

---

---

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

### BRIEF NOTES

---

---

УДК 621.376

DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-9-798-802

### КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ОГИБАЮЩЕЙ ГАУССОВА ШУМА

В. И. Ан

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия,  
via.an@mail.ru*

**Аннотация.** Предложено геометрическое представление случайного процесса. Введены новые векторы производной огибающей и скорости вращения вектора огибающей в графической интерпретации случайного процесса. Выражения для производной огибающей и угловой скорости имеют сходные структуры и являются ортогональными проекциями одного и того же вектора. Логарифмическая производная огибающей и производная фазы случайного процесса также имеют сходные структуры, близкие и даже совпадающие вероятностные характеристики. Для узкополосного гауссовского случайного процесса установлена простая связь их корреляционных функций.

**Ключевые слова:** геометрическое представление случайного процесса, гауссовский случайный процесс, производная фазы, логарифмическая производная огибающей, случайная частота, корреляционная функция

**Ссылка для цитирования:** Ан В. И. Корреляционная функция логарифмической производной огибающей гауссова шума // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 9. С. 798—802. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-9-798-802.

### CORRELATION FUNCTION OF THE LOGARITHMIC DERIVATIVE OF THE GAUSSIAN NOISE ENVELOPE

V. I. An

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
via.an@mail.ru*

**Abstract.** A geometric representation of a random process is proposed. New vectors of the derivative of the envelope and the speed of rotation of the envelope vector are introduced in the graphical interpretation of the random process. Expressions for the envelope derivative and angular velocity have similar structures and are orthogonal projections of the same vector. The logarithmic derivative of the envelope and the derivative of the phase of a random process also have similar structures, close and even coinciding probabilistic characteristics. For a narrow-band Gaussian random process, a simple connection between their correlation functions is established.

**Keywords:** geometric representation of random process, Gaussian random process, derivative of phase, logarithmic derivative of envelope, random frequency, correlation function

**For citation:** An V. I. Correlation function of the logarithmic derivative of the Gaussian noise envelope. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 9. P. 798—802 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-9-798-802.

Представим  $\xi(t)$  — узкополосный гауссовский процесс с симметричным спектром в виде [1]

$$\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (1)$$

где  $A(t)$  — амплитуда,  $\varphi(t)$  — фаза,  $\omega_0$  — центральная частота спектра.

Известно [2], что одномерные плотности вероятности производной фазы  $\varphi'(t)$  и логарифмической производной огибающей  $\lambda(t) = [\ln A(t)]' = A'(t)/A(t)$  совпадают. Более того,  $\varphi'(t)$  и  $\lambda(t)$  имеют сходные структуры и образованы одними и теми же функциями — квадратными составляющими  $A_c(t)$ ,  $A_s(t)$  процесса  $\xi(t)$  и их производными  $A_c'(t)$ ,  $A_s'(t)$ :

$$\varphi'(t) = \frac{A_c(t)A_s'(t) - A_c'(t)A_s(t)}{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \quad \lambda(t) = \frac{A_c(t)A_c'(t) + A_s(t)A_s'(t)}{A_c^2(t) + A_s^2(t)}. \quad (2)$$

Так как  $\lambda(t) = A'(t)/A(t)$ , то и  $\varphi'(t)$  может быть представлена в виде

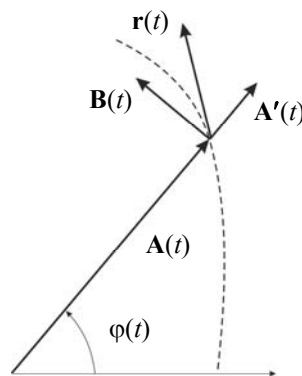
$$\varphi'(t) = B(t)/A(t), \quad (3)$$

$$B(t) = \frac{A_c(t)A_s'(t) - A_c'(t)A_s(t)}{\sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}} = A_s'(t) \cos \varphi(t) - A_c'(t) \sin \varphi(t). \quad (4)$$

С другой стороны, производная огибающей равна

$$A'(t) = \frac{A_c(t)A_c'(t) + A_s(t)A_s'(t)}{\sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}} = A_c'(t) \cos \varphi(t) + A_s'(t) \sin \varphi(t). \quad (5)$$

Следовательно,  $B(t)$  и  $A'(t)$  являются ортогональными проекциями вектора  $\mathbf{r}(t)$ , направленного по касательной к траектории вектора  $\mathbf{A}(t)$ , в системе координат, повернутой на угол  $\varphi(t)$  относительно основной системы координат, ось абсцисс которой горизонтальна (см. рисунок). Проекции  $A_c'(t)$  и  $A_s'(t)$  вектора  $\mathbf{r}(t)$  в основной системе координат не показаны; на рисунке  $\mathbf{B}(t)$  — скорость вращения вектора  $\mathbf{A}(t)$ , перпендикулярная этому вектору.



Введение  $\mathbf{B}(t)$  как проекции вектора  $\mathbf{r}(t)$  в дополнение к  $\mathbf{A}'(t)$  естественно. Отсюда следует, что представление  $\varphi'(t)$  должно быть таким как у логарифмической производной огибающей  $\lambda(t)$ , т.е. обратно пропорционально огибающей, а не квадрату огибающей, как утверждается, например, в [3]. Вероятностные характеристики производной фазы связаны с процессом, обратно пропорциональным огибающей. Представление (3) объясняет известные факты, в том числе искажения  $\varphi'(t)$ , возникающие при ограничении огибающей [4], связь больших значений  $\varphi'(t)$  с замираниями огибающей [5], бесконечность дисперсии  $\varphi'(t)$  [6]. Изменения вектора  $\mathbf{r}(t)$  и его проекций  $\mathbf{B}(t)$  и  $\mathbf{A}'(t)$  обусловлены изменениями огибающей и фазы. Поэтому производная логарифма огибающей  $\lambda(t)$ , как и производная фазы  $\varphi'(t)$ ,

характеризует изменения огибающей и фазы. Для  $\lambda(t)$ , определенной в (2), выполняются такие свойства частоты, как независимость от выбора единицы измерения процесса  $\xi(t)$  и обратно пропорциональная зависимость от изменения масштаба времени  $t$ . Возможное использование  $\lambda(t)$  в качестве случайной частоты рассмотрено в [6]. При этом для измерения частоты используется только огибающая, тогда как для измерения  $\varphi'(t)$  требуются квадратурные составляющие  $\xi(t)$ .

Для вычисления  $B_\lambda(\tau)$  — корреляционной функции логарифмической производной огибающей — применен тот же метод, каким в [1] получена корреляционная функция производной фазы  $\varphi'(t)$  — без использования двумерной плотности вероятности  $\varphi'(t)$ , имеющей очень сложную форму [7].

Используя  $m_1$  как символ математического ожидания, запишем

$$B_\lambda(\tau) = m_1 \left\{ \frac{A_c(t)A_c'(t) + A_s(t)A_s'(t)}{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \frac{A_c(t+\tau)A_c'(t+\tau) + A_s(t+\tau)A_s'(t+\tau)}{A_c^2(t+\tau) + A_s^2(t+\tau)} \right\}. \quad (6)$$

Для определения  $B_\lambda(t)$  необходимо знать нормальную плотность вероятности случайных величин  $A_c(t)$ ,  $A_c(t+\tau)$ ,  $A_c'(t)$ ,  $A_c'(t+\tau)$ ,  $A_s(t)$ ,  $A_s(t+\tau)$ ,  $A_s'(t)$ ,  $A_s'(t+\tau)$ . В силу симметрии энергетического спектра  $F(\omega)$  процесса  $\xi(t)$  составляющие  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$  независимы, их корреляционные функции одинаковы и равны  $\sigma^2\rho(\tau)$ , где  $\sigma^2$  — дисперсия,  $\rho(\tau)$  — коэффициент корреляции  $\xi(t)$ . Поэтому указанная нормальная плотность вероятности восьмого порядка равна произведению двух нормальных плотностей вероятности четвертого порядка [1, (8.127) и (8.128)], причем для каждой из них используется интегральное представление через соответствующую четырехмерную характеристическую функцию. Используя последние, представим (6) в следующем виде:

$$B_\lambda(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1 \bar{x}_1 + y_1 \bar{y}_1}{x_1^2 + y_1^2} \frac{x_2 \bar{x}_2 + y_2 \bar{y}_2}{x_2^2 + y_2^2} \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2} \sum_{n=1}^4 \sum_{k=1}^4 r_{nk} (v_n v_k + u_n u_k) - \right. \\ \left. -i \left( x_1 v_1 + \bar{x}_1 v_2 + x_2 v_3 + \bar{x}_2 v_4 + y_1 u_1 + \bar{y}_1 u_2 + y_2 u_3 + \bar{y}_2 u_4 \right) \right] \times \\ \times dx_1 d\bar{x}_1 dy_1 d\bar{y}_1 dx_2 d\bar{x}_2 dy_2 d\bar{y}_2 dv_1 dv_2 dv_3 dv_4 du_1 du_2 du_3 du_4, \quad (7)$$

где  $r_{nk}$  — элементы корреляционной матрицы [1, (4.179)].

Структура (7) такая же, как в выражении [1, (8.129)] для корреляционной функции производной фазы  $\varphi'(t)$ , поэтому  $B_\lambda(\tau)$  находится тем же путем: вычисляются четыре однотипных интеграла, содержащие интегральные представления дельта-функции и ее производной [1, 8], и после упрощений благодаря фильтрующим свойствам дельта-функции и ее производной получаем

$$B_\lambda(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\sigma^4 \rho'^2 (v_1 v_3 + u_1 u_3)^2 + \sigma^2 \rho'' (v_1 v_3 + u_1 u_3)}{(v_1^2 + u_1^2)(v_3^2 + u_3^2)} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2} (v_1^2 + v_3^2 + u_1^2 + u_3^2 + 2\rho v_1 v_3 + 2\rho u_1 u_3) \right] dv_1 dv_3 du_1 du_3. \quad (8)$$

Интеграл (8) можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$B_\lambda(\tau) = B_{\varphi'}(\tau) + B_1(\tau), \quad (9)$$

где первое слагаемое в правой части (9) совпадает с известной корреляционной функцией производной фазы  $\phi'(t)$  [1, (8.135) и (8.137)], а второе слагаемое — следующее:

$$B_1(\tau) = -\frac{\sigma^4 \rho'^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2} (v_1^2 + v_3^2 + u_1^2 + u_3^2 + 2\rho v_1 v_3 + 2\rho u_1 u_3) \right] \times \\ \times dv_1 dv_3 du_1 du_3 = -\rho'^2 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n} = \frac{\rho'^2}{\rho^2 - 1}.$$

Итак, корреляционная функция  $\lambda(t)$  равна

$$B_\lambda(\tau) = -\frac{\rho'^2 - \rho''\rho}{2\rho^2} \ln(1 - \rho^2) - \frac{\rho'^2}{1 - \rho^2}.$$

Аналогичный результат для  $B_\lambda(\tau)$  можно получить из  $B_L(\tau)$  — корреляционной функции логарифма огибающей  $\xi(t)$  [1, (8.58)], т.е.

$$B_\lambda(\tau) = -B_L''(\tau).$$

Предложенное геометрическое представление случайного процесса с введением вектора скорости вращения вектора, описывающего случайный процесс, открывает возможности для развития геометрических методов исследования. Введение нового параметра случайного процесса — логарифмической производной огибающей, имеющей сходные структуру и вероятностные характеристики с производной фазы (случайной частотой), позволяет получить менее сложным путем известные результаты, связанные с производной фазы, а также новые. Простая связь корреляционной функции логарифмической производной огибающей с корреляционной функцией производной фазы гауссовского случайного процесса является связью огибающей и фазы процесса через их производные. Полученные результаты могут быть применимы к негауссовским случайным процессам.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1974. 552 с.
2. Ан В. И. Распределение производной фазы суммы сигнала и гауссовского шума // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2009. Т. 52, № 10. С. 67—71.
3. Соболев В. С., Кащеева Г. А. Дисперсия и спектральная плотность произведения мгновенной частоты и амплитуды многочастичного доплеровского сигнала // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30, № 9. С. 1845—1847.
4. Жодзишский А. И., Кий А. А. Об учете статистической зависимости между огибающей, фазой и частотой случайного процесса // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13, № 8. С. 1512—1513.
5. Жуков В. П., Иванова Н. Н. Скачки фазы суммы гармонического сигнала и гауссова шума и их связь с замираниями огибающей // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 14, № 11. С. 2044—2046.
6. Ан В. И. Способ определения частоты узкополосного случайного процесса // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия. „Естественные науки“. 2004. Т. 13, № 2. С. 3—10.
7. Грознецкий Б. Н., Штейнберг А. Л. Двумерная плотность вероятности производной фазы узкополосного стационарного нормального шума // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33, № 10. С. 2205—2208.
8. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.

#### Сведения об авторе

**Вячеслав Ильич Ан**

— канд. техн. наук; Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, кафедра радиоэлектронных систем и устройств; докторант; E-mail: via.an@mail.ru

Поступила в редакцию 15.05.2023; одобрена после рецензирования 16.06.2023; принята к публикации 31.07.2023.

## REFERENCES

1. Levin B.R. *Teoreticheskiye osnovy statisticheskoy radiotekhniki* (Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering), Book 1, Moscow, 1974, 552 p. (in Russ.)
2. An V.I. *Radioelectronics and Communications Systems*, 2009, no. 10(52), pp. 561–564.
3. Sobolev V.S., Kashcheeva G.A. *Soviet Journal of Communications Technology and Electronics*, 1985, no. 9(30), pp. 1845–1847. (in Russ.)
4. Zhodzishsky A.I., Kiy A.A. *Radio Engineering and Electronic Physics*, 1968, no. 8(13), pp. 1512–1513. (in Russ.)
5. Zhukov V.P., Ivanova N.N. *Radio Engineering and Electronic Physics*, 1969, no. 11(14), pp. 2044–2046. (in Russ.)
6. An V.I. *Bulletin of MSTU im. N.E. Bauman. Series "Natural Sciences"*, 2004, no. 2(13), pp. 3–10. (in Russ.)
7. Groznetsky B.N., Shteinberg A.L. *Soviet Journal of Communications Technology and Electronics*, 1988, no. 10(33), pp. 2205–2208. (in Russ.)
8. Shilov G.E. *Matematicheskiy analiz. Vtoroy spetsial'nyy kurs* (Mathematical Analysis. Second Special Course), Moscow, 1965, 328 p. (in Russ.)

**Data on author**

**Vyacheslav I. An** — PhD; Bauman Moscow State Technical University, Department of Radio Electronic Systems and Devices; Doctoral Student; E-mail: via.an@mail.ru

Received 15.05.2023; approved after reviewing 16.06.2023; accepted for publication 31.07.2023.