
ПРИБОРЫ НАВИГАЦИИ

NAVIGATIONAL INSTRUMENTS

УДК 531.383
DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-8-660-670

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА КОНТУРА МАЯТНИКОВОЙ КОРРЕКЦИИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ВЕРТИКАЛЕЙ

К. О. Лукин*, С. В. Кривошеев

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ,
Казань, Россия*

**Kirill.O.Lukin@yandex.ru*

Аннотация. Представлен графоаналитический метод оптимального синтеза контура маятниковой (позиционной) коррекции гироскопических вертикалей на подвижном основании, модель которого сводится к комплементарному фильтру. В качестве критерия оптимальности используется дисперсия ошибки комплементарного фильтра. Характеристики дрейфа гироскопа в виде белого шума и нестабильности нуля определяются из вариации Аллана, а ошибки маятника — по спектральной плотности мощности горизонтального ускорения, определенной с учетом предполагаемых условий эксплуатации. Определение оптимальной постоянной времени коррекции и максимально допустимого значения параметра дрейфа гироскопа при заданной точности гировертикали с учетом динамики подвижного объекта осуществляется при помощи специально формируемого графика с осями „постоянная времени коррекции— параметр дрейфа гироскопа“. Предложенный метод может использоваться как для аналитических, так и для силовых гировертикалей.

Ключевые слова: комплексирование, комплементарный фильтр, гировертикаль, маятниковая коррекция, оптимальный синтез, гироскоп, маятниковый чувствительный элемент, акселерометр

Ссылка для цитирования: Лукин К. О., Кривошеев С. В. Графоаналитический метод оптимального синтеза контура маятниковой коррекции гироскопических вертикалей // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 8. С. 660—670. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-8-660-670.

GRAPHICAL-ANALYTICAL METHOD FOR OPTIMAL SYNTHESIS OF PENDULUM CORRECTION CONTOUR OF VERTICAL GYROS

K. O. Lukin*, S. V. Krivosheev

*A. N. Tupolev Kazan National Research Technical University, Kazan, Russia
Kirill.O.Lukin@yandex.ru

Abstract. A graphical-analytical method of optimal synthesis of pendulum (positional) correction contour for gyroscopic verticals on a movable base is presented, the model of the gyro is reduced to a complementary filter. The variance of the complementary filter error is used as an optimality criterion. Characteristics of the gyroscope drift in the form of white noise and zero instability are determined from the Allan variation, and the satellite errors are determined from the spectral power density of horizontal acceleration, determined with the account for assumed operating conditions. Determination of the optimal correction time constant and the maximum permissible gyroscope drift parameter at a given gyro accuracy, taking into account the moving object dynamics, is carried out using a specially formed graph with the axes "correction time constant — gyro drift parameter". The proposed method can be used for both analytical and power vertical gyros.

Keywords: complexing, complementary filter, vertical gyro, pendulum correction, optimal synthesis, gyro, pendulum sensitive element, accelerometer

Введение. Гироскопическая вертикаль предназначена для построения стабильной приборной вертикали места. Для решения этой задачи используют комплексирование сигналов ориентации, полученных с помощью гироскопов и маятникового чувствительного элемента (МЧЭ). Так как гироскопический датчик имеет погрешности, обусловленные инструментальным и методическим дрейфом, а погрешности МЧЭ порождаются ускорениями подвижного объекта, на котором установлена гировертикаль, то для повышения точности построения приборной вертикали их объединяют в комплексную систему. Основной задачей при этом является нахождение компромиссного решения при построении системы коррекции гироскопа по сигналу МЧЭ.

В аналитических гировертикалях комплексирование выполняется численно, в частности, с использованием комплементарного фильтра (КФ) [1, 2], фильтра Калмана [3—5] и фильтра Маджвика [6]. Синтез КФ заключается в выборе общей частоты среза для фильтров низкой (ФНЧ) и высокой частоты (ФВЧ). КФ может быть реализован не только в классическом виде для углов Эйлера—Крылова, но и для параметров ориентации в виде направляющих косинусов [1] и кватернионов [2].

Иногда горизонтальными поперечными ускорениями просто пренебрегают (например, в [4] для фильтра Калмана), оставляя модель только белого шума. В таком случае синтез схож со способами синтеза КФ на основе фильтра Винера или фильтра Калмана первого порядка [7, 8], где дрейф гироскопа и ошибки МЧЭ описываются белыми шумами. Однако тогда остается неясным принцип выбора характеристик белого шума ошибок МЧЭ при использовании гировертикали на подвижном объекте (подробнее этот аспект рассмотрен в разделе „Пример“).

Выбор параметров контура маятниковой коррекции с учетом динамики подвижного объекта не рассматривался в работах [1, 4, 6, 8]. Из известных методов настройки можно привести, например, уменьшение крутизны контура коррекции при увеличении модуля измеренного акселерометрами ускорения [9, 10] и оптимизацию крутизны контура по результатам экспериментов [10, 11].

На взгляд авторов, наиболее технически целесообразным методом синтеза контура коррекции является использование статистических характеристик сигналов гироскопа и МЧЭ, как, например, в [12]. В настоящей работе рассмотрен синтез контура маятниковой коррекции по типу КФ как наиболее универсальный и вычислительно простой способ комплексирования. Предлагается графоаналитический метод выбора точности гироскопа и оптимального значения постоянной времени коррекции T КФ с учетом параметров динамики подвижного объекта.

Постановка задачи. Без потери общности рассмотрим комплексирование для определения угла крена в аналитической гировертикали. Аналитическая гировертикаль состоит из датчика угловых скоростей (ДУС), ось чувствительности которого установлена по продольной оси X подвижного объекта, и МЧЭ в виде блока акселерометров с осями чувствительности по поперечной Z и нормальной Y осям подвижного объекта.

Угол крена по сигналам блока акселерометров γ_M определяется по выражению

$$\gamma_M = \operatorname{arctg} \left(\frac{a_z}{a_y} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{g \sin \gamma + a \cos \gamma}{g \cos \gamma - a \sin \gamma} \right), \quad (1)$$

где a_y, a_z — показания акселерометров по соответствующим осям; g — ускорение свободного падения; a — горизонтальное поперечное ускорение; γ — истинный угол крена. Заменой переменных $\operatorname{tg} \Delta\gamma_M = a/g$ (где $\Delta\gamma_M$ — ошибка МЧЭ) преобразуем выражение (1) к виду

$$\gamma_M = \operatorname{arctg} \left(\frac{g \sin \gamma + a \cos \gamma}{g \cos \gamma - a \sin \gamma} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\gamma + \Delta\gamma_M)}{\cos(\gamma + \Delta\gamma_M)} \right) = \gamma + \Delta\gamma_M. \quad (2)$$

Угол крена по гироскопу (ДУС) γ_r определяется интегрированием сигнала мгновенной угловой скорости ДУС с учетом начального значения γ_0 :

$$\gamma_r = \int_0^t \omega_x d\tau + \gamma_0 = \int_0^t (\dot{\gamma} + \omega_{др}) d\tau + \gamma_0, \quad (3)$$

где $\omega_x = \dot{\gamma} + \omega_{др}$ — мгновенная угловая скорость, измеряемая ДУС; $\omega_{др}$ — угловая скорость дрейфа ДУС (гироскопа).

С целью комплексирования сигналов МЧЭ и гироскопа (ДУС) в виде КФ применяют комбинацию ФНЧ для сигнала МЧЭ (2) и ФВЧ с той же частотой среза (постоянной времени), что и ФНЧ, для сигнала ДУС (3). Вычисленный угол крена γ_B определяется с помощью КФ в виде

$$\gamma_B = \frac{1}{Tp+1} \gamma_M + \frac{Tp}{Tp+1} \gamma_r = \frac{\gamma + \Delta\gamma_M}{Tp+1} + \frac{T\gamma p + T\omega_{др}}{Tp+1} = \gamma + \frac{\Delta\gamma_M}{Tp+1} + \frac{T\omega_{др}}{Tp+1}, \quad (4)$$

где T — постоянная времени коррекции; p — комплексная переменная в преобразовании Лапласа (символ дифференцирования). Таким образом, полезный сигнал не искажается в КФ, ошибки МЧЭ усредняются в ФНЧ, а дрейф гироскопа не имеет тенденции к накоплению после прохождения ФВЧ.

Ошибки МЧЭ $\Delta\gamma_M$ на подвижном объекте можно условно разделить на две составляющие: низкочастотные, например порождаемые виражом, и высокочастотные, порождаемые качкой или динамикой самого МЧЭ. Ошибки первого типа не усредняются в КФ, а гировертикаль „уходит“ к кажущейся вертикали. Для их устранения используются дополнительные технические средства, например, выключатели коррекции или методы компенсации действия ускорений [13—15]. В расчетах используется нормальный режим, в котором ошибки МЧЭ не имеют составляющих с частотами, приближающимися к нулю, и являются малыми (до нескольких градусов).

Дрейф гироскопа — сложный процесс, включающий случайные и детерминированные составляющие. В рамках настоящей статьи дрейф рассматривается преимущественно как случайный: основные детерминированные составляющие, связанные с самим датчиком, такие как постоянное смещение нуля и температурный дрейф, устраняются калибровкой. Дрейф от угловой скорости вращения и облета Земли в расчете не рассматривается, поскольку при необходимости может устраняться дополнительными техническими средствами.

Ставится задача оптимального синтеза КФ для аналитической гировертикали, а именно выбора постоянной времени коррекции T , а также определения требуемой точности гироскопа с учетом заданной точности гировертикали и динамики подвижного объекта в нормальном режиме. В качестве критерия оптимальности принимается дисперсия $D_{кф}$ ошибки КФ. При этом будем считать ошибки гироскопа и МЧЭ некоррелированными, откуда общая дисперсия ошибки КФ в соответствии с (4) вычисляется как сумма дисперсий ошибок гироскопа (ДУС) D_r и МЧЭ D_M

$$D_{кф} = D[\gamma_B - \gamma] = D_r + D_M. \quad (5)$$

Предлагаемый метод расчета. Учитывая, что в нормальном режиме $\Delta\gamma_M \ll 1$, следовательно, $\Delta\gamma_M \approx a/g$, а также, что ошибка МЧЭ из-за действия поперечного ускорения много больше шума самого датчика, ошибки МЧЭ могут быть аппроксимированы с помощью спектральной плотности мощности поперечного ускорения $S_a(\omega)$ [16] в виде

$$S_a(\omega) = \frac{2D_a m n \omega^2}{|1 + jm\omega + n(j\omega)^2|^2}, \quad (6)$$

которой соответствует формирующий фильтр

$$F(p) = \frac{p\sqrt{2mnD_a}}{np^2 + mp + 1}, \quad (7)$$

где ω — круговая частота; D_a — дисперсия горизонтального поперечного ускорения; $m = 2\mu(\mu^2 + \varpi^2)^{-1}$; $n = (\mu^2 + \varpi^2)^{-1}$; μ — параметр затухания; ϖ — резонансная частота; j — мнимая единица.

Тогда дисперсию ошибки МЧЭ можно найти [16] аналитически по передаточным функциям формирующего фильтра (7) и ФНЧ в составе КФ (4):

$$D_M = \frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{Tp+1} F(p) \right|_{p=j\omega}^2 d\omega \right) = \frac{nD_a}{g^2(T^2 + Tm + n)}. \quad (8)$$

Дисперсия ошибки гироскопа после прохождения КФ определяется выражением

$$D_\Gamma = D \left[\left(\frac{\omega_{др}}{Tp+1} \right) T \right] = D \left[\frac{\omega_{др}}{Tp+1} \right] T^2. \quad (9)$$

Необходимо определить дисперсию выражения $\frac{\omega_{др}}{Tp+1}$, что означает найти дисперсию угловой скорости дрейфа, усредненную ФНЧ за время T . Для этого используем метод вариации Аллана [17]. Конечно, вариация Аллана не является, строго говоря, дисперсией, а усреднение по ней происходит не с помощью апериодического звена первого порядка. Однако с достаточной для данного расчета точностью можно оценить дисперсию выражения $\frac{\omega_{др}}{Tp+1}$ равной вариации Аллана, тогда выражение (9) примет вид

$$D_\Gamma \approx \sigma_{ав}^2(T) T^2, \quad (10)$$

где $\sigma_{ав}^2(T)$ — вариация Аллана угловой скорости гироскопа.

Как правило, гировертикали с маятниковой коррекцией имеют рабочую зону постоянной времени T порядка единиц до десятков секунд. Дрейф гироскопов в этой зоне времени осреднения может быть охарактеризован белым шумом или нестабильностью нуля. Далее два указанных случая будут рассмотрены подробно.

В зоне преобладания нестабильности нуля в дрейфе гироскопа график вариации Аллана приобретает практически нулевой наклон, что является показателем слабой зависимости вариации угловой скорости дрейфа от времени усреднения. В таком случае значение выражения (10) можно найти как

$$D_\Gamma \approx \sigma_{нн}^2(\omega) T^2, \quad (11)$$

где $\sigma_{\text{нн}}^2(\omega)$ — вариация угловой скорости дрейфа в районе пологой части графика вариации Аллана. Дисперсия ошибки КФ, найденная по выражению (5), с учетом (8), (11) принимает вид

$$D_{\text{кф}} = D_{\Gamma} + D_{\text{М}} = T^2 \sigma_{\text{нн}}^2(\omega) + \frac{nD_a}{g^2(T^2 + Tm + n)}. \quad (12)$$

Точки экстремума критерия оптимальности (12) определяет уравнение

$$\frac{\partial}{\partial T} D_{\text{кф}} = 2T \sigma_{\text{нн}}^2(\omega) - \frac{nD_a(2T + m)}{g^2(T^2 + Tm + n)^2} = 0, \quad (13)$$

которое для реализации предлагаемого метода рационально представить кривой, характеризующей зависимость $\sigma_{\text{нн}}(\omega)$ от T :

$$\sigma_{\text{нн}}(\omega) = \frac{\sqrt{nD_a(2T + m)}}{\sqrt{2T}g(T^2 + Tm + n)}. \quad (14)$$

Найденные значения экстремумов, соответствующие кривой (14), будут означать минимум функции $D_{\text{кф}}$ при положительной второй производной выражения (12):

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} D_{\text{кф}} = 2\sigma_{\text{нн}}^2(\omega) + 2nD_a(3T^2 + 3Tm + m^2 - n)g^{-2}(T^2 + Tm + n)^{-3} > 0. \quad (15)$$

Докажем, что кривая (14) удовлетворяет условию (15) при любых $T \geq 0$, $\sigma_{\text{нн}}(\omega) \geq 0$, тогда должно выполняться следующее выражение:

$$\frac{nD_a(2T + m)}{2Tg^2(T^2 + Tm + n)^2} > -\frac{nD_a(3T^2 + 3Tm + m^2 - n)}{g^2(T^2 + Tm + n)^3};$$

$$0,5nD_a(8T^3 + 9T^2m + 3Tm^2 + mn)T^{-1}g^{-2}(T^2 + Tm + n)^{-3} > 0 \text{ при } m > 0, n > 0.$$

Далее определим границы областей параметров T , $\sigma_{\text{нн}}(\omega)$ — уравнения изолиний — по максимально допустимому среднеквадратическому отклонению (СКО) ошибки КФ $\sigma_{\text{кф}} = \sqrt{D_{\text{кф}}}$ по выражению (12):

$$\sigma_{\text{нн}}(\omega) = \frac{1}{T} \sqrt{\sigma_{\text{кф}}^2 - \frac{nD_a}{g^2(T^2 + Tm + n)}}. \quad (16)$$

Для наглядного пояснения предлагаемого метода схематично представим выражения (14) и (16) на рис. 1, а в координатах T , $\sigma_{\text{нн}}(\omega)$ для общего случая. Точки пересечения изолиний (16) и оптимальной кривой (14) — E_1 и E_2 — показывают максимально допустимый дрейф для заданных $\sigma_{\text{кф}1}$ и $\sigma_{\text{кф}2}$. Все точки под изолиниями (16) соответствуют дисперсии, меньшей, чем на соответствующей изолинии. Отрезки OA_1 и OA_2 показывают значения постоянной T , при которых значения $\sigma_{\text{кф}1}$ и $\sigma_{\text{кф}2}$ получить невозможно ввиду недостаточного усреднения ошибки МЧЭ.

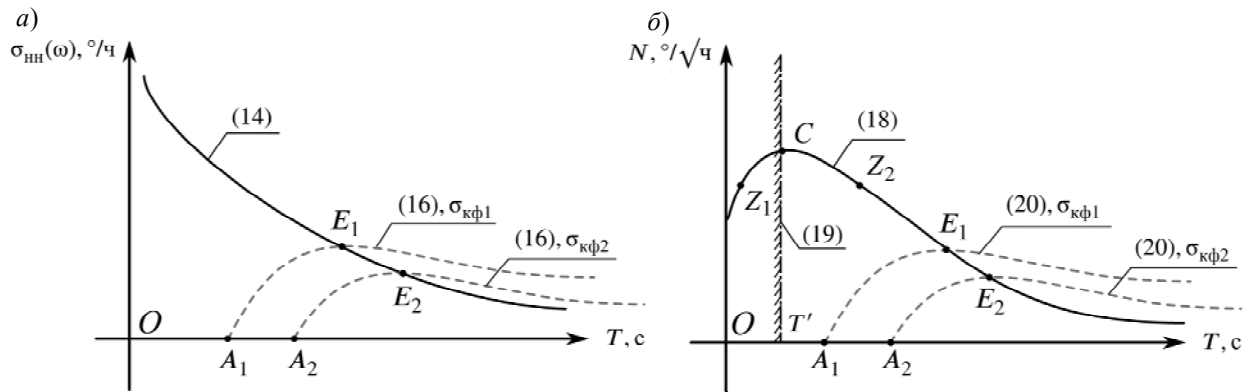


Рис. 1

Выражение, схожее с (13), было получено в [12], где предлагается решить уравнение численным способом и отбросить корни, не имеющие физического смысла, а причиной ошибки гироскопа является вращение Земли. Однако для определения точек минимума среди экстремумов необходимо рассмотреть вторую производную (что более важно для случая белого шума). Для предлагаемого метода не требуется решение выражений (13) и (15), соответствующих первой и второй производным, или использование численных методов оптимизации.

При преобладании белого шума в дрейфе гироскопа в рабочей зоне вариация Аллана имеет наклон $-1/2$ [17], а значение выражения (10) определяется

$$D_{\Gamma} \approx N^2 T, \quad (17)$$

где N — случайное блуждание угла (angular random walk) по девиации Аллана [17]. По аналогии с выражением (14) могут быть получены уравнения кривой оптимума N от T

$$N = \frac{\sqrt{nD_a(2T+m)}}{g(T^2+Tm+n)}; \quad (18)$$

аналогично выражению (15) — условие положительности второй производной

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} D_{\text{кф}} = -2nD_a(3T^2+3Tm+m^2-n)g^{-2}(T^2+Tm+n)^{-3} > 0,$$

чему соответствует ограничение в области $T \geq 0$, $N > 0$ (второй корень квадратного уравнения всегда отрицателен, поэтому не рассматривается)

$$T > \left(-3m + \sqrt{12n - 9m^2}\right) \frac{1}{6} = T'. \quad (19)$$

По аналогии с уравнением (16) могут быть получены уравнения изолиний одинакового СКО $\sigma_{\text{кф}}$ ошибки КФ и в случае белого шума

$$N = \sqrt{\frac{1}{T} \left(\sigma_{\text{кф}}^2 - \frac{nD_a}{g^2(T^2+Tm+n)} \right)}. \quad (20)$$

На рис. 1, б схематично отображены выражения (18)—(20) для общего случая. Точки E_1 , E_2 и A_1 , A_2 соответствуют случаю неустойчивости нуля на рис. 1, а. Точки Z_1 и Z_2 находятся на одной отметке белого шума N , при этом Z_1 лежит в зоне $T < T'$, что означает локальный максимум, поэтому в качестве решения выбирается Z_2 . Для значений белого шума N выше точки C отсутствуют экстремумы дисперсии $D_{\text{кф}}$.

Таким образом, по пересечению линий оптимума и изолиний с заданным СКО ошибки КФ на графиках определяются максимально допустимые значения неустойчивости нуля и белого шума, на основании которых выбирается гироскоп. Далее, по построенным графикам и

параметрам выбранного гироскопа находятся оптимальные постоянные времени T для белого шума $T_{бш}$ и нестабильности нуля $T_{нн}$. По вариации Аллана гироскопа из двух $T_{бш}$ и $T_{нн}$ выбирается та оптимальная постоянная времени, которой соответствует преобладающий характер дрейфа на времени усреднения, равном самой постоянной времени.

Силовая гироскопическая вертикаль. Предлагаемый метод может быть применен при синтезе контура коррекции силовой гировертикали ввиду того, что математически динамика силовой гировертикали [18] по оси прецессии совпадает с уравнением КФ.

На рис. 2 показана силовая гировертикаль (контур стабилизации условно не показан) на подвижном объекте. Здесь обозначено: Z — поперечная ось подвижного объекта; Z'_g — проекция поперечной оси объекта на плоскость местного горизонта; $Z_{гy}$ — ось подвеса гиросузла; $Y_{нр}$ — нормаль к плоскости наружной рамки; \mathbf{H} — вектор кинетического момента гиросузла; Y — нормальная ось подвижного объекта; Y_g — местная вертикаль; α — угол между осью подвеса гиросузла $Z_{гy}$ и плоскостью горизонта; ДУ — датчик угла; У — усилитель; МК — мотор коррекции; ГУ — гиросузел; НР — наружная рамка.

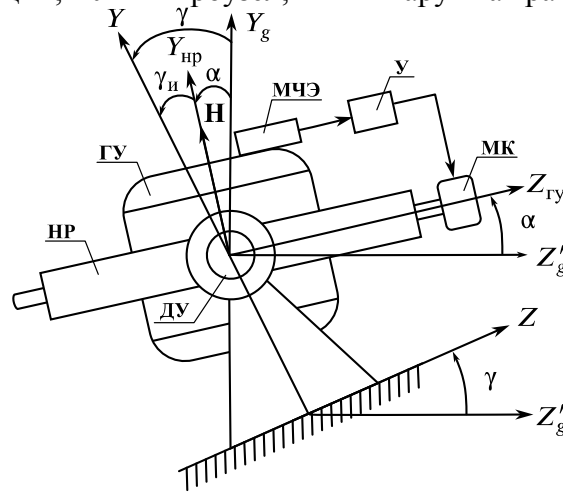


Рис. 2

Рассмотрим прецессионное уравнение относительно оси подвеса гиросузла

$$H\dot{\alpha} + K(\alpha + \Delta\gamma_m) + M_{др} = 0,$$

где K — крутизна контура коррекции (общий коэффициент передачи датчика угла, усилителя и мотора коррекции); $M_{др}$ — возмущающий момент по оси подвеса гиросузла (момент дрейфа). Измеряемый угол крена $\gamma_{и}$ в данном случае с учетом $T = H/K$, $\omega_{др} = M_{др}/H$ выражается как

$$\gamma_{и} = \gamma - \alpha = \gamma + \frac{\Delta\gamma_m}{Tp+1} + \frac{T\omega_{др}}{Tp+1}. \quad (21)$$

Выражение (21) для силовой гировертикали соответствует выражению (4) для КФ.

Пример. В качестве примера рассмотрим расчет КФ для аналитической микромеханической гировертикали (в виде блока акселерометров и ДУС) с маятниковой коррекцией на подвижном основании. Предполагается, что при эксплуатации спектральную плотность поперечных горизонтальных ускорений можно аппроксимировать по выражению (6) с параметрами $\sqrt{D_a} = 0,51 \text{ м/с}^2$, $\mu = 3 \text{ рад/с}$, $\varpi = 1 \text{ рад/с}$

$$S_a(\omega) = \frac{0,0316\omega^2}{10^{-2}\omega^4 + 0,16\omega^2 + 1}. \quad (22)$$

Спектральная плотность мощности по выражению (22) показана на рис. 3, где f — частота. Необходимо определить требуемую точность ДУС и синтезировать КФ для определения угла крена с точностью не менее $\sigma_{\text{кф}} = 0,1^\circ$.

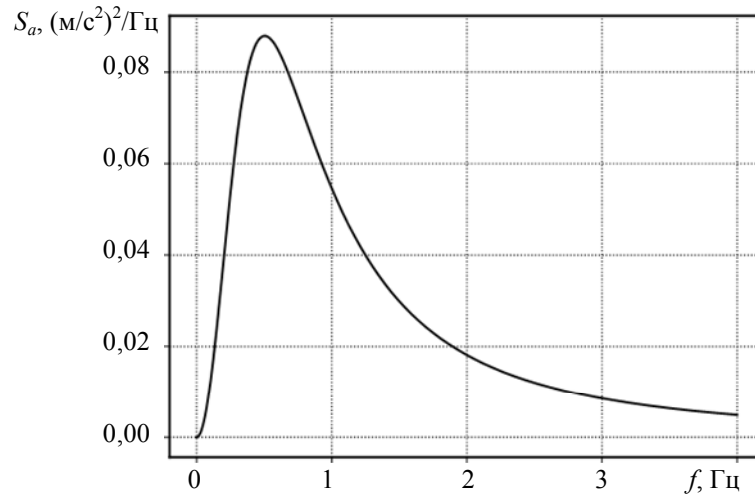


Рис. 3

Сначала условимся, что по вариации Аллана наибольший вклад в дрейф ДУС, среди которых производится выбор, вносит белый шум. Отообразим на рис. 4, а выражения (18)—(20), сплошные кривые — линии оптимума, пунктир — изолинии СКО ошибки КФ. Оптимальная кривая (18) и изолиния (20) для $\sigma_{\text{кф}} = 0,1^\circ$ пересекаются в точке $T = 16$ с, $N = 1,2^\circ / \sqrt{\text{ч}}$.

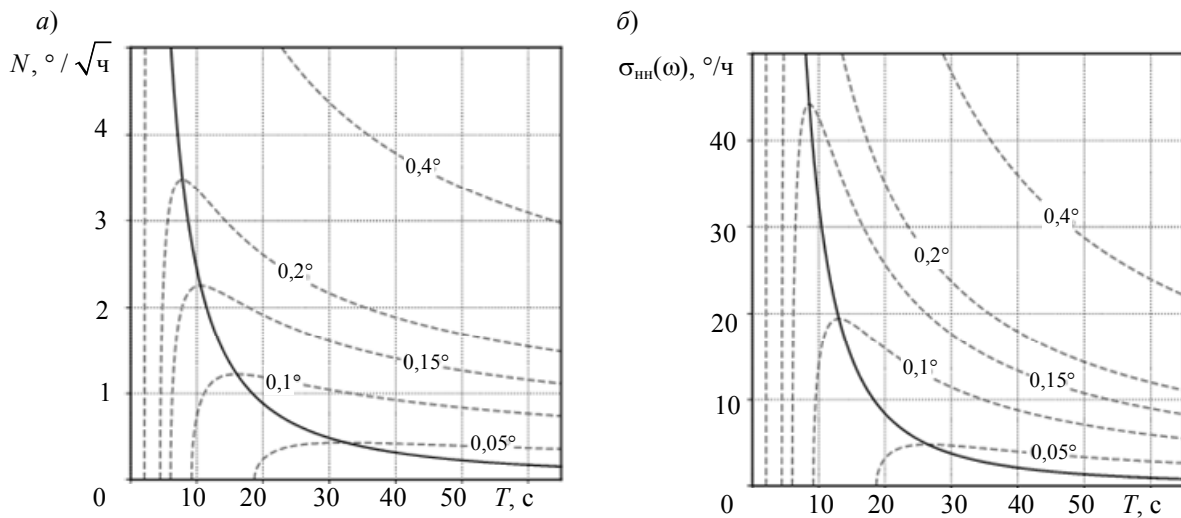


Рис. 4

При синтезе КФ путем преобразования фильтра Винера или Калмана первого порядка можно воспользоваться формулой [8]:

$$T = V_{\text{RW}} / gN, \tag{23}$$

где V_{RW} — случайное блуждание скорости акселерометра (velocity random walk). Аппроксимация ошибок МЧЭ $\Delta\gamma_{\text{м}}$ белым шумом в большинстве случаев дает либо заниженную оценку (в предположении, что белый шум ошибки МЧЭ равен белому шуму самого датчика), либо завышенную, если определять белый шум от максимальной ошибки МЧЭ по наихудшему сценарию. Так, если в качестве ошибки МЧЭ — при том же значении белого шума гироскопа $N = 1,2^\circ / \sqrt{\text{ч}}$ — принять белый шум самого микромеханического датчика равным $V_{\text{RW}} = 10^{-3}$ (м/с)/ $\sqrt{\text{ч}}$, то постоянная времени $T = 0,005$ с по формуле (23) получится слишком

маленькой для компенсации колебаний основания ($\sigma_{\text{кф}} = 2,95^\circ$). Если, например, по наихудшему сценарию предположить ошибку МЧЭ в виде белого шума с параметром V_{RW} , соответствующим спектральной плотности $A(\omega)$ белого шума, ограниченного на полосе частот динамики подвижного объекта $f_1 = \omega_1 / 2\pi = 3$ Гц (см. рис. 3), со СКО, равным дисперсии D_a по выражению (22):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} A(\omega) d\omega = \int_{-f_1}^{f_1} A(f) df = 2A(f)f_1 = D_a, \quad (24)$$

то спектральная плотность белого шума определится по выражению (24) $A(f) = D_a / 2f_1 = 4,14 \cdot 10^{-2} (\text{м/с}^2)^2 / \text{Гц}$. Это соответствует случайному блужданию скорости $V_{\text{RW}} = \sqrt{A(f)} = 12,2 (\text{м/с}) / \sqrt{\text{ч}}$ (перевод единиц измерения спектральной плотности белого шума „ $(\text{м/с}^2)^2 / \text{Гц}$ “ в случайное блуждание скорости „ $(\text{м/с}) / \sqrt{\text{ч}}$ “ приведен в стандарте [19]). Тогда по формуле (23) постоянная времени $T = 59$ с получается завышенной ($\sigma_{\text{кф}} = 0,154^\circ$).

Заметим, что требование по значению белого шума не более $N = 1,2^\circ / \sqrt{\text{ч}}$ выполняется даже для бюджетных микромеханических гироскопов. Тогда проверим выбор в предположении, что основной вклад в дрейф вносит нестабильность нуля. Отобразим уравнения (14) и (16) на рис. 4, б. Максимально допустимое значение нестабильности нуля $\sigma_{\text{нн}}(\omega) = 19,4^\circ / \text{ч}$ для заданной погрешности $\sigma_{\text{кф}} = 0,1^\circ$ при постоянной времени $T = 13$ с уже накладывает более существенное ограничение на точность ДУС.

Заключение. В статье предложен графоаналитический метод оптимального синтеза контура коррекции гировертикали в виде комплементарного фильтра. В качестве критерия оптимальности использовалась дисперсия ошибки комплементарного фильтра. Условия минимума дисперсии ошибки представлены уравнениями линий оптимума, которые совместно с изолиниями дисперсии ошибки позволяют выбрать гироскоп по максимально допустимому значению белого шума и нестабильности нуля.

Предложенный метод синтеза рассмотрен на примере построения аналитической микромеханической гировертикали. Показано, что представление ошибки маятниковочувствительного элемента в виде белого шума зачастую дает неоптимальное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mahony R., Hamel T., Pflimlin J.-M. Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group // IEEE Trans. on Automatic Control. 2008. Vol. 53, N 5. P. 1203—1218. DOI: 10.1109/TAC.2008.923738.
2. Valenti R. G., Dryanovski I., Xiao J. Keeping a good attitude: a quaternion-based orientation filter for IMUs and MARGs // Sensors. 2015. Vol. 15, N 8. P. 19302—19330. DOI: 10.3390/s150819302.
3. Kang D., Jang C., Park F. C. Unscented Kalman filtering for simultaneous estimation of attitude and gyroscope bias // IEEE/ASME Trans. on Mechatronics. 2019. Vol. 24, N 1. P. 350—360. DOI: 10.1109/TMECH.2019.2891776.
4. Sabatini A.M. Kalman-filter-based orientation determination using inertial/magnetic Sensors: Observability Analysis and Performance Evaluation // Sensors. 2011. Vol. 11, N 10. P. 9182—9206. DOI: 10.3390/s111009182.
5. Ассад А., Халиф В., Шуаиб И. Новый адаптивный нечеткий обобщенный фильтр Калмана для оценивания ориентации при отсутствии GPS-сигналов // Гироскопия и навигация. 2019. Т. 27, № 2(105). С. 3—27. DOI: 10.17285/0869-7035.2019.27.2.003-027.
6. Madgwick S. O. H., Harrison A. J. L., Vaidyanathan R. Estimation of IMU and MARG orientation using a gradient descent algorithm // IEEE Intern. Conf. on Rehabilitation Robotics. Switzerland, Zurich, 2011. P. 1—7. DOI: 10.1109/ICORR.2011.5975346.

7. Brown R. G., Hwang P. Y. C. Introduction to random signals and applied Kalman filtering. John Wiley & Sons, 1997.
8. Матвеев В. В. Анализ комплементарных фильтров при построении бескарданной гировертикали // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2019. № 8. С. 153—164.
9. Yoo T. S., Hong S. K., Yoon H. M., Park S. Gain-scheduled complementary filter design for a MEMS based attitude and heading reference system // Sensors. 2011. Vol. 11 4. P. 3816—3830. DOI: 10.3390/s110403816.
10. Качанов Б. О., Гришин Д. В., Ахмедова С. К. и др. Адаптация маятниковой коррекции бесплатформенной гировертикали летательного аппарата к условиям полета // Гироскопия и навигация. 2016. Т. 24, № 4(95). С. 25—34. DOI: 10.17285/0869-7035.2016.24.4.025-034.
11. Poddar S., Narkhede P., Kumar V. et al. PSO Aided Adaptive Complementary Filter for Attitude Estimation // J. Intel. Robot. Syst. 2017. Vol. 87. P. 531—543. DOI: 10.1007/s10846-017-0507-8.
12. Ривкин С. С. Статистический синтез гироскопических устройств. Л.: Судостроение, 1970. 422 с.
13. Аль-Мансур А., Шуаиб И., Джафар А., Потанов А. А. Аналитический алгоритм оценки пространственного положения и курса объекта // Гироскопия и навигация. 2019. Т. 27, № 1(104). С. 72—92. DOI 10.17285/0869-7035.2019.27.1.072-092.
14. Пат. 2253091 РФ. Способ коррекции аналитических гировертикалей усеченного состава / А. М. Боронахин, В. И. Гупалов, А. В. Мочалов. Заявл. 30.12.2002; опубл. 27.05.2005. Бюл. № 15.
15. Пат. 2719241 РФ. Гироскопический маятник / С. В. Кривошеев, К. О. Лукин. Заявл. 13.06.2019; опубл. 17.04.2020. Бюл. № 11.
16. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1966. 992 с.
17. IEEE Std 952-2020. IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros. DOI: 10.1109/IEEESTD.2021.9353434
18. Бесекерский В. А., Фабрикант Е. А. Динамический синтез систем гироскопической стабилизации. Л.: Судостроение, 1968. 351 с.
19. IEEE Std 1293-2018. IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Linear Single-Axis, Nongyroscopic Accelerometers. DOI: 10.1109/IEEESTD.2019.8653544.

Сведения об авторах

- Кирилл Олегович Лукин** — аспирант; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ, кафедра автоматики и управления; E-mail: Kirill.O.Lukin@yandex.ru
- Сергей Валентинович Кривошеев** — канд. техн. наук, доцент; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ, кафедра автоматики и управления; E-mail: ksv-ap2-au-kai@mail.ru

Поступила в редакцию 28.02.2023; одобрена после рецензирования 28.03.2023; принята к публикации 22.06.2023.

REFERENCES

1. Mahony R., Hamel T., Pflimlin J.-M. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2008, no. 5(53), pp. 1203–1218, DOI: 10.1109/TAC.2008.923738.
2. Valenti R.G., Dryanovski I., Xiao J. *Sensors*, 2015, no. 8(15), pp. 19302–19330, DOI: 10.3390/s150819302.
3. Kang D., Jang C., Park F.C. *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, 2019, no. 1(24), pp. 350–360, DOI: 10.1109/TMECH.2019.2891776.
4. Sabatini A.M. *Sensors*, 2011, no. 10(11), pp. 9182–9206, DOI: 10.3390/s111009182.
5. Ammar A., Khalaf W., Chouaib I. *Gyroscope and Navigation*, 2019, no. 3(10), pp. 131–146.
6. Madgwick S.O.H., Harrison A.J.L., Vaidyanathan R. *IEEE Intern. Conf. on Rehabilitation Robotics*, Switzerland, Zurich, 2011, pp. 1–7, DOI: 10.1109/ICORR.2011.5975346.
7. Brown R.G., Hwang P.Y.C. *Introduction to random signals and applied Kalman filtering*, John Wiley & Sons, 1997.
8. Matveev V.V. *News of the Tula State University. Technical sciences*, 2019, no. 8, pp. 153–164. (in Russ.)
9. Yoo T.S., Hong S.K., Yoon H.M., Park S. *Sensors*, 2011, no. 4(11), pp. 3816–3830, DOI: 10.3390/s110403816.
10. Kachanov B.O., Grishin D.V., Akhmedova S.K., Tuktarev N.A., Kulabukhov V.S. *Gyroscope and Navigation*, 2016, no. 4(24), pp. 25–34, DOI: 10.17285/0869-7035.2016.24.4.025-034. (in Russ.)
11. Poddar S., Narkhede P., Kumar V. et al. *J. Intel. Robot. Syst.*, 2017, vol. 87, pp. 531–543, DOI: 10.1007/s10846-017-0507-8.

12. Rivkin S.S. *Statisticheskiy sintez giroskopicheskikh ustroystv* (Statistical Synthesis of Gyroscopic Devices), Leningrad, 1970, 422 p. (in Russ.)
13. Al Mansour M., Chouaib I., Jafar A., Potapov A.A. *Gyroscopy and Navigation*, 2019, no. 2(10), pp. 77–89.
14. Patent RU 2253091, *Sposob korrektsii analiticheskikh girovertikaley usechennogo sostava* (A Method for Correcting Analytical Gyro-Verticals with a Truncated Composition), A.M. Boronakhin, V.I. Gupalov, A.V. Mochalov, Priority 30.12.2002, Published 27.05.2005, Bulletin 15. (in Russ.)
15. Patent RU 2719241, *Giroskopicheskiy mayatnik* (Gyroscopic Pendulum), S.V. Krivosheev, K.O. Lukin, Priority 13.06.2019, Published 17.04.2020, Bulletin 11. (in Russ.)
16. Besekersky V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* (Theory of Automatic Control Systems), Moscow, 1966, 992 p. (in Russ.)
17. *IEEE Std 952-2020. IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros*, 2020, DOI: 10.1109/IEEESTD.2021.9353434.
18. Besekersky V.A., Fabrikant E.A. *Dinamicheskii sintez sistem giroskopicheskoy stabilizatsii* (Dynamic Synthesis of Gyroscopic Stabilization Systems), Leningrad, 1968, 351 p. (in Russ.)
19. *IEEE Std 1293-2018. IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Linear Single-Axis, Nongyroscopic Accelerometers*, 2019, DOI: 10.1109/IEEESTD.2019.8653544.

Data on authors

- Kirill O. Lukin** — Post-Graduate Student; A. N. Tupolev Kazan National Research Technical University, Department of Automation and Control; E-mail: Kirill.O.Lukin@yandex.ru
- Sergey V. Krivosheev** — PhD, Associate Professor; A. N. Tupolev Kazan National Research Technical University, Department of Automation and Control; E-mail: ksv-ap2-au-kai@mail.ru

Received 28.02.2023; approved after reviewing 28.03.2023; accepted for publication 22.06.2023.