

**АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА**

М. Ш. ТА, А. А. ПЫРКИН\*

*Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия  
sonta1805@gmail.com, \*pyrkin@itmo.ru*

**Аннотация.** Для статического объекта управления с переменным параметром решена задача слежения с нулевой ошибкой за детерминированным задающим воздействием. Предложен алгоритм синтеза динамического регулятора, который позволяет выполнять параметризацию генераторов переменных параметров с неизвестной матрицей состояния, в котором решена проблема потенциального деления на нуль.

**Ключевые слова:** нестационарные системы, динамическая параметризация, геометрический подход, управление по выходу

**Благодарности:** работа поддержана грантом Президента Российской Федерации № МД-3574.2022.4 и Министерством науки и высшего образования РФ (паспорт госзадания № 2019-0898).

**Ссылка для цитирования:** Та М. Ш., Пыркин А. А. Алгоритм параметризации нестационарных систем с использованием динамического регулятора // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 12. С. 1050—1059. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1050-1059.

**PARAMETERIZATION ALGORITHM  
FOR NON-STATIONARY SYSTEMS USING A DYNAMIC CONTROLLER**

M. S. Ta, A. A. Pyrkin\*

*ITMO University, St. Petersburg, Russia  
sonta1805@gmail.com, \*pyrkin@itmo.ru*

**Abstract.** For a static control object with a variable parameter, the problem of tracking a deterministic reference action with zero error has been solved. An algorithm for the synthesis of a dynamic controller is proposed, which allows a parameterization of variable parameter generators with an unknown state matrix, in which the problem of potential division by zero is solved.

**Keywords:** non-stationary systems, динамическая параметризация, dynamic parameterization, geometric approach, output control

**Acknowledgments:** the work was supported by a grant from the President of the Russian Federation No. MD-3574.2022.4 and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state assignment passport No. 2019-0898).

**For citation:** Ta M. S., Pyrkin A. A. Parameterization algorithm for non-stationary systems using a dynamic controller. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 12. P. 1050—1059 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1050-1059.

**Введение.** Исследование задач управления нестационарными объектами не теряет актуальности, поскольку для большинства современных объектов управления ключевые параметры математической модели зависят от времени или от режима функционирования, что негативно сказывается на показателях качества.

Существует несколько эффективных подходов к параметризации моделей нестационарных параметров. Важно отметить, что для построения модели переменного параметра необходимо задать два вектора постоянных параметров, один из которых определяет матрицу состояния генератора этого параметра, а второй — начальные условия. Например, в статьях

[1—4] допускалось, что матрица состояния точно известна, это справедливо для линейно изменяющихся [1] и полиномиальных параметров [2, 3]. В работе [5] предпринята попытка снять допущение об известности матрицы состояния, однако выдвинуто предположение, что такой нестационарный параметр является коэффициентом при переменной, строго отличной от нуля. В статье [6] решена задача оценивания как матрицы состояния, так и начальных условий, однако для дискретной модели объекта управления, описываемого разностными уравнениями.

Алгоритмы оценивания параметров матрицы состояния могут быть синтезированы с использованием итеративного дифференцирования модели с целью явного выделения искоемых коэффициентов и получения соответствующего регрессионного соотношения при помощи леммы о перестановках [7]. В серии публикаций [8—10] развит метод оценивания вектора начальных условий динамических генераторов, в этих работах также формируется линейное регрессионное соотношение с вектором искоемых параметров и измеряемыми (вычислимыми) сигналами.

В настоящей работе решена задача слежения с нулевой ошибкой за детерминированным задающим воздействием и предложен алгоритм синтеза динамического регулятора, который позволяет выполнять параметризацию генераторов переменных характеристик с неизвестной матрицей состояния, в котором, в отличие от [5], преодолена проблема потенциального деления на нуль.

**Постановка задачи.** Рассмотрим модель статического объекта управления

$$y(t) = \theta(t)u(t) \quad (1)$$

с выходной регулируемой переменной  $y(t) \in R$ , управляющим воздействием  $u(t) \in R$  и нестационарным параметром, являющимся выходом линейного генератора с переменными состояниями  $\xi(t) \in R^n$ :

$$\theta(t) = h^T \xi(t), \quad \dot{\xi}(t) = \Gamma \xi(t), \quad (2)$$

с некоторыми начальными условиями  $\xi(0)$  и параметрами

$$h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \Gamma_0 + b\gamma^T, \quad \Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix},$$

где  $I_{n-1}$  — единичная матрица размерности  $n-1$ , а все элементы вектора  $\gamma$  являются константами, которые могут быть априори неизвестными.

В предположении  $\theta(t) \neq 0$ , с использованием измерения только выходной переменной  $y(t)$  требуется синтезировать закон управления  $u(t)$ , обеспечивающий выполнение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y^*(t)) = 0, \quad (3)$$

где переменная  $y^*(t)$  означает желаемое поведение выходной переменной и может быть задана в виде линейного генератора с состоянием  $\zeta(t) \in R^m$  и точно определенными значениями параметров  $l \in R^m$ ,  $M \in R^{m \times m}$ ,  $\zeta(0) \in R^m$ :

$$y^*(t) = l^T \zeta(t), \quad \dot{\zeta}(t) = M\zeta(t). \quad (4)$$

**Предварительный анализ задачи.** Достаточно очевиден выбор закона управления, если известно мгновенное значение параметра  $\theta(t)$  в каждый момент времени:  $u(t) = \frac{y^*(t)}{\theta(t)}$ .

Если параметр  $\theta(t)$  заранее неизвестен, но доступны значения элементов вектора параметров  $\gamma$ , то синтез закона управления также не представляет больших трудностей (он описан в публикациях [4, 10]). В самом деле, проинтегрировав уравнение (2), нетрудно найти

$$\xi(t) = e^{\Gamma t} \xi(0),$$

откуда можно получить линейное регрессионное уравнение вида

$$y(t) = \eta^T \phi(t) \quad (5)$$

с вычислимым регрессором  $\phi(t) = h^T e^{\Gamma t} u(t)$  и вектором неизвестных параметров  $\eta = \xi(0)$ . На основе (5) можно получить оценки постоянных параметров вектора  $\eta$  и переменного параметра  $\hat{\theta}(t) = h^T e^{\Gamma t} \hat{\eta}$ , что позволит синтезировать управление:  $u(t) = \frac{y^*(t)}{\hat{\theta}(t)}$ .

В случае полной параметрической неопределенности модели параметра  $\theta(t)$  даже для статического объекта вида (1) решение неочевидно. В следующем разделе представлен подход, основанный на выборе динамического регулятора, позволяющего оценить неизвестные параметры модели параметра  $\theta(t)$  (вектор  $\gamma$  и начальные условия  $\xi(0)$ ), а также определить закон управления  $u(t)$ , обеспечивающий достижение цели (3).

**Параметризация нестационарной модели.** Чтобы получить соотношение с вектором параметров  $\gamma$  в явном виде, продифференцируем уравнение (1)  $n$  раз. Параметр  $\theta$  и соответствующие производные будем выражать через вектор состояния генератора  $\xi(t)$ . Тогда получим соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= (\dot{u}(t)h^T + u(t)h^T\Gamma)\xi(t), \\ \ddot{y}(t) &= (\ddot{u}(t)h^T + 2\dot{u}(t)h^T\Gamma + u(t)h^T\Gamma^2)\xi(t), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t) &= (u^{(n-1)}(t)h^T + (n-1)u^{(n-2)}(t)h^T\Gamma + \dots + u(t)h^T\Gamma^{n-1})\xi(t), \\ y^{(n)}(t) &= (u^{(n)}(t)h^T + nu^{(n-1)}(t)h^T\Gamma + \dots + C_n^k u^{(n-k)}(t)h^T\Gamma^k + \dots + u(t)h^T\Gamma^n)\xi(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где в последнем уравнении  $C_n^k$  обозначает сочетание из  $n$  по  $k$ , где  $k = \overline{1, n}$ , что соответствует коэффициентам разложения бинома Ньютона.

Введем обозначение  $h_i$  для вектор-столбца, в котором элемент с номером  $i$  равен 1, а все остальные элементы — 0. В силу структуры матриц  $\Gamma$  и  $h$  заметим, что

$$h = h_1, \quad h^T\Gamma = h_2^T, \quad h^T\Gamma^{n-1} = h_n, \quad h^T\Gamma^n = \gamma^T.$$

Тогда система (6) примет вид (для удобства опустим аргумент времени):

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} & u & 0 & \dots & 0 \\ \ddot{u} & 2\dot{u} & u & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u^{(n-1)} & (n-1)u^{(n-2)} & C_{n-1}^2 u^{(n-3)} & \dots & u \\ u^{(n)} + \gamma_1 u & n u^{(n-1)} + \gamma_2 u & C_n^2 u^{(n-2)} + \gamma_3 u & \dots & n\dot{u} + \gamma_n u \end{bmatrix} \xi. \quad (7)$$

Выразим вектор  $\xi$  из (7) и подставим в (1) с учетом (2):

$$y = u h^T W^{-1} Y, \quad (8)$$

$$W = \begin{bmatrix} \dot{u} & u & 0 & \dots & 0 \\ \ddot{u} & 2\dot{u} & u & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u^{(n-1)} & (n-1)u^{(n-2)} & C_{n-1}^2 u^{(n-3)} & \dots & u \\ u^{(n)} + \gamma_1 u & n u^{(n-1)} + \gamma_2 u & C_n^2 u^{(n-2)} + \gamma_3 u & \dots & n\dot{u} + \gamma_n u \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{bmatrix}.$$

В результате получим основу для линейного регрессионного соотношения относительно вектора неизвестных параметров  $\gamma$ . Однако (8) содержит недоступные сигналы производных выходной переменной  $y$  и управления  $u$ .

*Утверждение 1.* Пусть сигнал управления является выходом динамической системы вида

$$u(t) = h^T \chi(t), \quad \dot{\chi}(t) = \Gamma_0 \chi(t) + b v(t) \quad (9)$$

с начальными условиями  $\chi(0)$  и новым управляющим входом  $v(t)$ . Тогда для системы (1), (2) существует линейное регрессионное соотношение вида

$$z(t) = \gamma^T q(t) \quad (10)$$

с доступными для вычисления функциями времени  $z(t) \in R$  и  $q(t) \in R^n$ .

*Доказательство утверждения 1.* Благодаря выбору управления в виде (9) можно видеть, что все переменные вектора  $\chi$  и новый параметр управления  $v$  доступны для дальнейшего синтеза, откуда следует, что матрица  $W$  зависит от параметров  $\gamma$  и доступных сигналов:

$$W = \begin{bmatrix} \chi_2 & \chi_1 & 0 & \dots & 0 \\ \chi_3 & 2\chi_2 & \chi_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_n & (n-1)\chi_{n-1} & C_{n-1}^2 \chi_{n-2} & \dots & \chi_1 \\ v + \gamma_1 \chi_1 & n \chi_n + \gamma_2 \chi_1 & C_n^2 \chi_{n-1} + \gamma_3 \chi_1 & \dots & n\chi_2 + \gamma_n \chi_1 \end{bmatrix}.$$

Перепишем (8) в виде

$$\chi_1 h^T (\text{adj} W) Y = y (\det W), \quad (11)$$

Для исключения недоступных производных переменной  $y$  в (11) используем линейный стационарный фильтр вида  $\frac{1}{(p+\alpha)^n}$ , где  $p = \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования,  $\alpha > 0$  — настроечный параметр:

$$\frac{1}{(p+\alpha)^n} [\chi_1 h^T (\text{adj} W) Y] = \frac{1}{(p+\alpha)^n} [(\det W) y]. \quad (12)$$

Заметим, что выражение  $(\det W)y$  представимо в виде

$$(\det W)y = \gamma^T q_0 + z_0, \quad (13)$$

где  $q_0 = q_0(t) \in R^n$  и  $z_0 = z_0(t) \in R$  — вычисляемые функции времени. В самом деле, вычислив определитель матрицы  $W$  поэлементно по нижней строке, легко увидеть соотношение (13). Для определения вида вектор-строки  $h^T(\text{adj}W)$  необходимо воспользоваться правилом Крамера, позволяющего вычислить все элементы вектора как определители матрицы, полученной из  $W$  путем замены каждой строки на  $h^T$ . Пользуясь логикой вычисления определителя, предложенной выше, нетрудно показать, что каждый элемент вектор-строки  $\chi_1 h^T(\text{adj}W)$  с номером  $i = \overline{1, n}$  имеет вид  $\gamma^T q_i + z_i$ , где  $q_i = q_i(t) \in R^n$  и  $z_i = z_i(t) \in R$  — известные функции времени. Также можно заметить, что  $q_n = 0$ . Таким образом, выражение (12) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{(p+\alpha)^n} \begin{bmatrix} \gamma^T q_1 + z_1 \\ \vdots \\ \gamma^T q_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \gamma^T \frac{1}{(p+\alpha)^n} [q_0] + \frac{1}{(p+\alpha)^n} [z_0]. \quad (14)$$

Приведя подобные слагаемые, можно получить соотношение вида (10), где

$$z = \frac{1}{(p+\alpha)^n} [z_0] - \frac{1}{(p+\alpha)^n} \left[ \sum_{i=1}^n (z_i y^{(i)}) \right], \quad q = \frac{1}{(p+\alpha)^n} \left[ \sum_{i=1}^n (q_i y^{(i)}) \right] - \frac{1}{(p+\alpha)^n} [q_0]. \quad (15)$$

Выражения (15) вычислимы благодаря лемме о перестановках (*swapping lemma*) [7].

Фильтр  $\frac{1}{(p+\alpha)^n}$  представим в виде  $\frac{1}{(p+\alpha)^{n-i}} \frac{1}{(p+\alpha)^i}$ . Далее  $i$  раз итеративно применим фильтр  $\frac{1}{p+\alpha}$  к произведениям  $(z_i y^{(i)})$  и  $(q_i y^{(i)})$ , вынося за пределы действия оператора функции  $z_i$  и  $q_i$  соответственно. Производные  $y^{(i)}$  в результате преобразований будут заменены на вычисляемые функции  $\frac{p^i}{(p+\alpha)^i} [y]$ . Однако необходимо в результате применения

леммы о перестановках дифференцировать выражения  $z_i$  и  $q_i$  как минимум  $i$  раз.

В силу структуры матрицы  $W$  и закона управления (9) можно показать, что функции  $z_i^{(i)}$  и  $q_i^{(i)}$  вычислимы. В самом деле, выражения  $z_i$  и  $q_i$  являются функциями от производных управления, где старшая производная имеет степень  $(n-i)$ , что может быть установлено при вычислении этих функций с помощью правила Крамера. Поскольку закон управления (9) позволяет использовать  $n$  производных от управляющего воздействия  $u$ , то можно заключить, что утверждение доказано. ■

С целью иллюстрации применения Утверждения 1 рассмотрим частные случаи выражения (12) для различных  $n$ . Для  $n=1$  имеем скалярную матрицу  $W_1 := W|_{n=1} = v + \gamma_1 \chi_1$ , как следствие, (12) примет вид

$$\frac{1}{p+\alpha} [\chi_1 \dot{y}] = \frac{1}{p+\alpha} [(v + \gamma_1 \chi_1) y],$$

откуда с использованием леммы о перестановках получим соотношение вида

$$\chi_1 \frac{p}{p+\alpha} [y] - \frac{1}{p+\alpha} \left[ v \frac{p}{p+\alpha} [y] \right] - \frac{1}{p+\alpha} [y v] = \gamma_1 \frac{1}{p+\alpha} [\chi_1 y],$$

что соответствует (10). Для  $n = 2$  задача усложняется видом матрицы  $W$ :

$$W_2 := W|_{n=2} = \begin{bmatrix} \chi_2 & \chi_1 \\ v + \gamma_1 \chi_1 & 2\chi_2 + \gamma_2 \chi_1 \end{bmatrix}, \quad \text{adj} W_2 = \begin{bmatrix} 2\chi_2 + \gamma_2 \chi_1 & -\chi_1 \\ -v - \gamma_1 \chi_1 & \chi_2 \end{bmatrix},$$

$$\det W_2 = 2\chi_2^2 - v\chi_1 - \gamma_1 \chi_1^2 + \gamma_2 \chi_1 \chi_2.$$

Выражение (12) представим в виде

$$\frac{1}{(p+\alpha)^2} \left[ 2\chi_1 \chi_2 \dot{y} + \gamma_2 \chi_1^2 \dot{y} - \chi_1^2 \ddot{y} \right] = \frac{1}{(p+\alpha)^2} \left[ y \left( 2\chi_2^2 - v\chi_1 - \gamma_1 \chi_1^2 + \gamma_2 \chi_1 \chi_2 \right) \right]. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что с использованием леммы о перестановках правая часть (12) может быть преобразована в виде суммы компонентов выражения (16), покажем это также для левой части, рассмотрев все слагаемые без учета постоянных коэффициентов, которые могут быть вынесены за пределы действия линейного оператора:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+\alpha)^2} [\chi_1 \chi_2 \dot{y}] &= \frac{1}{p+\alpha} \left[ \chi_1 \chi_2 \frac{p}{p+\alpha} [y] - \frac{1}{p+\alpha} \left[ (\chi_2^2 + \chi_1 v) \frac{p}{p+\alpha} [y] \right] \right], \\ \frac{1}{(p+\alpha)^2} [\chi_1^2 \dot{y}] &= \frac{1}{p+\alpha} \left[ \chi_1^2 \frac{p}{p+\alpha} [y] - \frac{1}{p+\alpha} \left[ 2\chi_1 \chi_2 \frac{p}{p+\alpha} [y] \right] \right], \\ \frac{1}{(p+\alpha)^2} [\chi_1^2 \ddot{y}] &= \frac{1}{p+\alpha} \left[ \chi_1^2 \frac{p^2}{p+\alpha} [y] - \frac{1}{p+\alpha} \left[ 2\chi_1 \chi_2 \frac{p^2}{p+\alpha} [y] \right] \right] = \\ &= \chi_1^2 \frac{p^2}{(p+\alpha)^2} [y] - 4 \frac{1}{p+\alpha} \left[ \chi_1 \chi_2 \frac{p^2}{(p+\alpha)^2} [y] \right] + 2 \frac{1}{(p+\alpha)^2} \left[ (\chi_2^2 + \chi_1 v) \frac{p^2}{(p+\alpha)^2} [y] \right], \end{aligned}$$

Выражение (12) соответствует (10), где все функции вычислимы:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{(p+\alpha)^2} \left[ 2\chi_2^2 y - v\chi_1 y \right] - 2 \frac{1}{p+\alpha} \left[ \chi_1 \chi_2 \frac{p}{p+\alpha} [y] - \frac{1}{p+\alpha} \left[ (\chi_2^2 + \chi_1 v) \frac{p}{p+\alpha} [y] \right] \right] + \\ &\chi_1^2 \frac{p^2}{(p+\alpha)^2} [y] - 4 \frac{1}{p+\alpha} \left[ \chi_1 \chi_2 \frac{p^2}{(p+\alpha)^2} [y] \right] + 2 \frac{1}{(p+\alpha)^2} \left[ (\chi_2^2 + \chi_1 v) \frac{p^2}{(p+\alpha)^2} [y] \right], \\ q_1 &= \frac{1}{(p+\alpha)^2} [\chi_1^2 y], \quad q_2 = \frac{1}{p+\alpha} \left[ \chi_1^2 \frac{p}{p+\alpha} [y] - \frac{1}{p+\alpha} \left[ 2\chi_1 \chi_2 \frac{p}{p+\alpha} [y] \right] \right] - \frac{1}{(p+\alpha)^2} [\chi_1 \chi_2 y]. \end{aligned}$$

**Синтез наблюдателя нестационарного параметра и производных выхода.** На первом шаге благодаря Утверждению 1 имеем линейное регрессионное уравнение (10), на основе которого может быть сформирован вектор оценок  $\hat{\gamma}(t)$ , стремящийся асимптотически или за конечное время к параметрам вектора  $\gamma$ . Для этого необходимо воспользоваться, например, методом наименьших квадратов [11], методом градиентного спуска [11] или методом динамического расширения и смешивания регрессора (DREM) [12]. В настоящей статье будем считать, что для синтеза доступен вектор  $\hat{\gamma}(t) = \gamma + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t$  является обобщенным обозначением функции времени, экспоненциально стремящейся к нулю.

На втором шаге благодаря соотношению (5) может быть сформирован вектор оценок  $\hat{\eta}(t) = \xi(0) + \varepsilon_t$ . Следовательно, можно синтезировать наблюдатель переменных состояния генератора нестационарного параметра

$$\hat{\xi}(t) = e^{(\Gamma_0 + b\hat{\gamma}^T)t} \hat{\eta}(t), \quad (17)$$

для которого нетрудно установить, что  $\hat{\xi}(t) = \xi(t) + \varepsilon_t$ .

На третьем шаге на основе (7) можно построить наблюдатель  $(n-1)$  производных выходной переменной  $y(t)$ :

$$\begin{bmatrix} \hat{y} \\ \dot{\hat{y}} \\ \ddots \\ \hat{y}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_2 & \chi_1 & 0 & \dots & 0 \\ \chi_3 & 2\chi_2 & \chi_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_n & (n-1)\chi_{n-1} & C_{n-1}^2 \chi_{n-2} & \dots & \chi_1 \end{bmatrix} \hat{\xi}(t), \quad (18)$$

где можно показать экспоненциальный характер сходимости к нулю ошибок оценивания для (18), а именно  $\hat{y}^{(l)} - y^{(l)} = \varepsilon_t$ ,  $l = \overline{1, (n-1)}$ .

**Синтез закона управления.** Напомним, что закон управления  $u(t)$  задан выражением (9), в котором требуется доопределить сигнал  $v(t)$ , обеспечивающий достижение цели (3). Введем в рассмотрение переменную ошибки слежения  $e(t) = y(t) - y^*(t)$  и запишем выражения для ее производной степени  $n$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \vdots \\ e^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{y}^* \\ \vdots \\ y^{*(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l^T M \zeta \\ \vdots \\ l^T M^n \zeta \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Для  $e^{(n)}$  с учетом (7) имеем:

$$e^{(n)} = g^T \xi - l^T M^n \zeta + \xi_1 v, \quad (20)$$

где  $g = g(\gamma) = [\gamma_1 \chi_1 \quad n \chi_n + \gamma_2 \chi_1 \quad C_n^2 \chi_{n-1} + \gamma_3 \chi_1 \quad \dots \quad n \chi_2 + \gamma_n \chi_1]^T$ .

**Утверждение 2.** Реализуемый закон управления (9) обеспечивает выполнение цели (3), если функция  $v(t)$  вычислена по формуле

$$v(t) = \beta^{-1} \left( -g(\hat{\gamma})^T \hat{\xi} + l^T M^n \zeta - L^T \hat{\sigma} \right), \quad (21)$$

наблюдатели  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\xi}$  определены в предыдущем разделе, функции  $\hat{\sigma}$  и  $\beta$ :

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{y} \\ \vdots \\ \hat{y}^{(n-1)} \end{bmatrix} - l^T \begin{bmatrix} I \\ M \\ \vdots \\ M^{n-1} \end{bmatrix} \zeta, \quad \beta = \begin{cases} \hat{\xi}_1, & \text{если } |\hat{\xi}_1| \geq \rho, \\ \rho, & \text{если } |\hat{\xi}_1| < \rho \end{cases} \quad (22)$$

для некоторого  $\rho > 0$ , а вектор  $L$  соответствует коэффициентам гурвицева полинома  $\ell(p)$  степени  $n$ :

$$\ell(p) = p^n + \ell_0(p) = p^n + L^T \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ \vdots \\ p^{n-1} \end{bmatrix}.$$

*Доказательство Утверждения 2.* Оценки  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\xi}$  могут быть представлены как сумма наблюдаемого параметра и сигнала соответственно и экспоненциально затухающей функции времени  $\varepsilon_t$ , а функция  $\hat{\sigma}$  означает оценку вектора  $\text{col}(e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})$ :

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \vdots \\ e^{(n-1)} \end{bmatrix} + \varepsilon_t = \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ \vdots \\ p^{n-1} \end{bmatrix} e(t) + \varepsilon_t.$$

Следовательно, для (21) можно показать

$$v(t) = \beta^{-1} \left( -g(\gamma)^T \xi + l^T M^n \zeta - \ell_0^T(p) e(t) \right) + \varepsilon_t, \quad \beta = \xi_1 + \varepsilon_t.$$

Тогда (20) примет вид

$$p^n e(t) = -\ell_0^T(p) e(t) + \varepsilon_t, \quad \text{или} \quad \ell(p) e(t) = \varepsilon_t,$$

откуда следует экспоненциальное стремление к нулю переменной  $e(t)$ . ■

**Пример численного моделирования.** Рассмотрим объект (1), (2) и задающее воздействие (4) с параметрами

$$n = m = 3, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Алгоритмы оценивания  $\hat{\gamma}$  и  $\hat{\eta}$  выбраны с помощью метода DREM для декомпозиции векторных регрессионных уравнений (10) и (5) на скалярные регрессионные уравнения с теми же параметрами [12].

Размерность регрессора в уравнении (10) для числового примера равна 1, и алгоритм оценивания  $\hat{\gamma}$  выбран в виде

$$\dot{\hat{\gamma}}(t) = k_\gamma q(t) (z(t) - q(t) \hat{\gamma}(t)), \quad k_\gamma = 10.$$

Размерность регрессора в уравнении (5) для числового примера равна 3. Согласно методу DREM выбраны два оператора запаздывания  $\tau_1 = 0,2$  и  $\tau_2 = 0,4$  и масштабирующий коэффициент  $\mu = 2$  для получения матричного регрессионного уравнения вида

$$Y(t) = \Phi(t) \eta, \quad Y(t) = \mu \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t - \tau_1) \\ y(t - \tau_2) \end{bmatrix}, \quad \Phi(t) = \mu \begin{bmatrix} \phi^T(t) \\ \phi^T(t - \tau_1) \\ \phi^T(t - \tau_2) \end{bmatrix},$$

на основе которого формируется алгоритм оценивания параметров  $\eta$ :

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = k_\eta \Delta(t) (\varpi(t) - \Delta(t) \hat{\eta}(t)), \quad \Delta = \det \Phi, \quad \varpi = (\text{adj} \Phi) Y, \quad k_\eta = 0,3.$$

На рис. 1 представлены результаты моделирования алгоритма управления (21), (22) с адаптивными наблюдателями (17), (18), где оценки  $\hat{\gamma}$  и  $\hat{\eta}$  синтезируются последовательно с



помощью регрессионных моделей (10) и (5); рис. 1 — нормы ошибок оценивания параметров  $\gamma$  и  $\eta = \xi(0)$ , рис. 2 — ошибки оценивания параметра  $\theta(t)$  и регулирования  $e(t)$ .

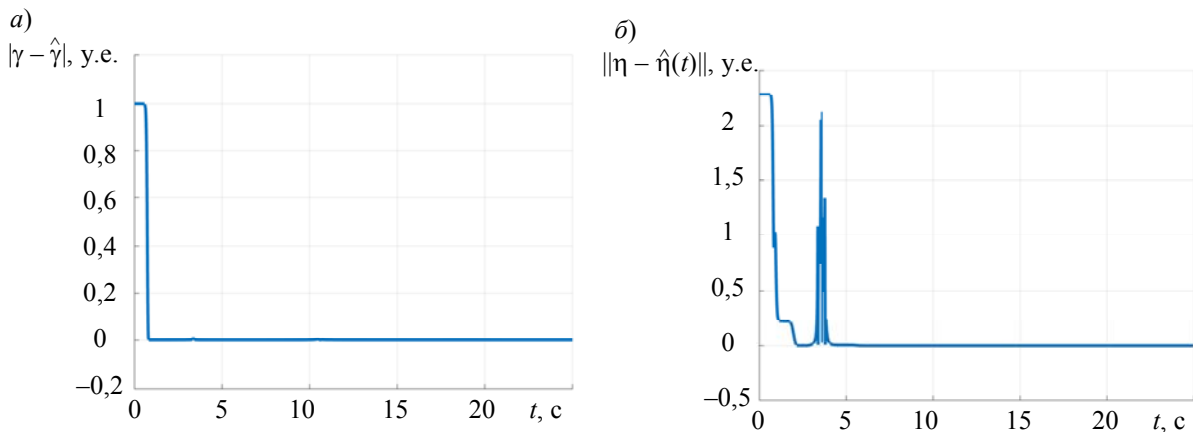


Рис. 1

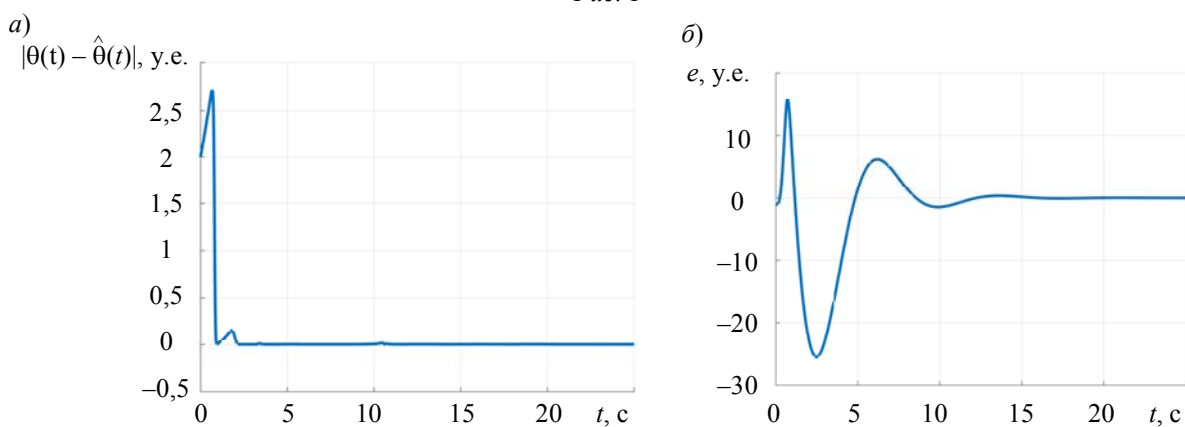


Рис. 2

**Заключение.** В статье предложен алгоритм синтеза законов адаптивного управления нестационарными объектами с неопределенностями, развивающий метод внутренней модели. Рассмотрен статический объект управления для того, чтобы подробно показать методику синтеза регулятора. Более общие случаи произвольного динамического порядка будут рассмотрены в последующих работах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ле В. Т., Коротина М. М., Бобцов А. А., Арановский С. В., Во К. Д. Идентификация линейно изменяющихся во времени параметров нестационарных систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 5. С. 259—265.
2. Данг Б., Пыркин А. А., Бобцов А. А., Ведяков А. А. Идентификация полиномиальных параметров нестационарных линейных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 6. С. 459—468.
3. Данг Х. Б., Пыркин А. А., Бобцов А. А., Ведяков А. А., Низовцев С. И. Синтез адаптивных наблюдателей по выходу для линейных нестационарных систем с полиномиальными параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22, № 8. С. 404—410.
4. Pyrkina A., Bobtsov A., Ortega R., Isidori A. An adaptive observer for uncertain linear time-varying systems with unknown additive perturbations // Automatica. 2023. Vol. 147. P. 110677.
5. Пыркин А. А., Бобцов А. А., Нгуен Х. Т. Алгоритм адаптивного оценивания параметров для класса нелинейных нестационарных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 4. С. 266—275.
6. Pyrkina A., Ta M. S., Nguen Q. C., Sinetova M. Adaptive observer design for time-varying systems with relaxed excitation conditions // IFAC-PapersOnLine. 2022. Vol. 55, N 12. P. 312—317.

7. Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Vedyakov A., Aranovskiy S. Adaptive state observers using dynamic regressor extension and mixing // *Systems & Control Letters*. 2019. Vol. 133. P. 104519.
8. Ortega R., Bobtsov A., Pyrkin A., Aranovskiy S. A parameter estimation approach to state observation of nonlinear systems // *Systems & Control Letters*. 2015. Vol. 85. P. 84–94.
9. Ortega R., Bobtsov A., Dochain D., Nikolaev N. State observers for reaction systems with improved convergence rates // *Journal of Process Control*. 2019. Vol. 83. P. 53–62.
10. Ortega R., Bobtsov A., Nikolaev N., Schiffer J., Dochain D. Generalized parameter estimation-based observers: Application to power systems and chemical-biological reactors // *Automatica*. 2021. Vol. 129. P. 109635.
11. Льюнг Л. Идентификация систем: Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 432 с.
12. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A. A., Astolfi A., Bobtsov A. A. New results on parameter estimation via dynamic regressor extension and mixing: Continuous and discrete-time cases // *IEEE Transact. on Automatic Control*. 2020. Vol. 66, N 5. P. 2265–2272.

**Сведения об авторах****Минь Шон Та**— Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники;  
E-mail: sonta1805@gmail.com**Антон Александрович Пыркин**

— д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: pyrkin@itmo.ru

Поступила в редакцию 03.07.2023; одобрена после рецензирования 12.07.2023; принята к публикации 27.10.2023.

**REFERENCES**

1. Le V.T., Korotina M.M., Bobtsov A.A., Aranovskiy S.V., Vo Q.D. *Mechatronics, Automation, Control*, 2019, no. 5(20), pp. 259–265. (in Russ.)
2. Dung Kh.B., Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Vedyakov A.A. *Journal of Instrument Engineering*, 2021, no. 6(64), pp. 459–468. (in Russ.)
3. Dung Kh.B., Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Vedyakov A.A., Nizovtsev S.I. *Mechatronics, Automation, Control*, 2021, no. 8(22), pp. 404–410. (in Russ.)
4. Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Isidori A. *Automatica*, 2023, vol. 147, pp. 110677.
5. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Nguen K.T. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 4(66), pp. 266–275. (in Russ.)
6. Pyrkin A., Ta M.S., Nguen Q.C., Sinetova M. *IFAC-PapersOnLine*, 2022, no. 12(55), pp. 312–317.
7. Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Vedyakov A., Aranovskiy S. *Systems & Control Letters*, 2019, vol. 133, pp. 104519.
8. Ortega R., Bobtsov A., Pyrkin A., Aranovskiy S. *Systems & Control Letters*, 2015, vol. 85, pp. 84–94.
9. Ortega R., Bobtsov A., Dochain D., Nikolaev N. *Journal of Process Control*, 2019, vol. 83, pp. 53–62.
10. Ortega R., Bobtsov A., Nikolaev N., Schiffer J., Dochain D. *Automatica*, 2021, vol. 129, pp. 109635.
11. Ljung L. *System Identification, Theory for the User*, NJ, PTR Prentice Hall, 1987.
12. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A.A., Astolfi A., Bobtsov A.A. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, no. 5(66), pp. 2265–2272.

**Data on authors****Minh Shon Ta**— ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics;  
E-mail: sonta1805@gmail.com**Anton A. Pyrkin**— Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics;  
E-mail: pyrkin@itmo.ru

Received 03.07.2023; approved after reviewing 12.07.2023; accepted for publication 27.10.2023.

---

---

**ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ И ДИАГНОСТИКИ  
МАТЕРИАЛОВ, ИЗДЕЛИЙ, ВЕЩЕСТВ И ПРИРОДНОЙ СРЕДЫ**

**INSTRUMENTS AND METHODS FOR MONITORING AND DIAGNOSING  
MATERIALS, PRODUCTS, SUBSTANCES AND THE NATURAL ENVIRONMENT**

---

---

УДК 921.01  
DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1060-1066

**ОЦЕНКА ТВЕРДОСТИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ИСПЫТАНИИ НА ИЗНОС МЕТОДОМ ХОРДЫ**

Л. В. ЕФРЕМОВ<sup>1\*</sup>, А. В. ТИКАЛОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия*  
*\*levlefr@mail.ru*

<sup>2</sup> *Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия*

**Аннотация.** Предложен метод оценки твердости материалов путем испытаний их образцов на износ методом хорды („block-on-ring“). В его основу положены принципы определения твердости на стационарных твердомерах и результаты ранее выполненного анализа корреляционной зависимости твердости по Моосу от износостойкости материалов. Такие зависимости получены путем измерений хорды сегмента износа, обусловленного врезанием диска в плоский образец, для выборочной совокупности материалов в широком диапазоне значений твердости.

**Ключевые слова:** износ, износостойкость, образец, оценка, сегмент, тестирование, трение, хорда, block-on-ring

**Ссылка для цитирования:** Ефремов Л. В., Тикалов А. В. Оценка твердости материалов при испытании на износ методом хорды // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 12. С. 1060—1066. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1060-1066.

**EVALUATION OF MATERIAL HARDNESS USING WEAR TESTING BY CHORD METHOD**

L. V. Efremov<sup>1\*</sup>, A. V. Tikalov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS, St. Petersburg, Russia*  
*\*levlefr@mail.ru*

<sup>2</sup> *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia*

**Abstract.** A new method for assessing the hardness of materials by testing their samples for wear by the chord method (“block-on-ring”) is proposed. It is based on the principles of determining hardness with stationary hardness testers and results of a previously performed analysis of the correlation dependence of Mohs hardness on the material resistance to wear. Such dependencies are obtained by measuring the wear segment chord from cutting a disk into a flat sample for a selective set of materials in a wide range of hardness.

**Keywords:** wear, wear resistance, sample, evaluation, segment, testing, friction, chord, block-on-ring

**For citation:** Efremov L. V., Tikalov A. V. Evaluation of material hardness using wear testing by chord method. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 12. P. 1060—1066 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1060-1066.

В последнее время износостойкость материалов активно оценивается с помощью метода хорды „block-on-ring“ [1]. В настоящей работе рассматривается применение этого метода

для трибометра СМЦ-2 [2] с узлом трения, состоящим из кольца или диска диаметром  $D = 50$  мм и прямоугольного бруска (блока) шириной  $H = 10$  мм. На брусок действует постоянная сила  $F = 200$  Н, а кольцо вращается с частотой  $n = 100$  об/мин. За время сеанса испытаний  $t = 10$  мин кольцо врезается в плоскую поверхность бруска, образуя объемный износ  $W$  (мм<sup>3</sup>) в виде сегмента с хордой  $L$  (мм). При этом кольцо совершает  $C = n \cdot t = 1000$  циклов вращения и проходит путь  $S = \pi DC = 157\,079,6$  мм относительно образца.

На рис. 1, а представлена схема вырезания лунки на поверхности плоского бруска ( $h$  — глубина сегмента при угле хорды  $\varphi$ ); на рис. 1, б приведены фотографии исследуемых брусков, выполненных из различных материалов. Хорда является основным диагностическим параметром испытаний, от которого зависят все остальные параметры, приведем формулы их расчета (для указанных выше значений  $D$ ,  $H$ ,  $F$ ,  $n$  и  $t$ ) с приемлемой погрешностью менее 3 % для испытаний при граничном трении [3]:

— путь трения

$$S = \pi D n t = \pi D C = 157\,079,6 \text{ мм}; \quad (1)$$

— линейный износ

$$h = L^2 / (6 D) = L^2 / 300 \text{ мм}; \quad (2)$$

— пятно контакта

$$B = L H = 10 L \text{ мм}^2; \quad (3)$$

— удельное давление

$$P = F / B = F / (L H) = \frac{20}{L} \text{ МПа}; \quad (4)$$

— объемный износ

$$W = L^3 H / (6 D) = h L H = h B = 0,033 L^3 \text{ мм}^3; \quad (5)$$

— объемная износостойкость

$$\varepsilon_w = F S / W = F 6 \pi D^2 C / (1000 L^3 H) = 9,42 \cdot 10^5 / L^3 \text{ Нм/мм}^3; \quad (6)$$

— линейная износостойкость

$$\varepsilon_L = S / h = 1000 \varepsilon_w / P = 4,71 \cdot 10^7 / L^2 \text{ мм/мм}. \quad (7)$$

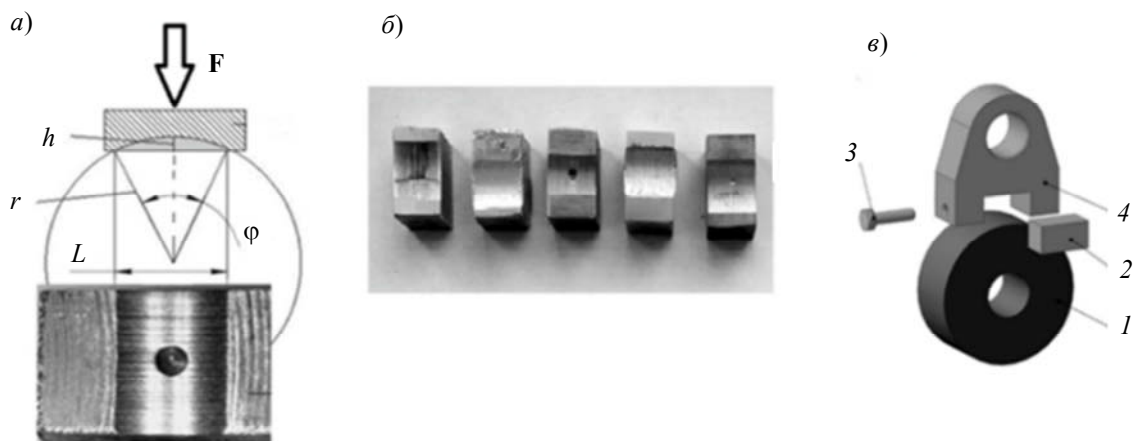


Рис. 1

Поставленная в настоящей работе задача сводится к обоснованию корреляционных зависимостей твердости по шкале Мооса  $\theta$  от указанных в формулах (1)—(7) параметров, полученных путем испытаний на износ ряда материалов [4].

Испытания материалов на износ методом хорды выполнялась при следующих условиях,

Условие № 1. Спроектировать, изготовить и установить на трибометр СМЦ-2 пару трения по эскизу рис. 1, в, где исследуемый брусок 2 размещается в держателе специальном 4 и

фиксируется винтом стопорным 3. При этом брусок (длиной 20 и шириной 10 мм) опирается на диск 1 (диаметром 50 мм и высотой 25 мм) под нагрузкой  $F = 200$  Н. Твердость материала диска должна быть больше, чем у бруска.

Условие № 2. Обеспечить работу этого устройства для двух вариантов скольжения: при граничном и абразивном трении. Граничное трение создается за счет погружения нижней части диска в ванну, наполненную маслом, при гладких контактных поверхностях диска и бруска (рис. 2, а). Сухое абразивное трение обеспечивается наклеиванием на диск мелкозернистой абразивной шкурки с размером зерна 25 мкм (рис. 2, б; 1 — брусок, 2 — диск, 3 — масло, 4 — шкурка).

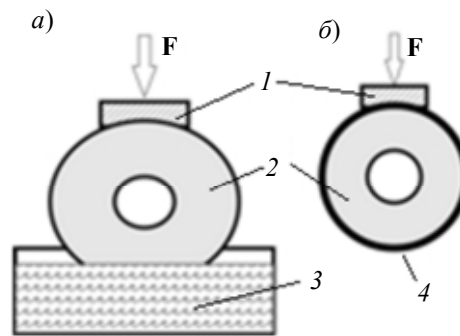


Рис. 2

Условие № 3. Провести испытания на износ ряда образцов материалов при граничном и абразивном трении с соблюдением принципа неизменности стандартного режима испытаний:  $D = 50$  мм,  $H = 10$  мм,  $F = 200$  Н,  $n = 100$  об/мин,  $t = 10$  мин и  $C = 1000$  циклов. Выбрать материалы с показателем твердости НВ от 20 до 1000 МПа.

Условие № 4. Измеряемым параметром испытаний принять размер хорды  $L$ , который позволяет рассчитать значения  $S$ ,  $h$ ,  $B$ ,  $P$ ,  $W$ ,  $\varepsilon_L$  и  $\varepsilon_W$  каждого образца по формулам (1)–(7). При изучении абразивного трения применяются те же формулы, но при  $L \approx L_a / 3$  (где  $L_a$  — фактической размер хорды).

Результаты определения хорды и остальных параметров испытаний при граничном трении для восьми материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты испытаний и расчет параметров по формулам (1)–(7)

Материал	$L$ , мм	$h$ , мм	$P$ , Н/мм <sup>2</sup>	$\varepsilon_L$ , мм/мм	$\varepsilon_W$ , Нм/мм <sup>3</sup>	$\theta$	НВ, МПа
Олово О1	12,1	0,466	1,653	321862	532	1,8	23
Алюминий 1	4,1	0,056	4,878	2797864	13648	3,1	93
Алюминий 2	4,33	0,062	4,619	2518072	11631	3,02	87
Медь МЗр	4,1	0,056	4,878	2803325	13675	3,1	92
Сталь 40	2,53	0,021	7,905	7362072	58198	3,95	172
Сталь 08Х	1,5	0,007	13,333	20943951	279253	5,13	338
Сплав ВК	1,11	0,004	18,018	38246806	689132	5,96	495
Керамика	0,63	0,001	31,746	118729881	3769203	7,92	1000

Значения твердости по шкалам Мооса ( $\theta$ ) и Бринелля (НВ) вычислены по обоснованным ниже корреляционным зависимостям от параметров испытаний (расчет выполнен для самого твердого материала с хордой  $L = 0,63$  мм):

$$\theta(L) = 6,26 / \sqrt{L}, \quad (8)$$

$\theta(0,63) = 7,912$  — рассчитанное значение на 0,10 % меньше экспериментально полученного (7,92);

$$\theta(P) = 1,4 \sqrt{P}, \quad (9)$$

$\theta(32) = 7,92$  — рассчитанное значение совпадает с экспериментально полученным;

$$\theta(\varepsilon_L) = 0,075\sqrt[4]{\varepsilon_L}, \quad (10)$$

$\theta(1,187 \cdot 10^8) = 7,83$  — рассчитанное значение на 1,14 % меньше экспериментально полученного (7,92);

$$\theta(\varepsilon_W) = 0,632\sqrt[6]{\varepsilon_W}, \quad (11)$$

$\theta(3,77 \cdot 10^6) = 7,88$  — рассчитанное значение на 0,51 % меньше экспериментально полученного (7,92);

$$HB(\varepsilon_L) = 7 \cdot 10^{-3} \varepsilon_L^{0,639}, \quad (12)$$

$HB(1,187 \cdot 10^8) = 1011$  — рассчитанное значение на 1,1 % больше экспериментально полученного (1000);

$$HB(\theta) = 5\theta^{2,56}, \quad (13)$$

$HB(7,92) = 999$  — рассчитанное значение на 0,10 % меньше экспериментально полученного (1000).

Как видно из (8)—(13), все функции твердости материала являются степенными типа  $\theta(X) = aX^b$ . При этом аргументы  $X$ , определенные экспериментальным путем, нам известны и представлены в табл. 1. Это позволяет перейти к обоснованию функции  $\theta(X)$  для соответствующих материалов с учетом зависимости уровня твердости по шкале Мооса от вида материала [5]. Они приведены в табл. 2,

Таблица 2

Уровень твердости по Моосу

Материал	$\theta$	Материал	$\theta$	Материал	$\theta$
Алмаз	10	Медь	3	Магний	2,1
Хром	9	Алюминий	2,9	Олово	1,8
Вольфрам	7	Серебро	2,7	Свинец	1,6
Никель	5	Цинк	2,5	Калий	0,6
Платина	4,3	Золото	2,6	Натрий	0,4
Железо	4	Кальций	2,2		

Решим эту задачу методом наименьших квадратов (МНК) на примере обоснования функции (8) в редакторе Mathcad. Решение состоит из ряда операций.

Операция 1. Составить матрицу исходных данных  $\rho$ , состоящую из зависимых и независимых векторов. К зависимым относится вектор  $\rho^0$  (функция) уровня твердости по Моосу  $\theta$ . Независимые векторы  $\rho^2$  —  $\rho^5$  являются аргументами функции  $L$ ,  $\varepsilon_L$ ,  $P$  и  $\varepsilon_W$ , для каждого из которых обосновывается соответствующая функция [6].

$\rho^0$	$\rho^1$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^4$
$\theta$	HB, МПа	$L$ , мм	$\varepsilon_L$ , мм/мм	$P$ , Н/мм <sup>2</sup>	$\varepsilon_W$ , Н·м/мм <sup>3</sup>
1,8	20	12,6	321862	1,653	532
3,0	100	4,1	2797864	4,878	13648
4,0	200	2,53	7362072	7,905	58198
5,0	300	1,5	20943951	13,333	279253
6,0	500	1,11	38246806	18,018	689132
8,0	1000	0,63	118729881	31,746	3769203

Операция 2. Поскольку все функции являются степенными, то сначала надо перевести в линейную функцию их логарифмы (логарифмическая анаморфоза), а затем найти параметры степенной функции  $a$  и  $b$ . Операция показана для векторов  $\rho^2$  (хорда  $L$ ) и  $\rho^0$  (твердость по Моосу  $\theta$ ).

Логарифмическая анаморфоза степенной функции:

$$X = \log(\rho^2) \quad Y = \log(\rho^0).$$

Операция 3. Задача оценки параметров линейной функции  $Y(X)$  решается МНК с помощью оператора  $\text{line}(X, Y)$  в редакторе Mathcad с последующей оценкой  $a = 10^{0,8} = 6,26$  и  $b = -0,5$ .

Оценка постоянных уравнения регрессии:

$$\text{line}(X, Y) = \begin{pmatrix} 0,8 \\ -0,5 \end{pmatrix}; \quad a = 10^{0,8} = 6,26; \quad b = -0,5.$$

Операция 4. Запись вида функции  $\theta(L)$ , полученной с высоким коэффициентом корреляции  $\text{corr}$ .

Регистрация функции  $\theta(L)$ :

$$\theta(L) = \frac{6,26}{\sqrt{L}}; \quad \text{corr}(\theta(\rho^2), \rho^0) = -1.$$

Операция 5. Преобразование функции  $\theta(\varepsilon_W)$  для объемной износостойкости  $\varepsilon_W$ . Здесь показана взаимосвязь всех функций  $\theta(X)$  для каждого исследуемого материала на примере доказательства получения функции  $\theta(L)$  для хорды  $L$ .

Второй вариант обоснования функции  $\theta(L)$ :

$$\theta(\varepsilon_W) = 0,632 \sqrt[6]{\frac{6\pi F D^2 C}{H L^3 10^3}} = \frac{6,26}{\sqrt[6]{L^3}} \rightarrow \frac{6,26}{\sqrt{L}} = \theta(L).$$

В заключение следует отметить, что функция (13) для твердости по Бринеллю  $\text{HB}(\theta)$  получена тем же МНК, но для векторов  $\rho^1 - \rho^0$ .

На основании приведенного выше обоснования нового метода представляется целесообразным представить основные рекомендации по его использованию. Прежде всего следует выполнить условия № 1 и 2 по конструкции и видам пар граничного и абразивного трения. Это относится как к испытаниям одного конкретного материала, так и к серии испытаний образцов по мере совершенствования технологии его создания.

Важнейшим правилом оценки твердости исследуемого материала с приемлемой достоверностью является соблюдение условия № 3 о неизменности стандартного режима испытаний. При этом допускается устанавливать частоту и время испытаний исходя из принципа  $C = nt = 1000$  циклов, например  $n = 100$  об/мин и  $t = 10$  мин или  $n = 200$  об/мин и  $t = 5$  мин.

Для расчета трибологических параметров, зависящих от длины хорды  $L$ , рекомендуется составить простую программу в редакторе EXCEL по формулам (1)—(7). Так же следует поступить для расчета функций твердости  $\theta(L)$ ,  $\theta(P)$ ,  $\theta(\varepsilon_L)$ ,  $\theta(\varepsilon_W)$ ,  $\text{HB}(\varepsilon_L)$  и  $\text{HB}(\theta)$  по формулам (8)—(13).

Это позволит оперативно оценивать твердость по шкалам Мооса и Бринелля после измерения хорды на электронном микроскопе. Как показано в п. Операция 5, для известной хорды при расчете по всем функциям (8)—(11) будет получен один и тот же результат. Поэтому допустимо сразу после испытаний ограничиться расчетом  $\theta(L)$  по простейшей формуле

(8), а затем оценить  $HV(\theta)$  по формуле (13). Например, для  $L = 4,1$  получаем:  $\theta(4,1) = 6,26 / \sqrt{4,1} = 3,09$  и  $HV(3,09) = 5 \cdot 3,09^{2,56} = 89,80$ , что примерно соответствует твердости алюминия.

Рассмотренные выше методы и алгоритмы могут быть использованы при разработке электронных средств для автоматического визуального измерения хорды  $L$  с последующим расчетом и демонстрацией результатов оценки твердости по шкалам Мооса  $\theta(L)$  и Бринелля  $HV(\theta)$  на табло прибора [7].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Standard Test Method for Ranking Resistance of Materials to Sliding Wear Using Block-on-ring Wear Test, norm G77–05 (Reapproved 2010), ASTM International, United States. DOI: 10.1520/G0077-05R10.
2. Сафонов Б. П., Лысюк А. Я., Лукиенко Л. В. Лабораторные работы по курсу „Основы трения и изнашивания элементов трибомеханических систем оборудования“. Новомосковск: РХТУ им. Д. И. Менделеева, Новомосковский институт, 2000. 26 с.
3. Ефремов Л. В., Тикалов А. В. Алгоритмы диагностики пар трения скольжения. СПб: Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений, 2023. 220 с.
4. Musalimov V. M., Nuzhdin K. A. Modelling of External Dynamics of Frictional Interaction Using the Elastic System Stability Theory // Journal of Friction and Wear. 2019. Vol. 40, N 1. P. 51—57.
5. Твердость металлов определение: Методы определения твердости металла [Электронный ресурс]: <<https://beton-feodosiya.ru/raznoe/tverdost-metallov-opredelenie-metody-opredeleniya-tverdosti-metalla.html>>.
6. Ефремов Л. В., Тикалов А. В. Моделирование взаимосвязи твердости и ИС материалов при их сравнительном тестировании методом „block-on-ring“ // Науч.-техн. вестн. информационных технологий, механики и оптики. 2021. Т. 21, № 2. С. 297—302. DOI: 10.17586/2226-1494-2021-21-2-297-302.
7. Ефремов Л. В. Проблемы управления надежностно-ориентированной технической эксплуатацией машин. СПб: Art-Xpress, 2015. 206 с.

#### Сведения об авторах

- Леонид Владимирович Ефремов** — д-р техн. наук, профессор; Институт проблем машиноведения РАН, лаборатория трения и износа; гл. научный сотрудник; E-mail: levlefr@mail.ru
- Андрей Владимирович Тикалов** — аспирант; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, кафедра машиноведения и основ конструирования; E-mail: tikalov2010@mail.ru

Поступила в редакцию 29.08.2023; одобрена после рецензирования 08.09.2023; принята к публикации 27.10.2023.

#### REFERENCES

1. Standard Test Method for Ranking resistance of Materials to Sliding Wear Using Block-on-ring Wear Test, norm G77–05 (Reapproved 2010), ASTM International, United States.
2. Safonov B.P., Lysyuk A.Ya., Lukienko L.V. *Laboratornyye raboty po kursu "Osnovy treniya i iznashivaniya elementov tribomekhanicheskikh sistem oborudovaniya"* (Laboratory Work on the Course "Fundamentals of Friction and Wear of Elements of Tribomechanical Equipment Systems"), Novomoskovsk, 2000, 26 p. (in Russ.)
3. Efremov L.V., Tikalov A.V. *Algoritmy diagnostiki par treniya skol'zheniya* (Algorithms for Diagnosing Sliding Friction Pairs), St. Petersburg, 2023, 220 p. (in Russ.)
4. Musalimov V.M., Nuzhdin K.A. *Journal of Friction and Wear*, 2019, no. 1(40), pp. 51–57.
5. <https://beton-feodosiya.ru/raznoe/tverdost-metallov-opredelenie-metody-opredeleniya-tverdosti-metalla.html>. (in Russ.)
6. Efremov L.V., Tikalov A.V. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2021, no. 2(21), pp. 297–302, DOI:10.17586/2226-1494-2021-21-2-297-302. (in Russ.)
7. Efremov L.V. *Problemy upravleniya nadezhnostno-oriyentirovannoy tekhnicheskoy ekspluatatsiyey mashin* (Problems of Managing Reliability-Oriented Technical Operation of Machines), St. Petersburg, 2015, 206 p. (in Russ.)



**Data on authors**

- Leonid V. Efremov** — Dr. Sci., Professor; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS, Laboratory of Friction and Wear; Chief Researcher;  
E-mail: levlefr@mail.ru
- Andrey V. Tikhlov** — Post-Graduate Student; Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Department of Mechanical Engineering and Design Basics;  
E-mail: tikalov2010@mail.ru

Received 29.08.2023; approved after reviewing 08.09.2023; accepted for publication 27.10.2023.