

**ВЫБОР ДИСКРЕТНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА
ПРИ РАСЧЕТЕ ЦИФРОВОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ
С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ ЗАТУХАНИЯ СВОБОДНОГО ПРОЦЕССА
ПРИ ЗАДАННОМ ПОРЯДКЕ АСТАТИЗМА**

А. М. Коновалов, А. И. Коршунов*

Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ „Военно-морская академия им. Н. Г. Кузнецова“,
Санкт-Петербург, Россия
*a.i.korshunov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается влияние выбранного дискретного квадратичного показателя качества при расчете цифровой следящей системы на характер ее переходной характеристики. Показано, что при выборе показателя качества в виде суммы квадратов первой разности дискретной переходной характеристики перерегулирование оказывается наименьшим. Доказано необходимое и достаточное условие исключения скрытых колебаний, требующее включать в числитель желаемой передаточной функции „все нули“ числителя дискретной передаточной функции непрерывной части. Установлено, что для повышения качества переходного процесса необходимо уменьшать период дискретизации при сохранении времени переходного процесса.

Ключевые слова: переходная характеристика, дискретный квадратичный показатель качества, конечное время затухания свободного процесса, заданный порядок астатизма

Ссылка для цитирования: Коновалов А. М., Коршунов А. И. Выбор дискретного квадратичного показателя качества при расчете цифровой следящей системы с конечным временем затухания свободного процесса при заданном порядке астатизма // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 3. С. 183—194. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-3-183-194.

**SELECTION OF A DISCRETE QUADRATIC QUALITY INDEX
WHEN CALCULATING A DIGITAL TRACKING SYSTEM WITH A FINITE DECAY TIME
OF A FREE PROCESS AT A GIVEN ASTATISM ORDER**

A. M. Konovalov, A. I. Korshunov *

Naval Polytechnic Institute of Admiral N.G. Kuznetsov Naval Academy,
St. Petersburg, Russia
*a.i.korshunov@mail.ru

Abstract. The influence of the choice of a discrete quadratic quality index in calculation of a digital servo system on the character of its transient response is considered. It is shown that when choosing a quality indicator in the form of the sum of squares of the first difference of the discrete transient response, the overshoot turns out to be the smallest. A necessary and sufficient condition for eliminating hidden oscillations is proved, which requires that “all zeros” of the numerator of the discrete transfer function of the continuous part be included in the numerator of the desired transfer function. It is established that in order to improve the quality of the transient process, it is necessary to reduce the sampling period while maintaining the time of the transient process.

Keywords: transient characteristic, discrete quadratic quality index, final time of free process attenuation, preset order of astatism

For citation: Konovalov A. M., Korshunov A. I. Selection of a discrete quadratic quality index when calculating a digital tracking system with a finite decay time of a free process at a given astatism order. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 3. P. 183—194 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-3-183-194.

Введение. Цифровые следящие системы — одни из важнейших функциональных элементов автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП) как в производственной, так и в оборонной области. Функциональная задача ЦСС — преобразование управляющего воздействия на технологический объект, определяемого вычислительным

комплексом АСУ в цифровой форме, в соответствующее механическое воздействие в реальном масштабе времени. Назначение ЦСС определяет основные требования к ней — высокое быстродействие и точность воспроизведения. Современный уровень развития вычислительной техники позволяет рассматривать ЦСС как импульсные системы, пренебрегая квантованием сигналов по уровню. Это позволяет использовать известное свойство линейных стационарных импульсных систем — возможность полного затухания свободного процесса за конечное время, обеспечивающее наибольшее быстродействие импульсной системы управления.

Возможность получения в линейной стационарной импульсной системе конечного времени полного затухания свободного процесса известно давно [1—4 и др.]. Такие процессы в линейных импульсных системах назывались в отечественной литературе процессами конечной длительности, а в переводной — аperiodическими процессами, что, очевидно, менее удачно отражает их основную особенность.

В доступных публикациях последнего времени не содержится исследований, посвященных развитию методики синтеза цифровых автоматических систем с конечным временем затухания свободного процесса. Более того, встречаются публикации высокого уровня, например [5] — учебник для вузов („Допущено учебно-методическим объединением вузов России по образованию в области энергетики и электротехники в качестве учебника“), содержащий ошибочные рекомендации по синтезу электроприводов постоянного тока с конечным временем переходного процесса. Выполнение указанных рекомендаций приводит к длительному затуханию колебаний выходной величины внутри периодов дискретизации уже после окончания дискретного переходного процесса, называемых „скрытыми колебаниями“. Это определило необходимость исправления указанных ошибок и дальнейшего развития методики синтеза систем данного класса, чему посвящены, например, работы [6—11]. Напомним основные положения данных работ.

Так, статья [6] посвящена исправлению указанных ошибок. В работе [7] показана возможность с помощью линейного дискретного корректирующего устройства получить конечное время полного затухания свободного процесса в линеаризованной модели ЦСС, представленной на рис. 1; это время не превышает целого числа периодов дискретизации, равного порядку непрерывной части (НЧ) ЦСС. На рис. 1: ИИЭ — идеальный импульсный элемент с периодом дискретизации T , ДКУ — дискретное корректирующее устройство, ФНП — фиксатор нулевого порядка.

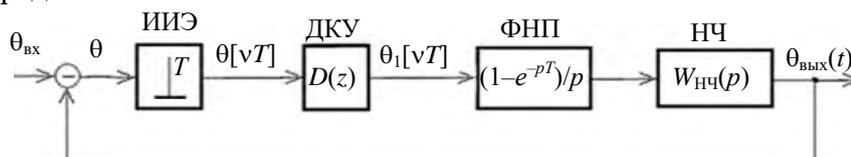


Рис. 1

В работе [7] показано, что управляемость и наблюдаемость дискретной модели непрерывной части системы — достаточные условия реализации затухания свободного процесса за конечное время. Предложена методика выбора простейшей передаточной функции $D(z)$ дискретного корректирующего устройства.

В работе [8] рассмотрен расчет ЦСС с минимальным конечным временем затухания свободного процесса при заданном требовании к ее точности:

$$\theta_k \leq \theta_{k \text{ доп}} \text{ при } \Omega \leq \Omega_{\text{доп}}, \quad (1)$$

где θ_k — скоростная ошибка, $\theta_{k \text{ доп}}$ — ее допустимая величина, $\Omega_{\text{доп}}$ — допустимая скорость слежения при передаточной функции непрерывной части, типовой для электромеханических ЦСС:

$$W_{\text{НЧ}}(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1) \dots (T_{n-1} p + 1)}, \quad n \leq 5, \quad (2)$$

где K — коэффициент преобразования, T_1, \dots, T_{n-1} — постоянные времени исполнительного двигателя, усилителя мощности и других элементов НЧ.

Установлена пропорциональность скоростной ошибки периоду дискретизации T , что при выборе T по требованию точности может вызвать завышение частоты дискретизации и сужение линейной зоны системы.

Во второй части [9] указанной работы предложен метод расчета ДКУ, обеспечивающий конечное время полного затухания свободного процесса, превышающее минимальное, при сохранении скоростной ошибки как при минимальном времени полного затухания свободного процесса. В работе [10] предложена методика расчета ДКУ, обеспечивающая не только конечное время полного затухания свободного процесса, но и необходимый порядок астатизма ЦСС (второй или третий). Учету времени чистого запаздывания в прямой цепи при расчете дискретной коррекции ЦСС с минимальным временем полного затухания свободного процесса посвящена работа [11].

Постановка задачи. Будем полагать, что в процессе решения задачи вычисления задающего воздействия ЦСС шумы и помехи, содержащиеся в исходных данных, эффективно подавляются и сглаживаются. Это позволяет считать вычисленные задающие воздействия ЦСС детерминированными и обеспечивать заданную динамическую точность ЦСС в линейной зоне посредством выбора необходимого порядка астатизма при конечном времени затухания свободного процесса.

В линейной зоне можно получить практически любое время полного затухания свободного процесса, выбрав необходимый период дискретизации (шаг квантования по времени T). Ограничено его уменьшение только сужением линейной зоны ЦСС [8].

Как известно [1—4, 8, 10], линеаризованная модель ЦСС, представленная на рис. 1, имеет конечное время затухания свободного процесса при передаточной функции замкнутой системы

$$\Phi_{\text{ЦСС}}(z) = \frac{G_{m-1}(z)}{z^m}, \quad W_{\text{ЦСС}}(z) = \frac{\Phi_{\text{ЦСС}}(z)}{1 - \Phi_{\text{ЦСС}}(z)} = \frac{G_{m-1}(z)}{z^m - G_{m-1}(z)}, \quad (3)$$

где m — число периодов полного затухания свободного процесса, $G_{m-1}(z) = g_{m-1}z^{m-1} + \dots + g_1z + g_0$, $W_{\text{ЦСС}}(z)$ — передаточная функция разомкнутой системы.

Задание порядка астатизма r (1, 2, 3) накладывает на коэффициенты полинома числителя $\Phi(z)$ r условий [10]:

$$1 - G_{m-1}(1) = 1 - g_{m-1} - g_{m-2} - \dots - g_1 - g_0 = 0; \quad (4)$$

$$m - dG_{m-1}(z)/dz(1) = m - (m-1)g_{m-1} - (m-2)g_{m-2} - \dots - g_1 = 0, \quad (5)$$

$$m(m-1) - d^2G_{m-1}(z)/dz^2(1) = m(m-1) - (m-1)(m-2)g_{m-1} - \dots - 3 \cdot 2g_3 - 2g_2 = 0. \quad (6)$$

Выполнение условия (4) обеспечивает $r=1$, выполнение условий (4) и (5) — $r=2$, а выполнение условий (4), (5) и (6) — $r=3$.

В работе [10] показано, что при малых значениях m качество управления ЦСС в переходных режимах, определяемое величиной перерегулирования σ , оказывается неудовлетворительным. Вследствие этого приходится увеличивать число периодов полного затухания свободного процесса сверх минимального, равного порядку непрерывной части. Возникает задача выбора коэффициентов полинома $G_{m-1}(z)$, обеспечивающих наилучшее качество управления ЦСС в переходном режиме. Продолжим и далее оценивать его значением перерегулирования, определяемым по переходной характеристике системы $h(t)$: $\sigma = \max\{h(t) - 1\}$. Характер $h(t)$, а следовательно, и значение σ зависит от выбранных коэффициентов $G_{m-1}(z)$ и от свойств НЧ, определяемых ее передаточной функцией (2). Зависимость эта весьма сложна и делает невозможным аналитическое решение задачи определения коэффициентов $G_{m-1}(z)$, при

которых достигается $\min\{\sigma\}$. Задача упрощается, если частота дискретизации $2\pi/T$ настолько выше полосы пропускания НЧ, что практически $\sigma = \max\{h(t) - 1\} \approx \max\{h[nT] - 1\}$. Это позволяет оценивать с достаточной точностью качество переходных процессов по значениям $h[nT]$. Заметим, что полоса пропускания НЧ зависит не только от инерционности ее элементов, определяемой их постоянными времени, но и от ее коэффициента преобразования K (2). Практическая невозможность получения зависимости $\max\{h[nT] - 1\}$ от коэффициентов $g_i, i = 0, 1, \dots, m-1$, числителя передаточной функции ЦСС (3) заставляет при аналитическом решении задачи выбора коэффициентов полинома $G_{m-1}(z)$ использовать косвенный показатель качества. В работе [10] предложен квадратичный косвенный показатель качества переходного процесса:

$$\min V_1(g_0, g_1, \dots, g_{m-1}), \quad V_1 = \sum_{i=0}^{m-1} g_i^2. \quad (7)$$

Обоснованием его выбора, кроме простоты аналитического решения задачи, служат интуитивные соображения, основанные на полученном в работе [7] выражении дискретной переходной характеристики ЦСС:

$$h[vT] = Z^{-1} \left\{ \Phi_{\text{ЦСС}}(z) \cdot \frac{z}{z-1} \right\} = \begin{cases} 0, & v = 0; \\ \sum_{i=1}^v g_{m-i}, & v = 1, 2, \dots, m-1; \\ 1, & v \geq m, \end{cases}$$

согласно которому $g_i = \Delta h_i = h[iT] - h[(i-1)T]$, $i = 1, 2, \dots, m$, — первая разность переходной характеристики ЦСС.

Не менее обоснованным представляется также использование в показателе качества квадратичных функций:

$$V_2 = \sum_{i=0}^m \theta_i^2, \quad \theta_i = 1 - h[iT] = 1 - \sum_{k=1}^i g_{m-k}, \quad g_m = 0; \quad (8)$$

$$V_3 = \sum_{i=0}^m h^2[iT], \quad h[iT] = \sum_{k=1}^i g_{m-k}, \quad g_m = 0; \quad (9)$$

$$V_4 = \sum_{i=0}^m (g_{m-i} - g_{m-i-1})^2, \quad g_m = 0, \quad g_{-1} = 0. \quad (10)$$

При выборе порядка астатизма $r \geq 2$ задание V_2 или V_3 приводит к одинаковому результату, поскольку $V_2 = V_3 - (m+1)$ (см. Приложение 1).

Представляет значительный практический интерес выбор наилучшей из трех предложенных квадратичных функций: V_1 , V_2 (или V_3) и V_4 . Очевидна и необходимость исследования влияния на характер переходных процессов выбранного времени полного затухания свободной составляющей и периода дискретизации. Все эти вопросы — предмет исследования в настоящей статье.

Необходимость выбора коэффициентов числителя передаточной функции ЦСС с учетом ее непрерывной части. В реальных условиях выбор коэффициентов g_i числителя передаточной функции $\Phi(z)$ (3) ограничен требованием заданного порядка астатизма r и передаточной функцией непрерывной части $W_{\text{НЧ}}(p)$. Ее дискретная передаточная функция в случае использования фиксатора нулевого порядка (ФНП на рис. 1) определяется выражением [8—10]

$$W_{\text{НЧ}}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_{\text{НЧ}}(p)}{p} \right\} = \frac{R_{n-1}(z)}{(z-1)Q_{n-1}(z)}, \quad (11)$$

где индекс „ $n-1$ “ обозначает степень соответствующего полинома, Z — символ обобщенного Z -преобразования, подразумевающий выполнение обратного преобразования Лапласа, дискретизацию результата и его обычное Z -преобразование [12, 13]; $Q_{n-1}(z) = (z-d_1)\dots(z-d_{n-1})$, $d_k = \exp(p_{k+1}T)$; $p_1 = 0$, p_k , $k = 2, \dots, n$, — полюсы $W_{\text{НЧ}}(p)$; $R_{n-1}(z) = \beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0$.

Числитель $\Phi(z)$ необходимо определять в виде

$$G_{m-1}(z) = F_{m-n}(z)R_{n-1}(z) = g_{m-1}z^{m-1} + g_{m-2}z^{m-2} + \dots + g_1z + g_0, \quad (12)$$

где $F_{m-n}(z) = f_{m-n}z^{m-n} + f_{m-n-1}z^{m-n-1} + \dots + f_1z + f_0$.

Передаточная функция дискретного корректирующего устройства [8—10]

$$D(z) = \frac{W_{\text{ЦСС}}(z)}{W_{\text{НЧ}}(z)} = \frac{G_{m-1}(z)}{z^m - G_{m-1}(z)} \frac{(z-1)Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} = \frac{Q_{m-1}(z)}{S_{m-1}(z)}, \quad (13)$$

где

$$Q_{m-1}(z) = F_{m-n}(z)Q_{n-1}(z) = q_{m-1}z^{m-1} + \dots + q_1z + q_0; \quad (14)$$

$$S_{m-1}(z) = [z^m - G_{m-1}(z)] / (z-1) = z^{m-1} + s_{m-2}z^{m-2} + \dots + s_1z + s_0, \quad (15)$$

$$s_{m-2} = 1 - g_{m-1}, \quad s_{m-3} = s_{m-2} - g_{m-2}, \quad \dots, \quad s_1 = s_2 - g_2, \quad s_0 = s_1 - g_1 = g_0. \quad (16)$$

Заметим, что введение в полином $G_{m-1}(z)$ множителя $R_{n-1}(z)$:

— обеспечивает „грубость“ ЦСС [12];

— упрощает $D(z)$ — передаточную функцию ДКУ [12, 13];

— исключает возможные скрытые колебания, проявляющиеся в колебаниях $h(t)$ при $t > mT$, хотя $h[iT] = 1$ при $i > m$ (m — целое число) [10] (см. Приложение 2).

Выбор дискретного показателя качества переходного процесса. Требуется определить, какой показатель качества обеспечивает наименьшее перерегулирование σ . Для этого необходимо выразить коэффициенты g_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$, полинома $G_{m-1}(z)$ через коэффициенты полиномов сомножителей $F_{m-n}(z)$ и $R_{n-1}(z)$, подставить полученные выражения g_i в выбранный показатель качества $V_i(g_{m-1}, \dots, g_1, g_0)$. Исследование на минимум выбранного показателя качества V_i как функции коэффициентов $V_i = V_i(f_{m-n}, \dots, f_1, f_0)$ полинома $F_{m-n}(z)$ позволяет определить оптимальные значения f_i , $i = 0, 1, \dots, m-n$. Вычислив по выражению (13) передаточную функцию ДКУ $D(z)$, легко на модели получить переходную характеристику ЦСС $h(t)$, необходимую для оценки качества управления в переходном режиме при выбранном V_i , как это сделано в работе [10]. Сравнивая $h(t)$, соответствующие различным V_i , можно выбрать показатель качества, наилучший по получаемому перерегулированию.

Исследование на экстремум выбранного показателя качества V_i при заданных условиях (4), (5) или (4)—(6), обеспечивающих заданный порядок астатизма r , соответственно $r=2$ или $r=3$, целесообразно выполнять, вводя множители Лагранжа λ_1, λ_2 при $r=2$ или $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ при $r=3$ [10]. При этом задача сводится к исследованию на условный экстремум функции

$$U = V_i(f) + \sum_{k=1}^r \lambda_k \varphi_k(f), \quad (17)$$

где $f^T = [f_{m-n}, \dots, f_1, f_0]$ — вектор-строка; $\varphi_k(f)$, $k = \overline{1, 3}$, — функции вектора f , получаемые при подстановке в k -е условие коэффициентов g_i , $i = \overline{0, m-1}$, выраженных через искомые коэффициенты f_i , $i = \overline{0, m-n}$, и коэффициенты β_i , $i = \overline{0, n-1}$, числителя $W_{\text{НЧ}}(z)$.

Вычислив частные производные $\partial U / \partial f_i$, $i = \overline{0, m-n}$, и приравняв их к нулю, получим $m-n+1$ линейных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial f_i} = \frac{\partial V(f)}{\partial f_i} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\varphi_k(f)}{\partial f_i}. \quad (18)$$

Совместно с условиями, обеспечивающими заданный порядок астатизма r ($r=2$ или $r=3$),

$$\varphi_k(f) = c_k, \quad k = \overline{1, r}, \quad c_1 = 1 / \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i, \quad c_2 = m, \quad c_3 = m(m-1) \quad (19)$$

получается система $m-n+1+r$ линейных уравнений, необходимых для вычисления $m-n+1$ значений f_i и r множителей Лагранжа λ_k .

Систему линейных уравнений (18) и (19) можно записать в векторно-матричном виде:

$$AX=B, \quad (20)$$

где $X^T = [f^T, \lambda^T]$, $\lambda^T = [\lambda_1, \lambda_2]$ при $r=2$, $\lambda^T = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ при $r=3$.

Матрица A и вектор B зависят от выбора квадратичной функции $V_i(7)$ —(10).

Пример. Продолжим рассмотрение ЦСС из работы [10]:

$$m=5, \quad n=2, \quad r=2, \quad W_{\text{НЧ}}(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)}, \quad W_{\text{НЧ}}(z) = \frac{\beta_1 z + \beta_0}{(z-1)(z-d_1)}, \quad \beta_1 = K[T - T_1(1-d_1)],$$

$$\beta_0 = K[T_1(1-d_1) - T d_1], \quad K = 10 \text{ с}^{-1}, \quad T_1 = T = 0,1 \text{ с}, \quad KT = 1, \quad d_1 = \exp(-1), \quad \beta_1 = d_1, \quad \beta_0 = 1 - 2\beta_1.$$

Согласно изложенному выше

$$X^T = [f_3, f_2, f_1, f_0, \lambda_1, \lambda_2];$$

$$g_4 = \beta_1 f_3, \quad g_3 = \beta_1 f_2 + \beta_0 f_3, \quad g_2 = \beta_1 f_1 + \beta_0 f_2, \quad g_1 = \beta_1 f_0 + \beta_0 f_1, \quad g_0 = \beta_0 f_0; \quad (21)$$

$$\varphi_1(f) = f_3 + f_2 + f_1 + f_0 = 1 / (\beta_1 + \beta_0), \quad (22)$$

$$\varphi_2(f) = (4\beta_1 + 3\beta_0)f_3 + (3\beta_1 + 2\beta_0)f_2 + (2\beta_1 + \beta_0)f_1 + \beta_1 f_0 = m = 5. \quad (23)$$

При $V = V_2 = \sum_{i=1}^m \theta_i^2$, $\theta_i = 1 - h[iT] = 1 - \sum_{k=1}^{m-i} g_{m-k}$ (8) имеем

$$1 - h(T) = 1 - g_4 = 1 - b_1 f_3, \quad 1 - h(2T) = 1 - g_4 - g_3 = 1 - (b_1 + b_0)f_3 - b_1 f_2;$$

$$1 - h(3T) = 1 - g_4 - g_3 - g_2 = 1 - (b_1 + b_0)(f_3 + f_2) - b_1 f_1;$$

$$1 - h(4T) = 1 - g_4 - g_3 - g_2 - g_1 = 1 - (b_1 + b_0)(f_3 + f_2 + f_1) - b_1 f_0, \quad (24)$$

$$V_2 = (1 - b_1 f_3)^2 + (1 - (b_1 + b_0)f_3 - b_1 f_2)^2 + (1 - (b_1 + b_0)(f_3 + f_2) - b_1 f_1)^2 + \\ + (1 - (b_1 + b_0)(f_3 + f_2 + f_1) - b_1 f_0)^2.$$

Выполнив дифференцирование согласно выражению (18), с учетом формул (22)—(24) получим выражения для матрицы A и вектора B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4\beta_1 + 3\beta_0 & 3\beta_1 + 2\beta_0 & 2\beta_1 + 3\beta_0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ e + 3b & a + 2b & a + b & a & 1 & 4\beta_1 + 3\beta_0 \\ a + 2b & e + 2b & a + b & a & 1 & 3\beta_1 + 2\beta_0 \\ a + b & a + b & e + b & e_0 & 1 & 2\beta_1 + \beta_0 \\ a & a & a & e & 1 & \beta_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/(\beta_1 + \beta_0) \\ 5 \\ 2(4\beta_1 + 3\beta_0) \\ 2(3\beta_1 + 2\beta_0) \\ 2(2\beta_1 + \beta_0) \\ 2\beta_1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где $a = 2\beta_1(\beta_1 + \beta_0)$, $b = 2(\beta_1 + \beta_0)^2$, $e = 2\beta_1^2$.

Заметим для сравнения, что при выборе $V = V_3 = \sum_{i=1}^m h^2[iT]$ (9) получаем такую же матрицу A и вектор B , отличающийся четырьмя нижними элементами, равными нулю.

Решение системы уравнений (20)

$$X = A^{-1}B \quad (26)$$

при замене B на значение, имеющее четыре нижних нулевых элемента, изменяет только значения λ_1 и λ_2 , что несложно доказать. Это, как будет видно из дальнейшего, не приводит к изменению передаточной функции ДКУ $D(z)$, а следовательно, и характера $h(t)$, что и следовало ожидать исходя из доказанного в Приложении 1 равенства $V_3 = V_2 + (m+1)$.

При выборе $V = V_4 = \sum_{i=0}^m (g_{m-i} - g_{m-i-1})^2$, $g_m = 0$, $g_{-1} = 0$ (10) получаем:

$$\begin{aligned} V_4 &= g_4^2 + (g_4 - g_3)^2 + (g_3 - g_2)^2 + (g_2 - g_1)^2 + (g_1 - g_0)^2 + g_0^2 = \\ &= b_1^2 f_3^2 + [(b_1 - b_0)f_3 - b_1 f_2]^2 + [b_0 f_3 + (b_1 - b_0)f_2 - b_1 f_1]^2 + \\ &+ [b_0 f_2 + (b_1 - b_0)f_1 - b_1 f_0]^2 + [b_0 f_1 + (b_1 - b_0)f_0]^2 + b_0^2 f_0^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Выполнив дифференцирование согласно выражению (18), с учетом формул (22)—(24) получим выражения для матрицы A и вектора B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4\beta_1 + 3\beta_0 & 3\beta_1 + 2\beta_0 & 2\beta_1 + 3\beta_0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ a & -e & -b & 0 & 1 & 4\beta_1 + 3\beta_0 \\ -e & a & -e & -b & 1 & 3\beta_1 + 2\beta_0 \\ -b & -e & a & -e & 1 & 2\beta_1 + 3\beta_0 \\ 0 & -b & -e & a & 1 & \beta_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/(\beta_1 + \beta_0) \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

где $a = 2[\beta_1^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2 + \beta_0^2]$, $b = 2\beta_1\beta_0$, $e = 2(\beta_1 - \beta_0)^2$.

Вычислив элементы матрицы A и вектора B (25) и решение (26) системы линейных уравнений (20), получим вектор коэффициентов $f^T = [3,3645, -2,3548, 1,6052, 1,0330]$. Определив по формулам (21) элементы вектора, находим $g^T = [1,2377, 2,2778 \cdot 10^{-2}, -3,1711 \cdot 10^{-2}, 4,4149 \cdot 10^{-2}, -2,7295 \cdot 10^{-1}]$.

Результаты вычислений позволяют определить коэффициенты полиномов передаточной функции дискретного фильтра (13)—(16):

$$D(z) = \frac{q_4 z^4 + q_3 z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0}{s_4 z^4 + s_3 z^3 + s_2 z^2 + s_1 z + s_0}, \quad (29)$$

где $q_4 = f_3 = 3,3645$, $q_3 = f_2 - f_3 d_1 = -3,5925$, $q_2 = f_1 - f_2 d_1 = 2,4714$, $q_1 = f_0 - f_1 d_1 = -1,6235$, $q_0 = -f_0 d_1 = 3,8000 \cdot 10^{-1}$, $s_4 = 1$, $s_3 = s_4 - g_4 = -2,3774 \cdot 10^{-1}$, $s_2 = s_3 - g_3 = -2,6051 \cdot 10^{-1}$, $s_1 = s_2 - g_2 = -2,2880 \cdot 10^{-1}$, $s_0 = s_1 - g_1 = g_0 = -2,7295 \cdot 10^{-1}$.

Произведя аналогичные вычисления для выражений матрицы A и вектора B (28), получаем: $f^T = [1,9661, 2,8654 \cdot 10^{-1}, 5,1779 \cdot 10^{-1}, -1,1885]$, $g^T = [7,2329 \cdot 10^{-1}, 6,2494 \cdot 10^{-1}, 2,6620 \cdot 10^{-1}, -3,0040 \cdot 10^{-1}, -3,1405 \cdot 10^{-1}]$ и вычисляем коэффициенты $D(z)$ (29):

$$q_4=f_3=1,9661, q_3=f_2 - f_3d_1 = -4,3675 \cdot 10^{-1}, q_2=f_1 - f_2d_1 = 4,1238 \cdot 10^{-1}, q_1=f_0 - f_1d_1 = -1,3790,$$

$$q_0 = -f_0d_1 = 4,3722 \cdot 10^{-1}; s_4=1, s_3=s_4-g_4=2,7671 \cdot 10^{-1}, s_2=s_3-g_3=3,4822 \cdot 10^{-1},$$

$$s_1=s_2-g_2 = -6,144 \cdot 10^{-1}, s_0=s_1-g_1=g_0 = -3,1402 \cdot 10^{-1}.$$

Моделирование рассчитанной ЦСС при двух вариантах $D(z)$ произведено по схеме, приведенной на рис. 2.

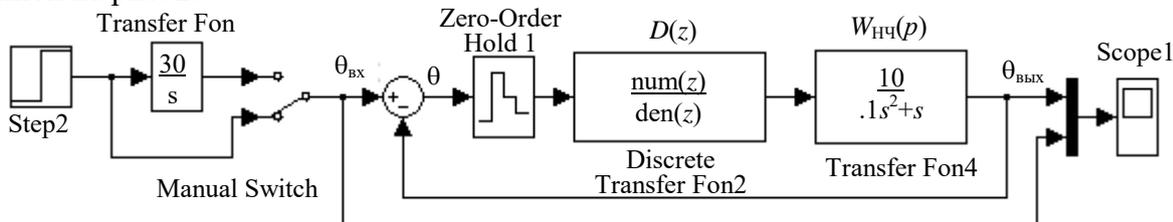


Рис. 2

На рис. 3 представлены переходные характеристики ЦСС $h(t)$ при трех вариантах передаточной функции ДКУ $D(z)$: 1 — при $D(z)$, рассчитанном в работе [10] с использованием показателя качества V_1 (7); 2, 3 — при $D(z)$, рассчитанном выше с использованием показателя V_2 (8) или V_3 (9); 4 — при $D(z)$, рассчитанном с V_4 (10).

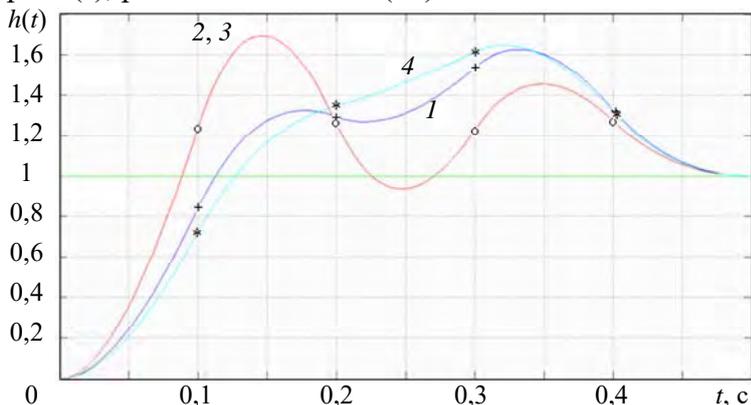


Рис. 3

Аналогичные исследования проведены для той же ЦСС при задании порядка астатизма $r=3$, $m=8$, $T=0,1$ с. Полученные на модели переходные характеристики $h(t)$ представлены на рис. 4, где обозначения кривых 1, 2 и 3, 4 соответствуют принятым для рис. 3.

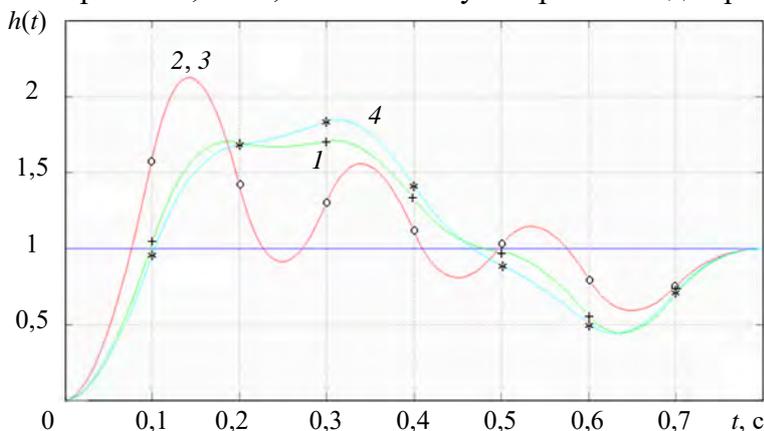


Рис. 4

Анализ полученных результатов показал существенное влияние выбранного дискретного квадратичного показателя качества при расчете ЦСС на характер ее переходной характеристики и снижение качества переходного процесса при повышении порядка астатизма.

Оптимальное качество переходного процесса, оцениваемое величиной перерегулирования σ , дает показатель, представляющий сумму квадратов первой разности дискретной переходной характеристики $h[nT]$. Кроме того, сравнение матриц A (25) и (28) системы уравнений (20) с аналогичной, полученной для этого показателя в работе [10] и приведенной ниже матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4\beta_1 + 3\beta_0 & 3\beta_1 + 2\beta_0 & 2\beta_1 + 3\beta_0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 2(k\beta_1^2 + \beta_0^2) & 2\beta_1\beta_0 & 0 & 0 & 1 & 4\beta_1 + 3\beta_0 \\ 2\beta_1\beta_0 & 2(\beta_1^2 + \beta_0^2) & 2\beta_1\beta_0 & 0 & 1 & 3\beta_1 + 2\beta_0 \\ 0 & 2\beta_1\beta_0 & 2(\beta_1^2 + \beta_0^2) & 2\beta_1\beta_0 & 1 & 2\beta_1 + 3\beta_0 \\ 0 & 0 & 2\beta_1\beta_0 & 2(\beta_1^2 + \beta_0^2) & 1 & \beta_1 \end{bmatrix},$$

показывает ее наименьшую сложность, оцениваемую числом нулевых элементов.

Влияние выбранного периода дискретизации на качество переходного процесса.

Несколько необычный для непрерывных систем характер переходной характеристики цифровой следящей системы с конечным временем затухания свободного процесса, близким к минимальному, при одновременном обеспечении заданного порядка астатизма объясняется негативным проявлением дискретного характера управления. Однако именно дискретный характер управления позволяет получить полное затухание свободной составляющей непрерывной управляемой величины за конечное время. Для ослабления негативного проявления дискретного характера управления следует ужесточать выполнение условий теоремы Котельникова, т.е. повышать частоту дискретизации (уменьшать период дискретизации T) и снижать полосу пропускания непрерывной части системы.

Простое уменьшение периода дискретизации T при одновременном расширении полосы пропускания может не дать желаемого результата. Например, если в рассмотренной системе значение T уменьшить с 0,1 до 0,03 с при сохранении числа периодов дискретизации $m=5$, то время переходного процесса уменьшится до $mT=5 \cdot 0,03=0,15$ с, т.е. в $0,5/0,15=3,33$ раза. При этом форма $h(t)$ практически сохраняется (кривая 2 на рис. 5). Исходная переходная характеристика — кривая 1 на рис. 5 та же, что и кривая 1 на рис. 3. Практически она сжимается по оси времени также в 3,33 раза. Объясняется это увеличением коэффициента преобразования ДКУ — $|D(0)|$, рассчитанного для нового значения T , примерно в 14 раз, что расширяет полосу пропускания.

Совершенно другой результат дает уменьшение T при сохранении неизменного времени переходного процесса, т.е. при соответствующем увеличении числа тактов m за время затухания свободного процесса. Так, в системе, рассчитанной для $T=0,05$ с, $m=10$, получена переходная характеристика (кривая 3 на рис. 5), имеющая перерегулирование на 20 % меньшее, чем в исходной системе (кривая 1).

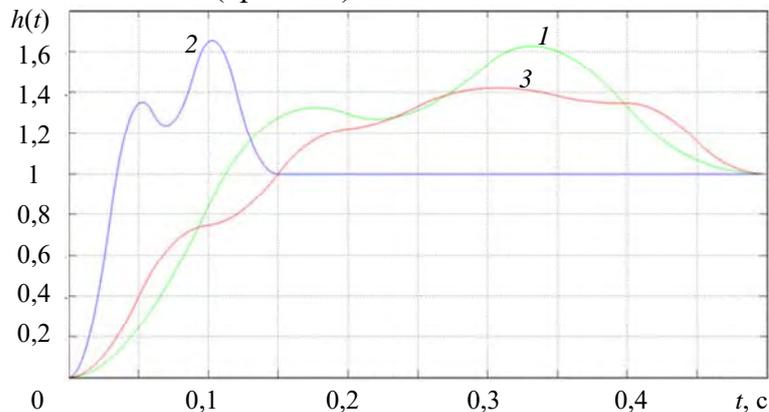


Рис. 5

Выводы

1. Выбор дискретного квадратичного показателя качества при расчете ДКУ существенно влияет на характер переходной характеристики ЦСС.
2. При показателе качества, представляющем сумму квадратов первой разности дискретной переходной характеристики, перерегулирование оказывается наименьшим.
3. Доказано, что для исключения скрытых колебаний в числитель желаемой передаточной функции необходимо и достаточно включать „все нули“ числителя дискретной передаточной функции непрерывной части.
4. Для повышения качества переходного процесса необходимо уменьшать период дискретизации при сохранении времени переходного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963. 968 с.
2. Джурю Э. Импульсные системы автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1963. 567 с.
3. Изерман Р. Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984. 541 с.
4. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986. 447 с.
5. Анучин А. С. Системы управления электроприводов. М.: МЭИ, 2015. 372 с.
6. Коршунов А. И. Расчет цифровых систем управления электроприводами с конечным временем затухания свободных процессов // Электротехника. 2020. № 12. С. 50—54.
7. Коршунов А. И. Цифровая следящая система с конечным временем затухания свободного процесса // Изв. вузов. Приборостроение. 2019. Т. 62, № 12. С. 1078—1086.
8. Коновалов А. М., Коршунов А. И. Расчет цифровой следящей системы с конечным временем затухания свободного процесса. Ч. I. Минимальное время переходного процесса // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 9. С. 786—793.
9. Коновалов А. М., Коршунов А. И. Расчет цифровой следящей системы с конечным временем затухания свободного процесса. Ч. II. Время переходного процесса, большее минимального // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 9. С. 794—802.
10. Коновалов А. М., Коршунов А. И. Цифровая следящая система с конечным временем затухания свободного процесса и заданным порядком астатизма // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 10. С. 888—896.
11. Коновалов А. М., Коршунов А. И. Учет времени чистого запаздывания в прямой цепи при расчете дискретной коррекции цифровой следящей системы с минимальным временем полного затухания свободного процесса // Изв. вузов. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 8. С. 554—564.
12. Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976. 576 с.
13. Коршунов А. И. Основы теории управления. Ч. II. Основы теории и систем автоматического управления. Петродворец: ВМПИ, 2017. 167 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Доказательство эквивалентности показателей качества V_2 и V_3 при $r > 1$. С учетом определения V_2 (8) и V_3 (9) получаем

$$V_2 = \sum_{i=0}^m (1 - h[iT])^2 = m + 1 - 2 \sum_{i=1}^m h[iT] + V_3 \quad (h[0] = 0). \quad (\text{П1})$$

Учитывая $h[iT] = g_{m-1} + g_{m-2} + \dots + g_{m-i}$, $i = 1, 2, \dots, m$, получаем в соответствии с формулами (4) и (5)

$$\sum_{i=1}^m h[iT] = (m-1)g_{m-1} + (m-2)g_{m-2} + \dots + g_1 + 1 = m + 1.$$

Таким образом, выражение (П1) приобретает вид

$$V_2 = m + 1 - 2(m + 1) + V_3 = V_3 - (m + 1).$$

Следовательно, $\frac{\partial V_2}{\partial g_k} = \frac{\partial V_3}{\partial g_k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$, что при исследовании на экстремум да-

ет одинаковое значение коэффициентов g_k .

2. Доказательство необходимости и достаточности выполнения условия (12) для исключения скрытых колебаний после окончания дискретного процесса. Для доказательства получим передаточную функцию замкнутой ЦСС

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon) &= \frac{W_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon)}{1 + W_{\text{ЦСС}}(z, 0)} = \frac{F_{m-n}(z)R_{n-1}(z, \varepsilon)}{z^m - G_{m-1}(z)} \bigg/ \left(1 + \frac{F_{m-n}(z)R_{n-1}(z, 0)}{z^m - G_{m-1}(z)} \right) = \\ &= \frac{F_{m-n}(z)R_{n-1}(z, \varepsilon)}{z^m - G_{m-1}(z) + F_{m-n}(z)R_{n-1}(z, 0)} = \frac{F_{m-n}(z)R_{n-1}(z, \varepsilon)}{z^m}, \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

где

$$W_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon) = D(z)W_{\text{НЧ}}(z, \varepsilon) = \frac{F_{m-n}(z)Q_{n-1}(z)}{S_{m-1}(z)} \frac{R_{n-1}(z, \varepsilon)}{(z-1)Q_{n-1}(z)} = \frac{F_{m-n}(z)R_{n-1}(z, \varepsilon)}{z^m - G_{m-1}(z)},$$

$$G_{m-1}(z) = F_{m-n}(z)R_{n-1}(z, 0), \quad R_{n-1}(z, 0) = R_{n-1}(z).$$

Из выражения (П2) следует равенство $h[iT, \varepsilon] = \text{const}$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ при $i \geq m$ вследствие нулевых полюсов $\Phi_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon)$. Выполнение условия (4) гарантирует $h[iT, \varepsilon] = 1$ при $i \geq m$. Постоянные при $i \geq m$ значения $h[iT, \varepsilon]$ не могут отличаться от единицы вследствие отсутствия у НЧ чисто мнимых полюсов.

Для доказательства необходимости включим в $G_{m-1}(z)$ только нули $R_{n-1}(z)$, большие или равные по модулю единице, образующие полином $R_{n_1-1}(z)$, что гарантирует „грубость“ системы [12]. Очевидно, что $R_{n-1}(z) = R_{n_1-1}(z)R_{n-n_1-1}(z)$, где $R_{n-n_1-1}(z)$ — полином, нули которого равны нулям $R_{n-1}(z)$, меньшим по модулю единицы. Тогда, получив по выражению (13)

$$D(z) = \frac{W_{\text{ЦСС}}(z)}{W_{\text{НЧ}}(z)} = \frac{G_{m-1}(z)}{z^m - G_{m-1}(z)} \frac{(z-1)Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)}, \quad G_{m-1}(z) = R_{n_1}(z)F_{m-1-n_1}(z),$$

вычислим передаточные функции ЦСС:

$$\begin{aligned} W_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon) &= D(z)W_{\text{НЧ}}(z, \varepsilon) = \frac{R_{n_1}(z)F_{m-1-n_1}(z)}{z^m - G_{m-1}(z)} \frac{(z-1)Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} \frac{R_{n-1}(z, \varepsilon)}{(z-1)Q_{n-1}(z)} = \\ &= \frac{F_{m-1-n_1}(z)}{z^m - G_{m-1}(z)} \frac{R_{n-1}(z, \varepsilon)}{R_{n-n_1-1}(z)}, \\ \Phi_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon) &= \frac{W_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon)}{1 + W_{\text{ЦСС}}(z, 0)} = \frac{F_{m-1-n_1}(z)R_{n-1}(z, \varepsilon)}{[z^m - G_{m-1}(z)]R_{n-n_1-1}(z)} \bigg/ \left(1 + \frac{F_{m-1-n_1}(z)R_{n-1}(z, 0)}{[z^m - G_{m-1}(z)]R_{n-n_1-1}(z)} \right) = \\ &= \frac{F_{m-1-n_1}(z)R_{n-1}(z, \varepsilon)}{[z^m - G_{m-1}(z)]R_{n-n_1-1}(z) + R_{n-1}(z)F_{m-1-n_1}(z)} = \frac{F_{m-1-n_1}(z)R_{n-1}(z, \varepsilon)}{z^m R_{n-n_1-1}(z)}, \\ \Phi_{\text{ЦСС}}(z) &= \Phi_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{F_{m-1-n_1}(z)R_{n_1}(z)}{z^m} = \frac{F_{m-1}(z)}{z^m}. \end{aligned}$$

Равенство нулю всех полюсов передаточной функции $\Phi_{\text{ЦСС}}(z)$ совместно с условием (4) доказывает равенство $h[iT] = 1$ при $i \geq m$. Наличие у передаточной функции $\Phi_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon)$

отличных от нуля, но меньших по модулю единицы, полюсов доказывает неравенство $h[iT, \varepsilon] \neq 1$ при $i \geq m$. Этим установлено наличие скрытых затухающих колебаний внутри интервалов дискретизации при $i \geq m$.

Сведения об авторах

- Артём Михайлович Коновалов** — Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ „Военно-морская академия им. Н. Г. Кузнецова“, факультет систем автоматизации управления (офицер Военно-морского флота РФ)
- Анатолий Иванович Коршунов** — д-р техн. наук, профессор; Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ „Военно-морская академия им. Н. Г. Кузнецова“, кафедра радиоэлектроники; E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Поступила в редакцию 23.11.2021; одобрена после рецензирования 06.07.2021; принята к публикации 25.01.23.

REFERENCES

1. Tsytkin Ya.Z. *Teoriya lineynykh impul'snykh sistem* (Theory of Linear Impulse Systems), Moscow, 1963, 968 p. (in Russ.)
2. Jury E.J. *Sampled-data control systems*, NY, Wiley, London, Chapman and Hall, 1958.
3. Isermann R. *Digital Control Systems*, Berlin etc., 1981.
4. Kuo B.C. *Digital Control Systems*, NY, Chicago, San Francisco, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1980.
5. Anuchin A.S. *Sistemy upravleniya elektroprivodov* (Electric Drive Control Systems), Moscow, 2015, 373 p. (in Russ.)
6. Korshunov A.I. *Russian Electrical Engineering*, 2020, no. 12(91), pp. 767–771.
7. Korshunov A.I. *Journal of Instrument Engineering*, 2019, no. 12(62), pp. 1078–1086. (in Russ.)
8. Konovalov A.M., Korshunov A.I. *Journal of Instrument Engineering*, 2020, no. 9(63), pp. 786–793. (in Russ.)
9. Konovalov A.M., Korshunov A.I. *Journal of Instrument Engineering*, 2020, no. 9(63), pp. 794–802. (in Russ.)
10. Konovalov A.M., Korshunov A.I. *Journal of Instrument Engineering*, 2020, no. 10(63), pp. 888–896. (in Russ.)
11. Konovalov A.M., Korshunov A.I. *Journal of Instrument Engineering*, 2022, no. 8(65), pp. 554–564. (in Russ.)
12. Besekerskiy V.A. *Tsifrovye avtomaticheskie sistemy* (Digital Automatic Systems), 1976, 576 p. (in Russ.)
13. Korshunov A.I. *Osnovy teorii upravleniya. Osnovy teorii i sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Bases of the Theory of Management. Bases of the Theory and Systems of Automatic Control), Petrodvorets, 2017, 167 p. (in Russ.)

Data on authors

- Artyom M. Konovalov** — Naval Polytechnic Institute of Admiral N. G. Kuznetsov Naval Academy, Faculty of Control Systems Automation, Russian Navy officer
- Anatoly E. Korshunov** — Dr. Sci., Professor; Naval Polytechnic Institute of Admiral N. G. Kuznetsov Naval Academy, Department of Radio Electronics; E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Received 23.11.2021; approved after reviewing 06.07.2021; accepted for publication 25.01.23.