

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ  
РАБОЧИХ МЕСТ ПОВЕРКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ  
КАК НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ**Д. С. ЕРШОВ<sup>1,2\*</sup>, Р. З. ХАЙРУЛЛИН<sup>2,3</sup><sup>1</sup> *Московский политехнический университет, Москва, Россия*  
*\*ershov.metrolog@mail.ru*<sup>2</sup> *Главный научный метрологический центр, Мытищи, Московская обл., Россия*<sup>3</sup> *Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

**Аннотация.** Представлены результаты численного моделирования динамики функционирования рабочего места поверки средств измерений как нестационарной системы обслуживания с относительными приоритетами поступающего потока заявок. Приведены оценки трудоемкости моделирования. Проиллюстрирована возможность управления вероятностями состояний системы при пиковых нагрузках за счет управления интенсивностями на значимых отрезках времени. Такая возможность может быть использована для рационального перераспределения производственных мощностей метрологических подразделений на заданном отрезке времени при формировании календарного плана работы этих подразделений. Возможность управления интенсивностью поверок может быть использована для обеспечения тех или иных технических и технологических требований к рабочему месту поверки средств измерений.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, нестационарная система обслуживания, поверка, средство измерений, приоритетность обслуживания

**Ссылка для цитирования:** Ершов Д. С., Хайруллин Р. З. Практическое применение моделей рабочих мест поверки средств измерений как нестационарных систем обслуживания // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 12. С. 1023—1034. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1023-1034.

**PRACTICAL APPLICATION OF WORKPLACE MODELS FOR VERIFICATION  
OF MEASURING INSTRUMENTS  
AS NON-STATIONARY SERVICE SYSTEMS**D. S. Ershov<sup>1,2\*</sup>, R. Z. Khayrullin<sup>2,3</sup><sup>1</sup> *Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia*  
*\*ershov.metrolog@mail.ru*<sup>2</sup> *Main Scientific Metrological Center, Mytishchi, Moscow Region, Russia*<sup>3</sup> *Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

**Abstract.** Results of numerical modeling of the dynamics of measuring instrument verification workplace functioning as a non-stationary service system with relative priorities of the incoming flow of requests, are presented. Estimates of the modeling complexity are given. The possibility of control the system states probabilities under peak loads by controlling intensities over significant periods of time is illustrated. This opportunity can be used for the rational redistribution of production capacities of metrological departments over a given period of time when forming a work schedule for the departments. The ability to control the intensity of verification can be used to ensure certain technical and technological requirements for the workplace for verification of measuring instruments.

**Keywords:** mathematical modelling, non-stationary system of service, verification, measuring apparatus, service priority

**For citation:** Ershov D. S., Khayrullin R. Z. Practical application of workplace models for verification of measuring instruments as non-stationary service systems. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 12. P. 1023—1034 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1023-1034.

**Введение.** В настоящее время в исследованиях как отечественных, так и зарубежных ученых широко применяются методы математического моделирования. Широко применяются марковские и полумарковские модели для решения научных задач. Вместе с тем в качестве метода математического моделирования набирают популярность нестационарные системы обслуживания, позволяющие оценивать эффективность функционирования технических систем на некотором заранее заданном интервале времени в условиях перегрузок данных систем.

В работе [1] авторами представлены результаты анализа публикаций, посвященных теоретическим и практическим вопросам теории нестационарных систем обслуживания (НСО). Но, несмотря на „широту“ проведенного анализа, публикаций, посвященных применению теории НСО, достаточно много.

Например, в статье [2] представлена нестационарная пуассоновская модель непрерывно функционирующей системы обслуживания. Эта модель применима к системам обслуживания конвейерного типа непрерывного действия (ациклические системы обслуживания, многофазные системы обслуживания, древовидные системы). Вычисления характеристик модели основаны на наблюдениях за работой бассейна в спортивном комплексе.

В работе [3] предложен вероятностный принцип баланса состояний технической системы при моделировании нестационарных систем обслуживания, который представлен циклическим графом.

Результаты имитационного моделирования НСО торгового предприятия, а также исследований интенсивности входных и выходных потоков покупателей в НСО предприятия представлены в статье [4]. Методы моделирования НСО и их эффективность рассмотрены в [5].

Исследования [6] направлены на оптимизацию моделей городских водосборов ливневых вод с использованием НСО, чтобы определить параметры, в наибольшей степени влияющие на процесс сброса, а также смоделировать возможные реакции системы на сильные штормы.

В работе [7] предложен подход к анализу зависимости случайных и нестационарных систем массового обслуживания от времени. Точность подхода показана для  $M(t)/M(t)/c(t)$  НСО в зависимости от времени и кусочно-постоянных скоростей поступления заявок.

Пример моделирования непуассоновских нестационарных точечных процессов для изучения систем массового обслуживания представлен в статье [8].

В работе [9] нестационарные и стохастические характеристики процесса спроса отражаются в приближенном распределении фазового типа; также представлены дифференциальные уравнения, соответствующие марковскому представлению, и алгоритмический подход к численному решению нестационарных показателей эффективности.

Метод аппроксимации с фиксированной точкой для нестационарного анализа очередей потерь и сетей очередей потерь с экспоненциальным временем обслуживания представлен в статье [10].

Строго функциональный закон для многосерверных технических систем как НСО с потерями представлен в работе [11].

В статье [12] рассмотрена возможность использования вероятностного принципа баланса для состояний НСО, а также рекомендовано применять разработанный в [12] метод для исследования НСО при произвольных распределениях.

Работа [13] посвящена вопросам повышения эффективности функционирования технических систем различного назначения путем применения математических моделей, методов и алгоритмов оптимизации и адаптивного управления НСО.

Авторами в статье [1] предложена модель рабочего места (РМ) поверки средств измерений (СИ) как НСО с относительными приоритетами поступающего потока заявок. Модель основывается на построении многомерного графа и соответствующей системы уравнений

Чепмена—Колмогорова, она позволяет выявить основные закономерности и технологические параметры функционирования РМ поверки СИ и на качественном уровне объяснить их.

Целью настоящей работы является исследование динамики поступления и обслуживания заявок на основе применения модели [1] для анализа и оценки возможностей эффективного функционирования РМ по поверке СИ в условиях реальных рабочих нагрузок.

**Постановка задачи.** Как правило, работы на РМ поверки СИ осуществляются на основании планов (месячных, квартальных, годовых). При этом возникает необходимость выполнения внеплановых работ на РМ поверки СИ — так называемых оперативных заданий, поступающих в случайные моменты времени. Оперативные работы преимущественно выполняются в первую очередь, следовательно, плановые работы на РМ поверки СИ — во вторую.

При этом оперативные заявки (в настоящей статье в качестве заявок выступают СИ) могут иметь несколько приоритетов в обслуживании (поверке) по отношению друг к другу и плановым заявкам. РМ поверки СИ представим в виде НСО с относительными приоритетами (ОП) без потерь обслуживания заявок.

Поступившие на поверку приоритетные СИ поверяются в порядке приоритета. Предполагается, что поступление в систему и обслуживание заявок с разными приоритетами происходит с различной интенсивностью.

**Базовая модель** [14—17] не учитывает приоритетные заявки. Для описания модели используется граф треугольной формы, на основании которого строится система уравнений Чепмена—Колмогорова. В любой момент времени состояние системы характеризуется парой целых чисел  $(i, j)$ , где  $i$  — число поступивших на поверку, но еще не поверенных СИ ( $i = 0, 1, \dots, N$ ), а  $j$  — число поступивших и поверенных к данному моменту времени СИ ( $j = 0, 1, \dots, (N - 1)$ ). Суммарное число вершин графа  $V$  (состояний такой системы) будет равно:

$$V = \frac{(N + 1) \cdot (N + 2)}{2}. \quad (1)$$

Общее число ребер базового графа (количество переходов между состояниями) может быть найдено по формуле:

$$R = (N + 1) \cdot N. \quad (2)$$

В начальный момент времени РМ поверки СИ находится в „нулевом состоянии“ — число всех СИ, поступивших на поверку, а также всех поверенных СИ равно нулю. Вероятность нулевого состояния принимается равной единице, а вероятности всех остальных состояний — равными нулю. После окончания всех проверок на РМ система должна прийти в конечное состояние  $i = 0; j = N$  (или кратко  $(0; N)$ ), и дальнейшие переходы состояний невозможны.

**Модель НСО с ОП.** В любой момент времени состояние системы НСО с ОП характеризуется целочисленной матрицей размерности  $[P \times 2]$ :

$$\begin{pmatrix} i_1 & , & j_1 \\ \dots & , & \dots \\ i_q & , & j_q \\ \dots & , & \dots \\ i_Q & , & j_Q \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $q = 1, 2, \dots, Q$  — порядковый номер приоритета (плановая заявка имеет приоритет  $Q$ , ей соответствует последняя строка матрицы),  $i_q$  — число поступивших на поверку с приоритетом  $q$ , но еще не поверенных СИ,  $j_q$  — число поступивших с приоритетом  $q$  и поверенных к данному моменту времени СИ ( $q = 1, 2, \dots, Q$ ). В матрице (3) с увеличением номера строки

приоритет уменьшается. Будем считать, что плановой заявке соответствует последняя строка матрицы (3).

Общее число вершин графа (состояний) для модели НСО с ОП, учитывающего  $q$  потоков СИ с относительными приоритетами в количестве  $N_q$ ,  $q = 1, 2, \dots, Q$  образцов СИ, может быть найдено по формуле:

$$V = \frac{1}{2^Q} \cdot \prod_{q=1}^Q (N_Q + 1) \cdot (N_q + 2). \quad (4)$$

Построение множества всех состояний (индексация всех состояний) проводилось с применением процедуры лексикографического упорядочивания. Общее число ребер графа (переходов между состояниями) для НСО с ОП, которые заносятся в матрицу  $A$  смежности (переходов состояний), вычисляется по следующему алгоритму:

1. Граф модели НСО с ОП условно разбивается на  $\frac{(N_0 + 1) \cdot N_0}{2}$  подграфов, причем число подграфов равно числу состояний при моделировании потока заявок с номерами  $q = 1, 2, \dots, (Q - 1)$ . В каждом подграфе все индексы с парой номеров  $(i_q, j_q)$ ,  $q = 1, 2, \dots, (Q - 1)$  сохраняются неизменными; вершинами графа являются состояния с разными значениями  $(i_q, j_q)$ . В дальнейшем  $i_q$  будем называть первым индексом, а  $j_q$  — вторым.

2. Рассчитывается и прописывается общее число ребер (переходов) для каждого такого подграфа по формуле (2).

3. Рассчитывается общее число переходов между указанными подграфами. При этом учитываются следующие переходы состояний:

- поступление новой заявки с приоритетом  $q = 1, 2, \dots, Q$  (увеличение на единицу первого индекса без изменения второго индекса);
- проверки (уменьшение первого индекса на 1 и одновременного увеличения второго индекса на 1);
- переход в конечное состояние (все первые индексы равны нулю, а вторые индексы равны предельно возможному значению — все поступившие на проверку СИ поверены).

Так, например, при  $N_1 = 1, N_2 = 1, N_3 = 2$  число вершин  $V = 52$ ; при  $N_1 = 4, N_2 = 3, N_3 = 2$  —  $V = 900$ ; а при  $N_1 = 4, N_2 = 4, N_3 = 4$  —  $V = 3375$ . Таким образом, модели для анализа, прогнозирования и оценки эффективности РМ проверки СИ в условиях реальных нестационарных нагрузок могут включать до нескольких десятков и даже сотен тысяч различных состояний (уравнений). Поэтому при практическом использовании моделей применялись описанный выше алгоритм формирования множества различных состояний, а также алгоритм формирования множества переходов между состояниями и метод автоматизированного вывода уравнений.

Отметим, что учет относительных приоритетов в предлагаемой модели осуществляется за счет задания строгой и однозначной последовательности переходов, обеспечивающих выполнение в первую очередь заявок с более высоким приоритетом. Из состояния, в котором число поступивших на проверку приоритетных, но не поверенных СИ отлично от нуля, возможны только переходы состояний, связанные с обслуживанием исключительно приоритетных заявок на проверку в строгой последовательности в порядке убывания приоритетов.

*Начальные и конечные условия.* При исследовании динамики поступления и обслуживания заявок обычно принимают, что в начальный момент времени НСО с ОП по проверке СИ находится в „нулевом состоянии“ — число всех СИ, поступивших на проверку, а также всех поверенных СИ, равно нулю (в матрице (3) все элементы равны нулю). Вероятность нулевого состояния принимается равной единице, а вероятности всех остальных состояний — нулю. После окончания всех проверок на РМ система должна перейти в конечное состояние

$$\begin{pmatrix} 0 & , & N_1 \\ \dots & , & \dots \\ 0 & , & N_q \\ \dots & , & \dots \\ 0 & , & N_Q \end{pmatrix}, \tag{5}$$

т.е. все поступившие на поверку образцы СИ должны быть поверены.

*Модель НСО с ОП в матричной форме.* Модель представим в виде системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}) \cdot \mathbf{Q}, \tag{6}$$

где  $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_Q)$  — массив значений интенсивности поступления заявок на поверку,  $\mathbf{M} = (\mu_1, \dots, \mu_Q)$  — массив значений интенсивности поверок СИ с разными приоритетами,  $\mathbf{A}$  — матрица смежности размерности  $[V \times V]$ , элементами которой являются кусочно-постоянные функции.

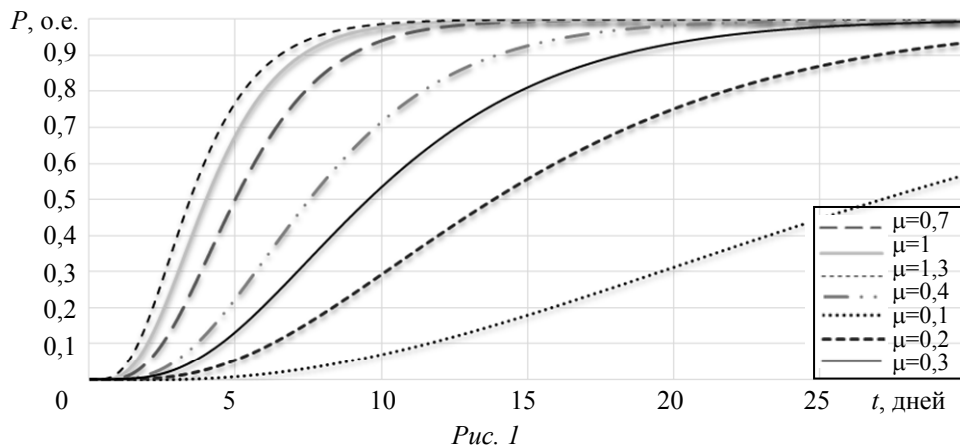
*Модель управления вероятностями нахождения системы в различных состояниях.* В силу линейности процесса поступления заявок на поверку и обслуживания заявок представим систему (6) в виде:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{C}(\mathbf{\Lambda}) \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{D}(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{Q}, \tag{7}$$

здесь  $\mathbf{C}(\mathbf{\Lambda})$  и  $\mathbf{D}(\mathbf{M})$  — матрицы, зависящие от интенсивности поступающего и обслуживающего потока соответственно. Интенсивности поступления заявок на поверку предполагаются заданными. Интенсивности обслуживания заявок в модели (7) выбираются в качестве управляющих функций.

**Моделирование динамики поступления и обслуживания заявок с разными приоритетами.** Введем обозначения используемых в статье моделей: МБ\_4 — базовая модель с обслуживанием четырех плановых заявок на поверку, М1\_2 — модель с обслуживанием одной приоритетной и двух плановых заявок, М1\_1\_2 — модель с обслуживанием двух потоков с приоритетными заявками и одного потока с двумя плановыми заявками. Моделирование проводилось на заданном отрезке времени в один месяц (30 дней).

На рис. 1 представлена зависимость вероятности выполнения всех заявок для модели М1\_2 при разных значениях интенсивности обслуживания заявок.



Видно, что с увеличением интенсивности обслуживания время перехода в конечное состояние уменьшается.

На рис. 2 представлена зависимость вероятности выполнения всех заявок для моделей М1\_1\_2 и МБ\_4 (общее число заявок для каждой из моделей — 4). Также представлен уровень доверительной вероятности  $P = 0,95$ , который в практических задачах принимается за условия выхода вероятности на максимально достижимое значение.

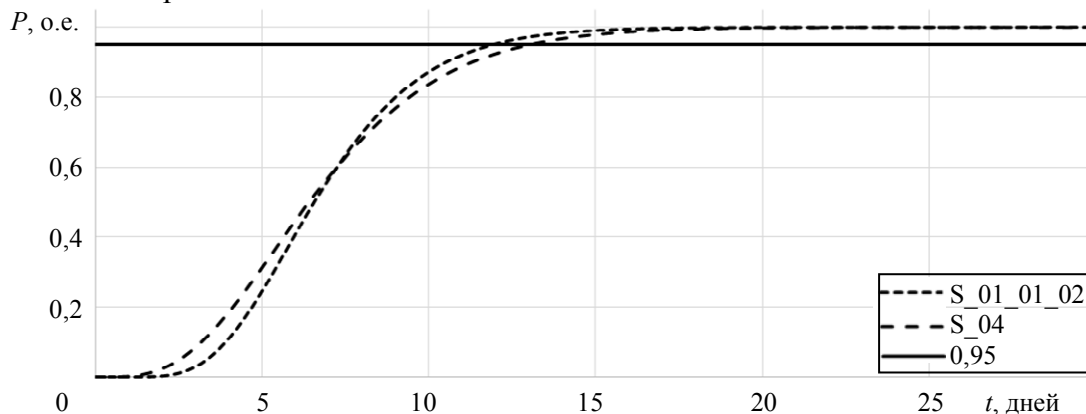


Рис. 2

Видно, что для модели М1\_1\_2 выход на доверительную вероятность осуществляется быстрее, чем для МБ\_4. Отметим также, что на начальных этапах функционирования системы вероятность  $P \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$  обслуживания всех заявок для модели с двумя приоритетами меньше вероятности  $P(0,4)$  обслуживания всех заявок для базовой модели.

На рис. 3 представлена зависимость вероятности „ невыполнения ни одной заявки “ для М1\_1\_2 при разных значениях интенсивности обслуживания ( $\mu = 0,8$  и  $2,0$ ) и базовой модели МБ\_4 при  $\mu = 0,8$ . Также представлен уровень вероятности  $P = 0,05$ , который в практических задачах принимается за условие выхода соответствующих вероятностей на свои конечные значения.

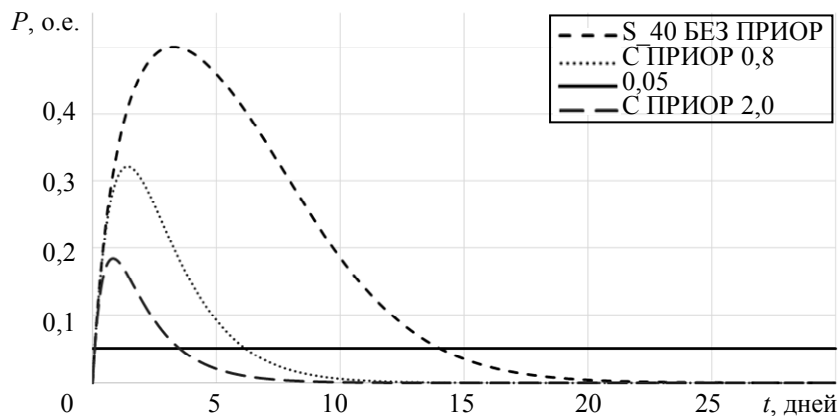


Рис. 3

Видно, что с увеличением интенсивности обслуживания максимальное значение вероятности снижается, время выхода на уровень  $P = 0,05$  также уменьшается.

**Исследование пиковых, полупиковых и базовых нагрузок на РМ при постоянных значениях интенсивности обслуживания.** Пусть график изменения некоторой критической точки загруженности РМ вероятности от времени  $P = P(t)$  (например, вероятности возникновения события „не выполнено ни одной заявки“ или „не выполнено более  $Z$  заявок“) имеет вид, представленный на рис. 4. Назначаются граничные значения  $P_{п/п.б}$ ,  $P_{п.п/п}$ , отделяющие диапазоны базовых, полупиковых и пиковых нагрузок на РМ. Значения  $t_{п/п}^-$ ,  $t_{п/п}^+$  (где минус означает „до достижения максимальной вероятности“; плюс — „после достижения“) опреде-

ляются из решения уравнения:  $P_{п/п.б} = P(t)$ , причем  $t_{п/п}^- < t_{п/п}^+$ . Значения  $t_{п}^-$ ,  $t_{п}^+$  определяются из решения уравнения:  $P_{п.п/п} = P(t)$ , причем  $t_{п}^- < t_{п}^+$ .

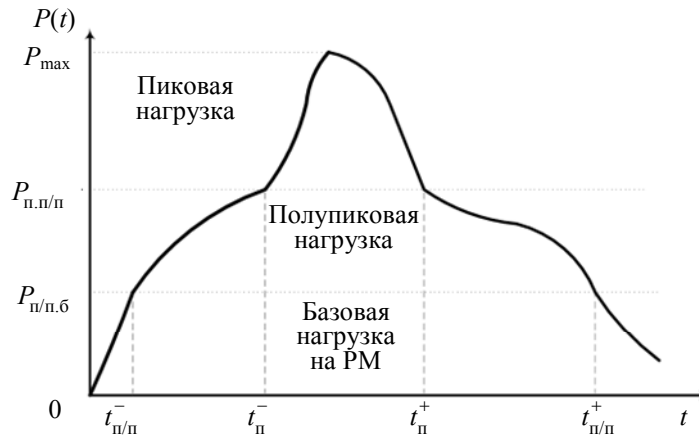


Рис. 4

Отметим, что разработанная модель позволяет управлять пиковыми нагрузками на РМ по поверке СИ (нагрузками, находящимися в зоне пиковых, в том числе с максимальным значением вероятности  $P_{max}$ ), моментами времени перехода с базовых полупиковых и пиковых значений:  $t_{п}^-$ ,  $t_{п}^+$ ,  $t_{п/п}^-$ ,  $t_{п/п}^+$ , а также интервалами  $[t_{п}^-; t_{п}^+]$ ,  $[t_{п/п}^-; t_{п/п}^+]$  времени нахождения в зоне пиковых и полупиковых значений, разностью значений пикового  $\Delta_{п} = t_{п}^+ - t_{п}^-$  и полупикового  $\Delta_{п/п} = t_{п/п}^+ - t_{п/п}^-$  интервалов. Результаты моделирования (при  $P_{п/п.б} = 0,1$ ,  $P_{п.п/п} = 0,2$ ) загрузки РМ при обслуживании потока заявок с двумя видами приоритетов для разных значений интенсивности обслуживания  $\mu$  представлены в таблице.

Результаты моделирования загрузки РМ

$\mu$	$t_{п/п}^-$	$t_{п/п}^+$	$t_{п}^-$	$t_{п}^+$	$P_{max}$	$\Delta_{п/п}$	$\Delta_{п}$
0,4	0,716	6,562	1,257	4,522	0,289	5,846	3,265
0,6	0,765	4,483	1,672	2,524	0,208	3,718	0,852
0,8	0,831	3,321	—	—	0,159	2,490	—
1,0	0,930	2,502	—	—	0,128	1,572	—
1,2	1,14	1,770	—	—	0,105	0,63	—
1,4	—	—	—	—	0,088	—	—

Видно, что с увеличением интенсивности обслуживания  $\mu$  разности значений пикового  $\Delta_{п}$  и полупикового  $\Delta_{п/п}$  интервалов уменьшаются, максимальное значение вероятности также уменьшается, а при достаточно больших значениях  $\mu$  загрузка РМ находится в зоне базовых значений.

Отметим также, что с увеличением  $\mu$  вход в зону пиковых (полупиковых) нагрузок осуществляется позже по времени, а выход — раньше.

*Моделирование процесса управления пиковыми нагрузками с помощью кусочно-линейных управляющих функций.* Во всех рассмотренных выше примерах предполагалось, что интенсивность обслуживания принимает постоянное значение на всем заданном интервале времени. Отметим, что поддержание интенсивности обслуживания постоянной на протяжении всего заданного интервала не всегда целесообразно. Покажем, что за счет увеличения интенсивности обслуживания только на участках полупиковых и пиковых нагрузок возможно уменьшить максимальные значения вероятности не обслуженных заявок.

Опишем результаты моделирования в случае, если интенсивность обслуживания рассматривать как кусочно-постоянную функцию на заданном интервале времени с двумя участками постоянства.

На рис. 5 для модели M1\_2 проиллюстрирована возможность управления вероятностью достижения состояния  $P_{(2,0)}^{(1,0)}$  за счет увеличения интенсивности обслуживания в два раза на отрезке времени  $0 \leq t \leq 2$ , на который попадают пиковые нагрузки на РМ, по сравнению со стандартным постоянным значением  $\mu = 0,7$  на всем заданном отрезке времени.

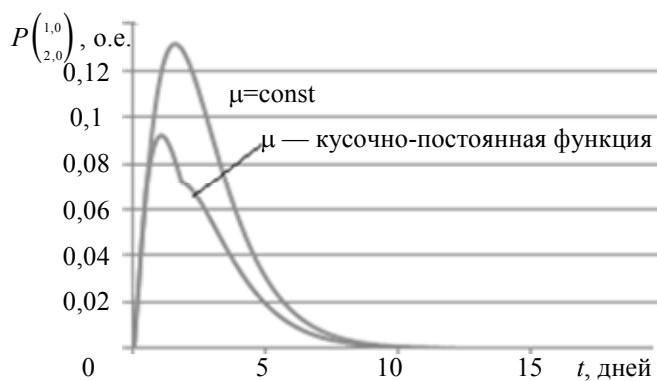


Рис. 5

Видно, что максимальное значение вероятности  $P_{(2,0)}^{(1,0)}$  удается понизить примерно на 30 %. Отметим, что график зависимости  $P_{(2,0)}^{(1,0)}$  от времени уже не является гладкой функцией: виден излом при  $t = 2$  (в момент времени, когда интенсивность обслуживания скачкообразно изменяется от  $\mu = 1,4$  до стандартного 0,7. Таким образом, возможно „эффективное управление“ вероятностями состояний системы за счет краткосрочного увеличения интенсивности обслуживания на интервалах пиковых нагрузок.

*Моделирование процесса функционирования РМ в штатном режиме (при ненулевых начальных условиях).* Во всех рассмотренных выше случаях с целью выявления общих закономерностей изменения вероятностей состояний за начальное условие принималось „нулевое состояние“: вероятность нулевого состояния принималась равной единице, а вероятности остальных состояний принимались равными нулю. Как показали расчеты, при таких условиях система достаточно быстро переходит в свободное состояние и остается недозагруженной.

В действительности в штатном режиме функционирования РМ „нулевое состояние“ достигается только на момент начала эксплуатации РМ после приемки в эксплуатацию, после ремонта или после технического обслуживания. Для моделирования процесса функционирования РМ в штатном режиме в качестве начальных условий для системы (7) выберем средние значения вероятностей нахождения в каждом ее состоянии. Усреднение производится на основе многократного интегрирования (7), начиная с разных моментов времени на заданном отрезке времени с нулевым условием.

Пусть найденное таким образом среднее состояние системы достигается в начале каждой календарной недели на заданном отрезке времени, равном одному месяцу, при относительно равномерной загрузке РМ. Тогда зависимость вероятности невыполнения (ожидания выполнения) приоритетной заявки ( $P_q = P_{(2,0)}^{(1,0)} + P_{(1,1)}^{(1,0)} + P_{(0,2)}^{(1,0)}$ ) при  $\lambda = 0,65$   $\mu = 0,7$  имеет вид, изображенный на рис. 6.



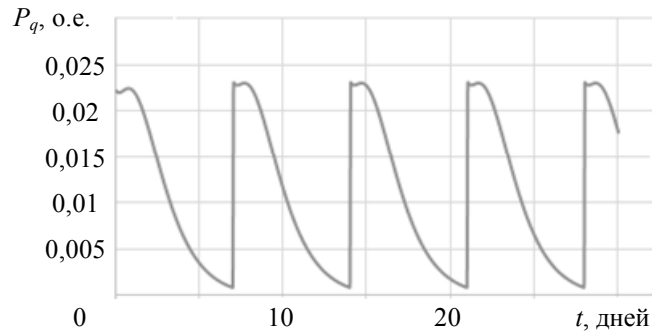


Рис. 6

Если предположить, что среднее состояние системы реализуется через каждые три дня, то график будет иметь вид, приведенный на рис. 7.

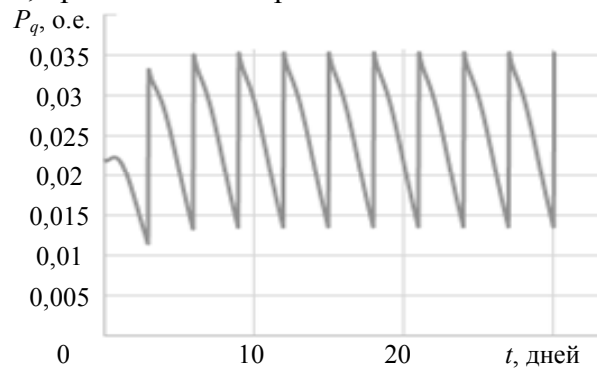


Рис. 7

Видно, что с увеличением частоты задания усредненного значения „загрузка РМ“ становится более равномерной на заданном отрезке времени.

Из рис. 6 и 7 видно, что функция  $P_q$  по своему характеру напоминает периодическую. При этом выхода функции вероятности  $P_q$  в 5 %-ную область конечного значения, равного нулю, не происходит по причине периодического поступления новых заявок.

**Оценка трудоемкости моделирования.** Представленные в статье модели НСО с ОП являются достаточно ресурсоемкими. Зависимость времени счета от размерности задачи изображена на рис. 8 синей кривой. Расчеты проводились в среде MatLab с использованием решателя ode45 на заданном отрезке времени, равном одному месяцу, на компьютере с характеристиками: 32bit SP1 Intel Core i5-2410M CPU 2.300GHz, 3,0GB RAM.

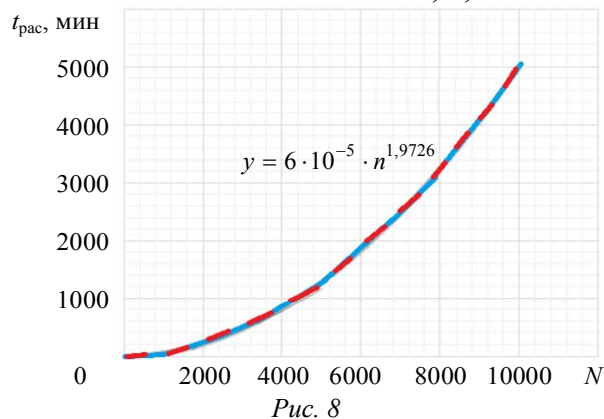


Рис. 8

По оценкам [17], время расчета моделей нестационарных систем обслуживания возрастает экспоненциально при увеличении размерности задачи (при увеличении порядка  $N$  системы дифференциальных уравнений).

Однако расчеты показали, что для рассматриваемой в настоящей работе модели НСО с ОП время расчета увеличивается как степенная функция. Красной штриховой линией показана

степенная зависимость  $t = 6 \cdot 10^{-5} \cdot n^{1,9726}$ , наилучшим образом аппроксимирующая изменение времени расчета от размерности модели. Найденная зависимость позволяет прогнозировать время расчета, необходимое для моделирования систем большой размерности, например, перспективных НСО с ОП.

Выявленный факт, видимо, объясняется тем, что матрица системы уравнений сильно разрежена. Ненулевые элементы матрицы располагаются в некоторой окрестности главной диагонали. Отметим также, что в работе [17] предложен экономичный метод решения аналогичных систем дифференциальных уравнений, также имеющий степенную зависимость.

**Заключение.** В работе представлены результаты численного моделирования динамики функционирования рабочего места поверки средств измерений как нестационарных систем обслуживания с относительными приоритетами поступающего потока заявок на поверку. Приведены оценки трудоемкости моделирования. Проиллюстрирована возможность управления вероятностями состояний системы при пиковых нагрузках за счет регулирования интенсивности на значимых отрезках времени. Такая возможность может быть использована для рационального перераспределения производственных мощностей метрологических подразделений на заданном отрезке времени при формировании календарного плана работы метрологических подразделений. Возможность управления интенсивностью проверок может быть использована для обеспечения тех или иных технических и технологических требований к рабочему месту поверки средства измерения.

Представленную модель возможно применять для обоснования технических требований при проектировании перспективных рабочих мест, которые предполагается использовать в условиях изменяющейся рабочей нагрузки на определенном интервале времени.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ершов Д. С., Хайруллин Р. З. Математическая модель рабочего места поверки средств измерений как нестационарной системы обслуживания // Изв. вузов. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 10. С. 701—711. DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-10-701-711.
2. Цициашвили Г. Ш. Нестационарная пуассоновская модель непрерывно функционирующей системы обслуживания // Вестн. Томского гос. ун-та. 2020. № 52. С. 98—103. DOI: 10.17223/19988605/52/12.
3. Гусеница Я. Н., Новиков А. Н. Принцип баланса „комплексных вероятностей“ при моделировании нестационарных систем обслуживания, представленных циклическим графом состояний // Информация и космос. 2016. № 3. С. 71—74. EDN WMIJBR.
4. Дулякин В. М., Княжева Ю. В. Имитационное моделирование нестационарной системы массового обслуживания торгового предприятия // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер.: Экономика и менеджмент. 2009. № 41(174). С. 79—84. EDN KYXFHF.
5. Шлепкин А. А. О нестационарных системах массового обслуживания // Наука, техника и образование. 2016. № 9(27). С. 29—31. EDN WMDRZF.
6. Jato-Espino D., Sillanpää N., Charlesworth S. M., Rodriguez-Hernandez J. A simulation-optimization methodology to model urban catchments under non-stationary extreme rainfall events // Environmental Modelling & Software. 2019. Vol. 122. P. 103960. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2017.05.008>.
7. Stolletz R. Approximation of the non-stationary M(t)/M(t)/c(t)-queue using stationary queueing models: The stationary backlog-carryover approach // Europ. J. of Operational Research. 2008. Vol. 190, is. 2. P. 478—493. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.06.036>.
8. Ni Ma, Ward Whitt. Efficient simulation of non-Poisson non-stationary point processes to study queueing approximations // Statistics & Probability Letters. 2016. Vol. 109. P. 202—207. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2015.11.018>.
9. Nasr W. W., Elshar I. J. Continuous inventory control with stochastic and non-stationary Markovian demand // Europ. J. of Operational Research. 2018. Vol. 270, is. 1. P. 198—217. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.03.023>.

10. Izady N., Worthington D. Approximate analysis of non-stationary loss queues and networks of loss queues with general service time distributions // *Europ. J. of Operational Research*. 2011. Vol. 213, is. 3. P. 498—508. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.03.029>.
11. Chakraborty P., Honnappa H. A many-server functional strong law for a non-stationary loss model // *Operations Research Letters*. 2021. Vol. 49, is. 3. P. 338—344. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2021.03.004>.
12. Смагин В. А., Гусеница Я. Н. Моделирование одноканальных нестационарных систем обслуживания, представленных циклическим графом состояний // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2016. Т. 59, № 10. С. 801—806. DOI 10.17586/0021-3454-2016-59-10-801-806. EDN WWPCCKX.
13. Рахматуллин А. И. Математическое моделирование и оптимизация нестационарных систем обслуживания: Дис. ... канд. техн. наук. Казань, 2004. 200 с. EDN NMSJYD.
14. Бубнов В. П., Сафонов В. И. Разработка динамических моделей нестационарных систем обслуживания. СПб: Лань, 1999. 64 с.
15. Бубнов В. П., Тырва А. В., Еремин А. С. Комплекс моделей нестационарных систем обслуживания с распределением фазового типа // *Тр. СПИИРАН*. 2014. Вып. 37. С. 61—71.
16. Смагин В. А., Гусеница Я. Н. К вопросу моделирования одноканальных нестационарных систем с произвольным распределением моментов времени поступления заявок и длительностей их обслуживания // *Тр. Военно-космической академии им. А.Ф.Можайского*. 2015. № 649. С. 53—56.
17. Бубнов В. П., Сафонов В. И., Шардаков К. С. Обзор существующих моделей нестационарных систем обслуживания и методов их расчета // *Системы управления, связи и безопасности*. 2020. № 3. С. 65—121.

#### Сведения об авторах

**Денис Сергеевич Ершов**

— канд. техн. наук; Главный научный метрологический центр, научно-исследовательский отдел; научный сотрудник; Московский политехнический университет, кафедра стандартизации, метрологии и сертификации; доцент кафедры; E-mail: [ershov.metrolog@mail.ru](mailto:ershov.metrolog@mail.ru)

**Рустам Зиннатуллович Хайруллин**

— д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник; Главный научный метрологический центр, ведущий научный сотрудник; Московский государственный строительный университет, профессор; E-mail: [zrkzrk@list.ru](mailto:zrkzrk@list.ru)

Поступила в редакцию 13.06.2023; одобрена после рецензирования 15.06.2023; принята к публикации 27.10.2023.

#### REFERENCES

1. Ershov D.S., Khayrullin R.Z. *Journal of Instrument Engineering*, 2022, no. 10(65), pp. 701—711, DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-10-701-711. (in Russ.)
2. Tsitsiashvili G.Sh. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2020, no. 50, pp. 56—60, DOI: 10.17223/19988605/50/7.
3. Novikov A.N., Gusenitsa Y.N. *Information and Space*, 2016, no. 3, pp. 71—74, EDN WMIJBR. (in Russ.)
4. Duplyakin V.M., Knyazheva Yu.V. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekonomika i menedzhment*, 2009, no. 41(174), pp. 79—84, EDN KYXFHF. (in Russ.)
5. Shlepkin A.A. *Science, Technology and Education*, 2016, no. 9(27), pp. 29—31, EDN WMDRZF. (in Russ.)
6. Jato-Espino D., Sillanpää N., Charlesworth S.M., Rodriguez-Hernandez J. *Environmental Modelling & Software*, 2019, vol. 122, pp. 103960, <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2017.05.008>.
7. Stolletz R. *European Journal of Operational Research*, 2008, no. 2(190), pp. 478—493, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.06.036>.
8. Ni Ma, Ward Whitt, *Statistics & Probability Letters*, 2016, vol. 109, pp. 202—207, <https://doi.org/10.1016/j.spl.2015.11.018>.
9. Nasr W.W., Elshar I.J. *European Journal of Operational Research*, 2018, no. 1(270), pp. 198—217, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.03.023>.
10. Izady N., Worthington D. *European Journal of Operational Research*, 2011, no. 3(213), pp. 498—508, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.03.029>.
11. Chakraborty P., Honnappa H. *Operations Research Letters*, 2021, no. 3(49), pp. 338—344, ISSN 0167-6377, <https://doi.org/10.1016/j.orl.2021.03.004>.
12. Smagin V.A., Gusenitsa Ya.N. *Journal of Instrument Engineering*, 2016, no. 10(59), pp. 801—806, DOI 10.17586/0021-3454-2016-59-10-801-806, EDN WWPCCKX. (in Russ.)
13. Rakhmatullin A.I. *Matematicheskoye modelirovaniye i optimizatsiya nestatsionarnykh sistem obsluzhivaniya* (Mathematical Modeling and Optimization of Non-Stationary Service Systems), Candidate's thesis, Kazan, 2004, 200 p., EDN NMSJYD. (in Russ.)

14. Bubnov V.P., Safonov V.I. *Razrabotka dinamicheskikh modeley nestatsionarnykh sistem obsluzhivaniya* (Development of Dynamic Models of Non-Stationary Service Systems), St. Petersburg, 1999, 64 p. (in Russ.)
15. Bubnov V., Tyrva A., Eremin A. *Informatics and Automation* (SPIIRAS Proceedings), 2014, no. 37, pp. 61–71. (in Russ.)
16. Smagin V.A., Gusenitsa Ya.N. *Proceedings of the Mozhaisky Military Space Academy*, 2015, no. 649, pp. 53–56. (in Russ.)
17. Bubnov V.P., Safonov V.I., Shardakov K.S. *Systems of Control, Communication and Security*, 2020, no. 3, pp. 65–121. (in Russ.)

**Data on authors**

- Denis S. Ershov** — PhD; Main Scientific Metrological Center, Research Department; Researcher; Moscow Polytechnic University, Department of Standardization, Metrology, and Certification; Associate Professor;  
E-mail: ershov.metrolog@mail.ru
- Rustam Z. Khayrullin** — Dr. Sci., Senior Scientist; Main Scientific Metrological Center, Leading Researcher; Moscow State University of Civil Engineering, Professor; E-mail: zrkzrk@list.ru

Received 13.06.2023; approved after reviewing 15.06.2023; accepted for publication 27.10.2023.