Image Processing using MatLab. New Jersey: Prentice Hall, 2004. 609 p.
11. *Hansen P. C.* Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms. Philadelphia: SIAM, 2010. 213 p.
12. *Fergus R.* et al. Removing camera shake from a single photograph // *ACM Trans. Graphics.* 2006. Vol. 25, N 3. P. 787—794.
13. *Cho S., Lee S.* Fast motion deblurring // *ACM Trans. Graphics.* 2009. Vol. 28, N 5. Art. N 145. DOI: 10.1145/1618452.1618491.
14. *Сизиков В. С.* Обратные прикладные задачи и MatLab. СПб: Изд-во „Лань“, 2011. 256 с.
15. *Petrov Yu. P., Sizikov V. S.* Well-Posed, Ill-Posed, and Intermediate Problems with Applications. Leiden — Boston: VSP, 2005. 234 p.
16. *Kabanikhin S. I.* Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications. Berlin: Walter de Gruyter, 2011. DOI: 10.1515/459 p.
17. *Пронина В. С.* Восстановление изображений с помощью обучаемых оптимизационно-нейросетевых алгоритмов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., Сколк. ин-т, 2023. 36 с.
18. *Sidorov D.* Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. Singapore — London: World Sci. Publ., 2014. 343 p.
19. *Protasov K. T., Belov V. V., Molchunov N. V.* Image reconstruction with pre-estimation of the point-spread function // *Optics Atmos. Ocean.* 2000. Vol. 13, N 2. P. 139—145.
20. *Voskoboinikov Yu. E.* A combined nonlinear contrast image reconstruction algorithm under inexact point-spread function // *Optoel. Instrum. Data Proces.* 2007. Vol. 43, N 6. P. 489—499. DOI: 10.3103/S8756699007060015.
21. *Antonova T. V.* Methods of identifying a parameter in the kernel of the first kind equation of the convolution type on the class of functions with discontinuities // *Siberian Journal Numer. Mathem.* 2015. Vol. 18, N 2. P. 107—120. DOI: 10.15372/SJNM20150201.
22. *Солодуша С. В.* Методы построения интегральных моделей динамических систем: алгоритмы и приложения в энергетике: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2019. 44 с.
23. *Егошкин Н. А., Еремеев В. В.* Коррекция смаза изображений в системах космического наблюдения Земли // Цифровая обработка сигналов. 2010. № 4. С. 28—32.
24. *Sizikov V. S.* Further development of the new version of a posteriori choosing regularization parameter in ill-posed problems // *Intern. Journal Artific. Intelligence.* 2015. Vol. 13, N 1. P. 184—199.
25. *Сизиков В. С., Довгань А. Н., Лавров А. В.* Устойчивые методы математико-компьютерной обработки изображений и спектров: Учеб. пособие. СПб: Ун-т ИТМО, 2022. 70 с.

Сведения об авторах

Валерий Сергеевич Сизиков

— д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультет программной инженерии и компьютерной техники; E-mail: sizikov2000@mail.ru

Нина Геннадиевна Рущенко

— канд. техн. наук, доцент; Университет ИТМО, факультет программной инженерии и компьютерной техники; E-mail: rushchenko@mail.ru

Поступила в редакцию 27.03.2023; одобрена после рецензирования 14.04.2023; принята к публикации 31.05.2023.

REFERENCES

1. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital Image Processing*, New Jersey, Prentice Hall, 2002, 793 p.
2. Sizikov V.S. *J. Optical Technology*, 2017, no. 2(84), pp. 95–101, DOI: 10.1364/JOT.84.000095.
3. Sizikov V. et al. *Computers*, 2020, no. 30(9), pp. 1–16, DOI: 10.3390/computers9020030.
4. Voskoboinikov Yu.E. and Litasov V.A. *Avtometriya (Optoel. Instrum. Data Proces.)*, 2006, no. 6(42), pp. 3–15.
5. Boikov I.B., Kravchenko M.V., Kryuchko V.I. *Izvestiya RAS, Physics of the Solid Earth*, 2010, no. 4(16), pp. 339–349.
6. Gruzman I.S., Kirichuk V.S., Kosykh V.P., Peretyagin G.I., Spektor A.A. *Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy v informatsionnykh sistemakh (Digital Image Processing in Information Systems)*, Novosibirsk, 2002, 352 p. (in Russ.)
7. Sizikov V.S. *Pryamyye i obratnyye zadachi vosstanovleniya izobrazheniy, spektroskopii i tomografii s MatLab (Direct and Inverse Problems of Image Reconstruction, Spectroscopy and Tomography with MatLab)*, St. Petersburg, 2017, 412 p. (in Russ.)
8. Sizikov V.S., Dovgan A.N., Tsepeleva A.D. *J. Optical Technology*, 2020, no. 2(87), pp. 110–116, DOI: 10.1364/JOT.87.000110.

9. Sizikov V., Loseva P., Medvedev E., Sharifullin D., Dovgan A., Rushchenko N. *CEUR Workshop Proc.*, 2020, no. 11(2893).
10. Gonsales R.C., Woods R.E., Eddins S.L. *Digital Image Processing using MATLAB*, New Jersey, Prentice Hall, 2004, 609 p.
11. Hansen P.C. *Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms*, Philadelphia, SIAM, 2010, 213 p.
12. Fergus R. et al. *ACM Trans. Graphics*, 2006, no. 3(25), pp. 787–794.
13. Cho S., Lee S. *ACM Trans. Graphics*, 2009, no. 5(28), art. no. 145, DOI: 10.1145/1618452.1618491.
14. Sizikov V.S. *Obratnyye prikladnyye zadachi i MatLab* (Inverse Applications and MatLab), St. Petersburg, 2011, 256 p. (in Russ.)
15. Petrov Yu.P., Sizikov V.S. *Well-Posed, Ill-Posed, and Intermediate Problems with Applications*, Leiden–Boston, VSP, 2005, 234 pp.
16. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications*, Berlin, Walter de Gruyter, 2011, 459 p.
17. Pronina V.S. *Vosstanovleniye izobrazheniy s pomoshch'yu obuchayemykh optimizatsionno-neyrosetevykh algoritmov* (Image Restoration Using Trainable Optimization Neural Network Algorithms), Extended abstract of candidate's thesis, Moscow, 2023, 36 p. (in Russ.)
18. Sidorov D. *Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control*, Singapore–London, World Sci. Publ., 2014, 343 p.
19. Protasov K.T., Belov V.V., Molchunov N.V. *Optics Atmos. Ocean.*, 2000, no. 2(13), pp. 139–145.
20. Voskoboinikov Yu.E. *Optoel. Instrum. Data Proces.*, 2007, no. 6(43), pp. 489–499, DOI: 10.3103/S8756699007060015.
21. Antonova T.V. *Siberian J. Numer. Mathem.*, 2015, no. 2(18), pp. 107–120, DOI: 10.15372/SJNM20150201.
22. Solodusha S.V. *Metody postroyeniya integral'nykh modeley dinamicheskikh sistem: algoritmy i prilozheniya v energetike* (Methods for Constructing Integral Models of Dynamic Systems: Algorithms and Applications in the Power Industry), Extended abstract of Doctor's thesis, Irkutsk, 2019, 44 p. (in Russ.)
23. Egoshkin N.A., Ereemeev V.V. *Digital signal processing*, 2010, no. 4, pp. 28–32. (in Russ.)
24. Sizikov V.S. *Intern. J. Artific. Intelligence*, 2015, no. 1(13), pp. 184–199.
25. Sizikov V.S., Dovgan' A.N., Lavrov A.V. *Ustoychivyye metody matematiko-komp'yuternoy obrabotki izobrazheniy i spektry* (Stable Methods of Mathematical-Computer Processing of Images and Spectra), St. Petersburg, 2022, 70 p. (in Russ.)

Data on authors

- Valery S. Sizikov** — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Software Engineering and Computer Tech-nique; E-mail: sizikov2000@mail.ru
- Nina G. Rushchenko** — PhD, Associate Professor; ITMO University, Faculty of Software Engineering and Computer Technique; E-mail: rushchenko@mail.ru

Received 27.03.2023; approved after reviewing 14.04.2023; accepted for publication 31.05.2023.