УДК 519.21
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-2-133-144

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ $M/G/1/m$ С УЧЕТОМ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ОБСЛУЖИВАНИЯ

А. И. Песчанский

Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия
peschansky_sntu@mail.ru

Аннотация. Построена полумарковская модель функционирования однокомпонентной системы обслуживания с накопителем конечной емкости, в которой осуществляется контроль качества обслуживания заявок. В случае неудовлетворительного результата повторные обслуживания заявки проводятся до достижения удовлетворительного качества. Найдено стационарное распределение вложенной цепи Маркова, определены стационарные характеристики системы, зависящие от вероятности качественного обслуживания заявок: стационарное распределение очереди по времени, средние стационарные времена пребывания в состояниях, средняя длина очереди, среднее время пребывания заявки в очереди и системе.

Ключевые слова: *однолинейная система обслуживания, конечное число мест для ожидания, контроль качества, повторное обслуживание, стационарные характеристики, финальная вероятность, время пребывания в состоянии, среднее число заявок*

Ссылка для цитирования: *Песчанский А. И.* Стационарные характеристики системы $M/G/1/m$ с учетом контроля качества обслуживания // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 2. С. 133—144. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-2-133-144.

STATIONARY CHARACTERISTICS OF THE *M/G/1/m* QUEUING SYSTEM WITH REGARD TO SERVICE QUALITY CONTROL

A. I. Peschansky

Sevastopol State University, Sevastopol, Russia
peschansky_sntu@mail.ru

Abstract. A semi-Markov model is constructed to describe the functioning of a single-component servicing system with a storage device of finite capacity, in which the quality of service of requests is monitored. In case of an unsatisfactory result, repeated servicing of the application is carried out until satisfactory quality is achieved. The stationary distribution of the nested Markov chain is found, the stationary characteristics of the system are determined, depending on the probability of high-quality service of requests: stationary distribution of the queue over time, the average stationary sojourn times in states, the average queue length, the average request sojourn time in the queue and in the system.

Keywords: single-server queuing system, finite queue, quality control, re-service, stationary characteristics, final probabilities, sojourn times in states, average number of requests

For citation: Peschansky A. I. Stationary characteristics of the M/G/1/m queuing system with regard to service quality control. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 2. P. 133—144 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-2-133-144.

Введение. Задачам теории массового обслуживания посвящены многочисленные публикации. Обзор основных результатов по этой тематике можно найти, например, в книгах [1—7]. Многочисленные приложения теории диктуют необходимость дальнейших исследований в этом направлении. Так, при решении самого разного рода прикладных задач востребованы системы, в которых предъявляются высокие требования к качеству обслуживания. Поэтому возникает необходимость учитывать влияние повторного обслуживания на стационарные показатели систем. В такой постановке в [8, 9] изучена система $GI/G/1/0$ (в классификации Кендалла—Башарина [10]). В [11] исследована одноканальная система с

© *Песчанский А. И., 2024*

простейшим входящим потоком и накопителем неограниченной емкости. Настоящая статья является продолжением исследований автора [11] для случая системы с накопителем ограниченной емкости.

Постановка задачи. Рассмотрим систему, в которой имеется один обслуживающий прибор и m мест для ожидания. Входящий поток заявок простейший: время β между моментами поступления заявок имеет функцию распределения (ФР) $G(t)=1-e^{-\lambda t}$ и плотность $g(t)=e^{-\lambda t}$, $t>0$. Распределение длительности α обслуживания заявок произвольно с ФР $F(t)=P\{\alpha\le t\}$, плотностью $f(t)$ и конечным математическим ожиданием $M\alpha$. По завершении обслуживания каждой заявки в системе проводится мгновенный контроль качества ее обслуживания. В случае неудовлетворительного качества заявка сразу направляется на повторное обслуживание, длительность γ которого имеет ФР $\Phi(t)=P\{\gamma\le t\}$, плотность $\varphi(t)$ и конечное математическое ожидание $M\gamma$. Повторное обслуживание проводится до тех, пока качество обслуживания не будет признано удовлетворительным. Предполагается, что вероятность успешного прохождения контроля, как после первого, так и после повторных обслуживаний заявок, равна p.

Цель настоящей статьи — обобщить математическую модель системы $M/G/1/m$ на случай наличия в последней устройства контроля качества обслуживания заявок и установить зависимость стационарных характеристик системы от вероятности качественного обслуживания.

Построение полумарковской модели функционирования системы. Математическую модель функционирования системы построим с помощью аппарата полумарковских процессов с дискретно-непрерывным множеством фазовых состояний [12, 13]. Введем в рассмотрение фазовое пространство E полумарковского процесса $S(t)$:

$$E=\left\{\ 0;1_1;1_2;\ 1_1/k,\ k=\overline{0,m-1};\ 1_2/k,\ k=\overline{0,m};\ 1_1x/k,1_2x/k,\ k=\overline{1,m}\ \right\}.$$

Здесь коды состояний имеют следующий смысл:

0 — в системе отсутствуют заявки;

1_1 — прибор начал обслуживать заявку, поступившую в свободную систему, первый раз; 1_2 — повторно;

$1_1/k$ — прибор первый раз начал обслуживать заявку из очереди, в которой осталось k заявок, $k=\overline{0,m-1}$;

$1_2/k$ — прибор повторно начал обслуживать заявку из очереди, в которой находится k заявок, $k=\overline{0,m}$.

$1_1x/k$ — прибор занят первым ($1_2x/k$ — повторным) обслуживанием заявки, до проведения контроля качества обслуживания осталось время x; поступившая в систему заявка принята в очередь, в которой стало k заявок, $k=\overline{1,m}$.

Время пребывания системы θ в описанных состояниях задается формулами:

$$\theta_0=\beta,\ \theta_{1_1}=\theta_{1_1/k}=\beta\wedge\alpha,\ k=\overline{0,m-1};\ \ \theta_{1_2}=\theta_{1_2/k}=\beta\wedge\gamma,\ k=\overline{0,m-1};$$
$$\theta_{1_2/m}=\gamma;\ \ \theta_{1_1x/k}=\theta_{1_2x/k}=\beta\wedge x,\ k=\overline{1,m-1};\ \ \theta_{1_1x/m}=\theta_{1_2x/m}=x, \qquad (1)$$

где $\wedge$ — знак минимума.

Под физическими состояниями системы будем понимать количество заявок в системе и характер их обслуживания. Вероятность переходов вложенной цепи Маркова зависит от реализации минимума факторов, которые влияют на изменение физических состояний. Например, в случае $\beta<x$ система из состояния $1_1x/k$, $k=\overline{1,m-1}$ переходит в состояние $1_1y/k+1$ с плотностью вероятности перехода

$$p\{1_1 x/k \to 1_1 y/k+1\} = g(x-y),\ 0<y<x\,.$$

Если $\beta > x$, то система переходит в состояние $1_1/k-1$ или $1_2/k$ соответственно с вероятностью

$$P\{1_1 x/k \to 1_1/k-1\} = p\overline{G}(x)\,,\ P\{1_1 x/k \to 1_2/k\} = q\overline{G}(x),\ \overline{G}(x) = 1-G(x) = e^{-\lambda x}\,.$$

Стационарное распределение вложенной цепи Маркова. Обозначим ρ_{1_1}, ρ_{1_2}, $\rho_{1_1/k}$, $\rho_{1_2/k}$ и $\rho(1_1 x/k)$, $\rho(1_2 x/k)$ — стационарные вероятности и стационарные плотности соответствующих состояний. Для рассматриваемой модели стационарное распределение удовлетворяет следующей совокупности систем интегральных уравнений:

$$\begin{cases}\rho(1_1 x/1) = (\rho_{1_1} + \rho_{1_1/0})\displaystyle\int_0^\infty g(t) f(t+x)dt,\\ \rho(1_1 x/k) = \displaystyle\int_0^\infty g(t)\rho(1_1, t+x/k-1)dt + \rho_{1_1/k-1}\int_0^\infty g(t) f(t+x)dt,\quad k=\overline{2,m};\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}\rho(1_2 x/1) = (\rho_{1_2} + \rho_{1_2/0})\displaystyle\int_0^\infty g(t)\varphi(t+x)dt,\\ \rho(1_2 x/k) = \displaystyle\int_0^\infty g(t)\rho(1_2, t+x/k-1)dt + \rho_{1_2/k-1}\int_0^\infty g(t)\varphi(t+x)dt,\quad k=\overline{2,m};\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}\rho_{1_1} = \rho_0;\ \rho_0 = p\left[(\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0})\displaystyle\int_0^\infty \overline{G}(x) f(x)dx + (\rho_{1_2}+\rho_{1_2/0})\int_0^\infty \overline{G}(x)\varphi(x)dx\right],\\ \rho_{1_1/k} = p\displaystyle\int_0^\infty \overline{G}(x)[\rho(1_1 x/k+1)+\rho(1_2 x/k+1)]dx + p\int_0^\infty \overline{G}(x)[\rho_{1_1/k+1} f(x) + \rho_{1_2/k+1}\varphi(x)]dx,\ k=\overline{0,m-2},\\ \rho_{1_1/m-1} = p\displaystyle\int_0^\infty \left[\rho(1_1 x/m)+\rho(1_2 x/m)\right]dx + p\rho_{1_2/m};\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}\rho_{1_2} = q\rho_{1_1}\displaystyle\int_0^\infty \overline{G}(x) f(x)dx + q\rho_{1_2}\int_0^\infty \overline{G}(x)\varphi(x)dx,\\ \rho_{1_2/0} = q\displaystyle\int_0^\infty \overline{G}(x)\left[\rho_{1_1/0} f(x) + \rho_{1_2/0}\varphi(x)\right]dx,\\ \rho_{1_2/k} = q\displaystyle\int_0^\infty \overline{G}(x)\left[\rho(1_1 x/k)+\rho(1_2 x/k)\right]dx + q\int_0^\infty \overline{G}(x)\left[\rho_{1_1/k} f(x) + \rho_{1_2/k}\varphi(x)\right]dx,\ k=\overline{1,m-1},\\ \rho_{1_2/m} = q\displaystyle\int_0^\infty \left[\rho(1_1 x/m)+\rho(1_2 x/m)\right]dx + q\rho_{1_2/m}.\end{cases} \tag{5}$$

Выпишем следствия систем (2)—(5), которые будут использованы при нахождении как стационарного распределения вложенной цепи Маркова, так и стационарных показателей системы обслуживания:

$$\rho_{1_2} + \rho_{1_2/0} = qp^{-1}\rho_{1_1}\,;\quad \rho_{1_2/k} = qp^{-1}\rho_{1_1/k-1},\ k=\overline{1,m}\,; \tag{6}$$

$$\int_0^\infty \left[\rho(1_1 x/k)+\rho(1_2 x/k)\right]dx = \rho_{1_1/k-1},\ k=\overline{1,m}\,; \tag{7}$$

$$(\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0})\int_0^\infty G(x) f(x)dx + (\rho_{1_2}+\rho_{1_2/0})\int_0^\infty G(x)\varphi(x)dx = \rho_{1_1/0}\,; \tag{8}$$

$$\int_0^\infty G(x)[\rho(1_1x/k)+\rho(1_2x/k)]dx+\rho_{1_1/k}\int_0^\infty G(x)f(x)dx+\rho_{1_2/k}\int_0^\infty G(x)\varphi(x)dx=\rho_{1_1/k},\ k=\overline{1,m-1}. \quad (9)$$

Далее из уравнений систем (2) и (3) выразим стационарные плотности $\rho(1_1x/k)$ и $\rho(1_2x/k)$ через стационарные вероятности ρ_{1_1}; ρ_{1_2}; $\rho_{1_1/k}$ и $\rho_{1_2/k}$:

$$\begin{cases} \rho(1_1x/1)=(\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0})\int_0^\infty g(t)f(t+x)dt;\ \ \rho(1_2x/1)=(\rho_{1_2}+\rho_{1_2/0})\int_0^\infty g(t)\varphi(t+x)dt; \\ \rho(1_1x/k)=\rho_{1_1}\int_0^\infty g^{*(k)}(t)f(t+x)dt+\sum_{i=0}^{k-1}\rho_{1_1/i}\int_0^\infty g^{*(k-i)}(t)f(t+x)dt,\ k=\overline{2,m}; \\ \rho(1_2x/k)=\rho_{1_2}\int_0^\infty g^{*(k)}(t)\varphi(t+x)dt+\sum_{i=0}^{k-1}\rho_{1_2/i}\int_0^\infty g^{*(k-i)}(t)\varphi(t+x)dt,\ k=\overline{2,m}, \end{cases} \quad (10)$$

где $g^{*(j)}(t)=\lambda\dfrac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\lambda t}$. Учитывая (6) и соотношения

$$\int_0^\infty G(x)\rho(1_1x/k)dx=\rho_{1_1}F_k+\sum_{i=0}^{k-1}\rho_{1_1/i}F_{k-i};\ \int_0^\infty G(x)\rho(1_2x/k)dx=\rho_{1_2}\Phi_k+\sum_{i=0}^{k-1}\rho_{1_2/i}\Phi_{k-i}, \quad (11)$$

из уравнений (8) и (9) найдем рекуррентные формулы для определения стационарных вероятностей физических состояний системы с точностью до произвольной постоянной ρ_0:

$$\rho_{1_1}=\rho_0,\ \ \rho_{1_1/0}=\frac{\rho_0}{p f_0}[pF_0+q\Phi_0], \quad (12)$$

$$\rho_{1_1/k}=\frac{1}{pf_0}[\rho_{1_1}(pF_k+q\Phi_k)+\sum_{i=0}^{k-1}\rho_{1_1/i}(pF_{k-i}+q\Phi_{k-1-i})],\ k=\overline{1,m}, \quad (13)$$

$$\rho_{1_2}=\rho_0\frac{qf_0}{p+q\Phi_0},\ \rho_{1_2/0}=\rho_0\frac{q}{p}\frac{pF_0+q\Phi_0}{p+q\Phi_0},\ \ \rho_{1_2/k}=\frac{q}{p}\rho_{1_1/k-1},\ k=\overline{1,m}. \quad (14)$$

Здесь F_i — вероятность того, что за время первого (Φ_i — повторного) обслуживания заявки в систему поступит более, чем i новых заявок:

$$F_i=\lambda\int_0^\infty\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\overline{F}(t)dt,\ \ \Phi_i=\lambda\int_0^\infty\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\overline{\Phi}(t)dt,\ \ f_0=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt.$$

Стационарная вероятность ρ_0 находится из условия нормировки, которое с учетом соотношений (6) и (7) принимает вид

$$\rho_0+\sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i}=p/(p+1).$$

Финальные вероятности физических состояний. Обозначим через E_k подмножество состояний фазового пространства E, где индекс k указывает на количество заявок в системе:

$$E_0=\{0\},\ E_1=\{1_1,1_2,1_1/0,1_2/0\};\ E_k=\{1_1/k-1,1_2/k-1,1_1x/k-1,1_2x/k-1,\},\ k=\overline{2,m};$$

$$E_{m+1}=\{1_2/m,1_1x/m,1_2x/m\};\ E=\bigcup_{k=0}^{m+1}E_k.$$

Финальные вероятности π_k пребывания системы в подмножествах состояний E_k найдем с помощью предельных соотношений [12, 13]:

$$\pi_k=\lim_{t\to\infty}P\{S(t)\in E_k\ /S(0)=e\}=\int_{E_k}m(e)\rho(de)\left(\int_E m(e)\rho(de)\right)^{-1},\ k=\overline{0,m+1}. \quad (15)$$

Здесь $m(x)$ — среднее время пребывания системы в состоянии $x \in E$, $\rho(\cdot)$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова.

Средние времена пребывания рассматриваемой системы в состояниях:

$$M\,\theta_0 = M\beta\,; \qquad M\,\theta_{1_1} = M\,\theta_{1_1/k} = \int_0^\infty \overline{F}(x)\overline{G}(x)dx = M\beta F_0,\ k = \overline{0, m-1}\,;$$

$$M\,\theta_{1_2} = M\,\theta_{1_2/k} = \int_0^\infty \overline{\Phi}(x)\overline{G}(x)dx = M\beta\Phi_0,\ k = \overline{0, m-1};\ M\,\theta_{1_2/m} = M\gamma\,;$$

$$M\,\theta_{1_1 x/k} = M\,\theta_{1_2 x/k} = \int_0^x \overline{G}(x)dx,\ k = \overline{1, m-1};\ \ M\,\theta_{1_1 x/m} = M\,\theta_{1_2 x/m} = x\,.$$

Преобразуем интегралы в формуле (15), используя выражения для средних значений времени, а также соотношения (8), (9), и учитывая, что

$$\int_0^x \overline{G}(x)dx = M\beta G(x)\,, \qquad \overline{G}(x) = M\beta g(x)\,, \tag{16}$$

в результате получим

$$\int_{E_0} m(e)\rho(de) = M\beta\rho_0\,;$$

$$\int_{E_1} m(e)\rho(de) = (\rho_{1_1} + \rho_{1_1/0})\int_0^\infty \overline{G}(x)\overline{F}(x)dx + (\rho_{1_2} + \rho_{1_2/0})\int_0^\infty \overline{G}(x)\overline{\Phi}(x)dx =$$

$$= M\beta\left[(\rho_{1_1} + \rho_{1_1/0})\int_0^\infty G(x)f(x)dx + (\rho_{1_2} + \rho_{1_2/0})\int_0^\infty G(x)\varphi(x)dx\right] = M\beta\rho_{1_1/0}\,;$$

$$\int_{E_k} m(e)\rho(de) = \int_0^\infty [\rho(1_1 x/k-1) + \rho(1_2 x/k-1)]dx\int_0^x \overline{G}(t)dt +$$

$$+\rho_{1_1/k-1}\int_0^\infty \overline{G}(x)\overline{F}(x)dx + \rho_{1_2/k-1}\int_0^\infty \overline{G}(x)\overline{\Phi}(x)dx = M\beta\rho_{1_1/k-1},\ k = \overline{2, m}\,.$$

При нахождении выражения для $\int_{E_{m+1}} m(e)\rho(de)$ дополнительно используем соотношения

$$\int_0^\infty x\left[\rho(1_1 x/k) + \rho(1_2 x/k)\right]dx = \left[\rho_{1_1} + \sum_{i=0}^{k-1}\rho_{1_1/i}\right]M\alpha + \left[\rho_{1_2} + \sum_{i=0}^{k-1}\rho_{1_2/i}\right]M\gamma - M\beta\sum_{i=0}^{k-1}\rho_{1_1/i}, k = \overline{1, m}\,, \tag{17}$$

которые получаются в результате интегрирования обеих частей уравнений систем (2) и (3) в пределах от x до ∞, использования соотношений (16), (8), (9) и рекуррентной формулы

$$\int_0^\infty x\left[\rho(1_1 x/k) + \rho(1_2 x/k)\right]dx = \int_0^\infty x\left[\rho(1_1 x/k-1) + \rho(1_2 x/k-1)\right]dx + \rho_{1_1/\kappa-1}M\alpha + \rho_{1_2/\kappa-1}M\gamma -$$

$$-M\beta\left[\int_0^\infty G(x)\left[\rho(1_1 x/k-1) + \rho(1_2 x/k-1)\right]dx + \rho_{1_1/k-1}\int_0^\infty G(x)f(x)dx + \rho_{1_2/k-1}\int_0^\infty G(x)\varphi(x)dx\right].$$

Таким образом,

$$\int_{E_{m+1}} m(e)\rho(de) = \int_0^\infty x\left[\rho(1_1 x/m) + \rho(1_2 x/m)\right]dx + M\gamma\rho_{1_2/m} = \left[\rho_{1_1} + \sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i}\right]M\,\alpha +$$

$$+\left[\rho_{1_2}+\sum_{i=0}^{m}\rho_{1_2/i}\right]M\gamma-M\beta\sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i}=\left[\rho_{1_1}+\sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i}\right]\left(M\alpha+qp^{-1}M\gamma\right)-M\beta\sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i};$$

$$\int_E m(e)\rho(de)=M\beta\rho_0+\left(M\alpha+qp^{-1}M\gamma\right)\left[\rho_{1_1}+\sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i}\right].$$

Обозначим

$$\widetilde{\rho}_{1_1/i}=\rho_{1_1/i}\rho_0^{-1},\ \rho=\lambda M\alpha,\ \delta=\lambda M\gamma, \tag{18}$$

тогда соотношения (15) для определения финальных вероятностей состояний системы принимают вид

$$\pi_0=\left[1+\left(\rho+qp^{-1}\delta\right)\left(1+\sum_{i=0}^{m-1}\widetilde{\rho}_{1_1/i}\right)\right]^{-1},\ \ \pi_k=\pi_0\widetilde{\rho}_{1_1/k-1},\ k=\overline{1,m};\ \pi_{m+1}=1-\pi_0\left(1+\sum_{i=0}^{m-1}\widetilde{\rho}_{1_1/i}\right). \tag{19}$$

Заметим, что значения $\widetilde{\rho}_{1_1/i}$ можно вычислить с помощью формул (12)—(14), в которых следует положить $\rho_0=1$. Если в системе отсутствует устройство контроля качества обслуживания заявок ($q=0$), то соотношения (19) совпадают с известными формулами (см., например, в [1]).

Далее найдем стационарные вероятности состояний: прибор обслуживает заявку впервые, прибор обслуживает заявку повторно. Для этого представим фазовое пространство в виде объединения трех непересекающихся подпространств: $E=E_0\cup E_{1_1}\cup E_{1_2}$, где E_0 — прибор свободен; $E_{1_1}=\left\{1_1;1_1/k,\,k=\overline{0,m-1};1_1x/k,\,k=\overline{1,m}\right\}$ — прибор обслуживает заявку впервые; $E_{1_2}=\left\{1_2;1_2/k,\,k=\overline{0,m};1_2x/k,\,k=\overline{1,m}\right\}$ — прибор обслуживает заявку повторно.

Финальные вероятности π_{1_1} и π_{1_2} пребывания системы соответственно в подмножествах состояний E_{1_1} и E_{1_2} найдем с помощью (15).

Учитывая соотношения (16), (10) и (11), получим

$$\int_{E_{1_1}} m(e)\rho(de)=(\rho_{1_1}+\sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i})\int_0^\infty\overline{G}(x)\overline{F}(x)dx+\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^\infty\rho(1_1x/k)dx\int_0^x\overline{G}(t)dt+\int_0^\infty x\rho(1_1x/m)dx=$$

$$=M\alpha\left(\rho_{1_1}+\sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i}\right).$$

Аналогично

$$\int_{E_{1_2}} m(e)\rho(de)=M\gamma(\rho_{1_2}+\sum_{i=0}^{m}\rho_{1_2/i})=\frac{q}{p}M\gamma\left(\rho_{1_1}+\sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i}\right).$$

Следовательно,

$$\pi_{1_1}=\rho\left(1+\sum_{i=0}^{m-1}\widetilde{\rho}_{1_1/i}\right)\pi_0;\quad \pi_{1_2}=q\delta(p\rho)^{-1}\pi_{1_1}. \tag{20}$$

Среднее значение стационарного времени пребывания системы в рассматриваемых состояниях. Для определения средних значений стационарного времени $T(E_k)$ пребывания системы в состояниях E_k воспользуемся соотношениями [12, 13]:

$$T(E_k)=\int_{E_k} m(e)\rho(de)\left[\int_{E\setminus E_k}\rho(de)P(e,E_k)\right]^{-1},\quad k=\overline{0,m+1}, \tag{21}$$

где $P(e,E_k)$ — вероятность переходов из состояния e в подмножество состояний E_k.

В результате преобразований интегралов из (21) с учетом вероятностей переходов системы из состояний, соотношений (4) и (6)—(9) получаем

$$\int\limits_{E\setminus E_k}\rho(de)P(e,E_k)=\int\limits_{E_k}\rho(de)P(e,E_{k-1})+\int\limits_{E_k}\rho(de)P(e,E_{k+1})=$$

$$=p\int_0^\infty \overline{G}(x)[\rho(1_1x/k-1)+\rho(1_2x/k-1)]dx+p\int_0^\infty \overline{G}(x)[\rho_{1_1/k-1}f(x)+\rho_{1_2/k-1}\varphi(x)]dx+$$

$$+\int_0^\infty G(x)\big[\rho(1_1x/k-1)+\rho(1_2x/k-1)\big]dx+\rho_{1_1/k-1}\int_0^\infty G(x)f(x)dx+\rho_{1_2/k-1}\int_0^\infty G(x)\varphi(x)dx=$$

$$=\rho_{1_1/k-2}+\rho_{1_1/k-1},\quad k=\overline{2,m};$$

$$\int\limits_{E\setminus E_1}\rho(de)P(e,E_1)=\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0};\qquad \int\limits_{E\setminus E_{m+1}}\rho(de)P(e,E_{m+1})=\rho_{1_1/m-1}.$$

Следовательно,

$$T(E_0)=1/\lambda;\ T(E_1)=\frac{\tilde{\rho}_{1_1/0}}{\lambda(1+\tilde{\rho}_{1_1/0})};\quad T(E_k)=\frac{\tilde{\rho}_{1_1/k-1}}{\lambda(\tilde{\rho}_{1_1/k-2}+\tilde{\rho}_{1_1/k-1})},\ k=\overline{2,m};$$

$$T(E_{m+1})=\frac{1}{\lambda\tilde{\rho}_{1_1/m-1}}\left[\left(\rho+qp^{-1}\delta\right)\left(1+\sum_{i=0}^{m-1}\tilde{\rho}_{1_1/i}\right)-\sum_{i=0}^{m-1}\tilde{\rho}_{1_1/i}\right].\qquad(22)$$

Средние значения стационарного времени пребывания системы в подмножествах состояний E_{1_1} и E_{1_2} также найдем с помощью соотношений (21). Для этого вычислим значение интеграла

$$\int\limits_{E\setminus E_{1_1}}\rho(de)P(e,E_{1_1})=\int\limits_{E_{1_1}}\rho(de)P(e,E_0)+\int\limits_{E_{1_1}}\rho(de)P(e,E_{1_2})=$$

$$=(\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0})\int_0^\infty \overline{G}(x)f(x)dx+q\sum_{k=1}^{m-1}\left[\int_0^\infty \overline{G}(x)\rho(1_1x/k)dx+\rho_{1_1/k}\int_0^\infty \overline{G}(x)f(x)dx\right]+q\int_0^\infty \rho(1_1x/m)dx.$$

Воспользуемся соотношением

$$\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^\infty \overline{G}(x)\rho(1_1x/k)dx+\int_0^\infty \overline{G}(x)f(x)dx\left[\rho_{1_1}+\sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i}\right]+\int_0^\infty \rho(1_1x/m)dx=\rho_{1_1}+\sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i},$$

которое получается в результате почленного сложения всех уравнений системы (2), а затем интегрирования обеих частей полученного равенства в пределах от 0 до ∞. В результате преобразований окончательно получим

$$\int\limits_{E\setminus E_{1_1}}\rho(de)P(e,E_{1_1})=(p+q\Phi_0)\rho_0+q\left[\rho_{1_1}+\sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i}\right].$$

Аналогично находим

$$\int\limits_{E\setminus E_{1_2}}\rho(de)P(e,E_{1_2})=\int\limits_{E_{1_1}}\rho(de)P(e,E_{1_2})=q\left[\rho_{1_1}+\sum_{i=0}^{m-1}\rho_{1_1/i}\right].$$

Следовательно,

$$T(E_{1_1})=\frac{M\alpha\left[1+\sum\limits_{i=0}^{m-1}\widetilde{\rho}_{1_1/i}\right]}{p+q\Phi_0+q\left[1+\sum\limits_{i=0}^{m-1}\widetilde{\rho}_{1_1/i}\right]};\ \ T(E_{1_2})=\frac{1}{p}M\gamma\,. \tag{23}$$

Среднее число заявок в системе и очереди в стационарном режиме. Одной из важных характеристик обслуживания является среднее число заявок $\overline{N}_{\text{с}}$ в системе, функционирующей в стационарном режиме. Найдем значение этой характеристики, учитывая финальные вероятности состояний (19):

$$\overline{N}_{\text{с}}=\sum_{k=1}^{m+1}k\pi_k=\pi_0\sum_{k=1}^{m}k\widetilde{\rho}_{1_1/k-1}+(m+1)\pi_{m+1}=\pi_0\sum_{j=0}^{m-1}(j+1)\widetilde{\rho}_{1_1/j}+(m+1)(1-\pi_0-\pi_0\sum_{j=0}^{m-1}\widetilde{\rho}_{1_1/j})\,.$$

Таким образом,

$$\overline{N}_{\text{с}}=(m+1)(1-\pi_0)-\pi_0\sum_{j=0}^{m-1}(m-j)\widetilde{\rho}_{1_1/j}\,. \tag{24}$$

Другой важной характеристикой является длина очереди, т.е. число ожидающих начала обслуживания заявок. Среднее значение $\overline{N}_{\text{оч}}$ этого показателя описывается формулой

$$\overline{N}_{\text{оч}}=\sum_{k=2}^{m+1}(k-1)\pi_k=\ \overline{N}_{\text{с}}-(1-\pi_0)=m(1-\pi_0)-\pi_0\sum_{j=0}^{m-1}(m-j)\tilde{\rho}_{1_1/j}\,. \tag{25}$$

Среднее стационарное время пребывания в очереди и системе. Наряду с характеристиками (24) и (25) важным показателем производительности системы обслуживания является время пребывания заявки в очереди и системе. Время пребывания заявки в очереди складывается из полного времени дообслуживания прибором заявки ς и полного времени обслуживания заявок, уже находящихся в очереди. Здесь под полным временем понимается время пребывания заявки в приборе с учетом возможных повторных обслуживаний. Среднее значение времени ς найдем по формуле $M\varsigma=\sum\limits_{k=1}^{m}\pi_k M\,\varsigma_k$, где $M\,\varsigma_k$ — математическое ожидание полного времени дообслуживания заявки с момента, когда поступившая в систему заявка заняла k-е место в очереди. Значения среднего полного времени дообслуживания $M\varsigma_{1_1x/k}$ и $M\varsigma_{1_2x/k}$ с начальными состояниями $1_1x/k$ и $1_2x/k$ соответственно нетрудно установить с помощью тождества Вальда [14]: $M\varsigma_{1_1x/k}=M\varsigma_{1_2x/k}=x+qp^{-1}M\gamma$.

Значение $M\,\varsigma_k$, не зависящее от непрерывной компоненты x, найдем с помощью операции усреднения. С этой целью представим фазовое пространство состояний процесса объединением двух непересекающихся подмножеств:

$$E=E^+_{\ge k}\cup E^-_{\ge k}\,,\quad E^+_{\ge k}=\left\{\ 1_1x/j,1_2x/j,1_2/j;k\le j\le m\right\},\ E^-_{\ge k}=E\setminus E^+_{\ge k}\,,\ \ k=\overline{1,m}\,.$$

Заметим, что $\varsigma_{1_1x/k}$ ($\varsigma_{1_2x/k}$) — время с момента попадания системы в состояние $1_1x/k$ ($1_2x/k$) до момента первого выхода из подмножества $E^+_{\ge k}$.

Операцию усреднения проведем по формуле [15]:

$$M\varsigma_k=\frac{\int\limits_{E^-_{\ge k}}\rho(dy)\int\limits_{E^+_{\ge k}}M\varsigma_x P(y,dx)}{\int\limits_{E^-_{\ge k}}\rho(dx)P(x,E^+_{\ge k})}\,, \tag{26}$$

где $M\varsigma_x$ — среднее время пребывания системы в состоянии $E^+_{\ge k}$ с начальным состоянием x.

Сначала найдем значения интегралов в знаменателе дроби (26) (учитывая (8) и (9)):

$$\int\limits_{E^-_{\geq 1}} \rho(dx)P(x,E^+_{\geq 1}) = (\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0})P(\alpha>\beta)+(\rho_{1_2}+\rho_{1_2/0})P(\gamma>\beta)=\rho_{1_1/0}\,,$$

$$\int\limits_{E^-_{\geq k}} \rho(dx)P(x,E^+_{\geq k}) = \int\limits_0^\infty G(x)\left[\rho(1_1 x/k-1)+\rho(1_2 x/k-1)\right]dx +$$

$$+\rho_{1_1/k-1}\int\limits_0^\infty G(x)f(x)dx+\rho_{1_2/k-1}\int\limits_0^\infty G(x)\varphi(x)dx=\rho_{1_1/k-1},\quad k=\overline{2,m}\,.$$

Принимая во внимание (19), получим

$$M\varsigma=\sum_{k=1}^m \pi_k M\,\varsigma_k=\frac{\pi_0}{\rho_0}\sum_{k=1}^m\int\limits_{E^-_{\geq k}}\rho(dy)\int\limits_{E^+_{\geq k}} M\varsigma_x P(y,dx)=$$

$$=\frac{\pi_0}{\rho_0}\left(\rho_{1_1}+\sum_{j=0}^{m-1}\rho_{1_1/j}\right)\int\limits_0^\infty (x+qp^{-1}M\gamma)dx\int\limits_0^\infty g(t)f(t+x)dt+$$

$$+\frac{\pi_0}{\rho_0}\left(\rho_{1_2}+\sum_{j=0}^{m-1}\rho_{1_2/j}\right)\int\limits_0^\infty (x+qp^{-1}M\gamma)dx\int\limits_0^\infty g(t)\varphi(t+x)dt+$$

$$+\frac{\pi_0}{\rho_0}\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_0^\infty\left[\rho(1_1 y/k)+\rho(1_2 y/k)\right]dy\int\limits_0^y g(y-x)(x+qp^{-1}M\gamma)dx\,.$$

Поскольку

$$\int\limits_0^y xg(y-x)dx=y-\int\limits_0^y \overline{G}(t)dt=y-M\beta G(y)\,,$$

$$\int\limits_0^\infty xdx\int\limits_0^\infty g(t)f(t+x)dt=M\alpha-M\beta\int\limits_0^\infty G(x)f(x)dx\,,$$

$$\int\limits_0^\infty xdx\int\limits_0^\infty g(t)\varphi(t+x)dt=M\gamma-M\beta\int\limits_0^\infty G(x)\varphi(x)dx\,,$$

то, учитывая формулы (6), (8), (9) и (17), найдем

$$\frac{\rho_0}{\pi_0}M\varsigma=\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_0^\infty y\left[\rho(1_1 y/k)+\rho(1_2 y/k)\right]dy+M\alpha\left(\rho_{1_1}+\sum_{j=0}^{m-1}\rho_{1_1/j}\right)+M\gamma\left(\rho_{1_2}+\sum_{j=0}^{m-1}\rho_{1_2/j}\right)-$$

$$-\left(M\beta-qp^{-1}M\gamma\right)\left[\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_0^\infty G(y)\left[\rho(1_1 y/k)+\rho(1_2 y/k)\right]dy+\left(\rho_{1_1}+\sum_{j=0}^{m-1}\rho_{1_1/j}\right)\int\limits_0^\infty G(x)f(x)dx+\right.$$

$$\left.+\left(\rho_{1_2}+\sum_{j=0}^{m-1}\rho_{1_2/j}\right)\int\limits_0^\infty G(x)\varphi(x)dx\right]=\left(M\alpha+qp^{-1}M\gamma\right)\sum_{k=1}^m\left[\rho_{1_1}+\sum_{j=0}^{k-1}\rho_{1_1/j}\right]-M\beta\sum_{k=1}^m\sum_{j=0}^{k-1}\rho_{1_1/j}=$$

$$=\left(M\alpha+qp^{-1}M\gamma\right)\left[m\rho_{1_1}+\sum_{k=1}^m\sum_{j=0}^{k-1}\rho_{1_1/j}\right]-M\beta\sum_{k=1}^m\sum_{j=0}^{k-1}\rho_{1_1/j}\;.$$

В результате замены порядка суммирования с учетом обозначений (18) окончательно получим

$$M\varsigma=\pi_0 M\beta\left[m(\rho+qp^{-1}\delta)+(\rho+qp^{-1}\delta-1)\sum_{j=0}^{m-1}(m-j)\tilde{\rho}_{1_1/j}\right].\tag{27}$$

Теперь определим среднее время пребывания заявки в очереди в стационарном режиме:

$$\overline{T}_{\text{оч}}=M\varsigma+(M\alpha+qp^{-1}M\gamma)\sum_{k=2}^m (k-1)\pi_k=M\varsigma+(M\alpha+qp^{-1}M\gamma)(\overline{N}_{\text{оч}}-m\pi_{m+1})=$$

$$= \pi_0 M\beta\left[m\left(\rho + qp^{-1}\delta\right)\left(\rho_{1_1} + \sum_{j=0}^{m-1} \rho_{1_1/j} \right) - \sum_{j=0}^{m-1} (m-j)\widetilde{\rho}_{1_1/j} \right].$$

Таким образом,

$$\overline{T}_{оч} = M\beta\left[m(1-\pi_0) - \pi_0 \sum_{j=0}^{m-1} (m-j)\widetilde{\rho}_{1_1/j} \right]. \qquad (28)$$

Очевидно, что среднее время пребывания заявки в системе

$$\overline{T}_{с} = M\varsigma + (M\alpha + qp^{-1}M\gamma)\left(\pi_0 + \sum_{k=1}^{m} k\pi_k \right) = \overline{T}_{оч} + (M\alpha + qp^{-1}M\gamma)(1-\pi_{m+1}) \; .$$

Учитывая соотношения (28) и (19), окончательно получим

$$\overline{T}_{с} = M\beta\left[(m+1)(1-\pi_0) - \pi_0 \sum_{j=0}^{m-1} (m-j)\widetilde{\rho}_{1_1/j} \right]. \qquad (29)$$

Полученные выражения для вычисления стационарных характеристик системы позволяют оценить зависимость показателей производительности системы от вероятности p удовлетворительного обслуживания заявки.

Численный пример. Рассмотрим систему $M/G/1/3$, в которую с интенсивностью $\lambda = 0{,}6$ мин$^{-1}$ поступает простейший поток заявок. Среднее значение времени первого обслуживания заявки $M\alpha = 1{,}949$ мин имеет распределение Вейбулла—Гнеденко с ФР $F(t) = 1 - e^{-(t/2{,}2)^{2{,}1}}$. Качество обслуживания заявки признается удовлетворительным с вероятностью $p = 0{,}9$. Среднее время повторного обслуживания заявки $M\gamma = 1{,}378$ мин имеет гиперэкспоненциальное распределение с плотностью $\varphi(t) = 0{,}15e^{-0{,}5t} + 0{,}07e^{-0{,}1t}$. Стационарные характеристики системы, вычисленные по формулам (19), (20), (22)—(25), (28) и (29), приводятся в табл. 1—3.

Таблица 1

Система	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_{1_1}	π_{1_2}
С контролем качества	0,074	0,140	0,213	0,308	0,266	0,859	0,067
Без контроля качества	0,093	0,163	0,226	0,295	0,224	0,907	–

Таблица 2

Система	$T(E_0)$, мин	$T(E_1)$, мин	$T(E_2)$, мин	$T(E_3)$, мин	$T(E_4)$, мин	$T(E_{1_1})$, мин	$T(E_{1_2})$, мин
С контролем качества	1,667	1,092	1,004	0,986	1,439	9,992	1,531
Без контроля качества	1,667	1,063	0,967	0,944	1,265	16,540	–

Таблица 3

Система	$\overline{N}_{оч}$	$\overline{T}_{оч}$, мин	$\overline{N}_{с}$	$\overline{T}_{с}$, мин
С контролем качества	1,625	2,708	2,551	4,251
Без контроля качества	1,487	2,478	2,394	3,990

Из приведенных в табл. 1—3 расчетных данных следует, что наличие в системе устройства контроля качества увеличивает вероятность отказа в обслуживании заявки на $18{,}75$ %, время пребывания в очереди — на $9{,}282$ %, а время пребывания в системе — на $6{,}541$ %.

На рис. 1 и 2 представлены зависимости соответственно вероятности $\pi_4(p)$ отказа в обслуживании и среднего стационарного времени $\overline{T}_{\text{оч}}(p)$ пребывания в очереди от вероятности p успешного обслуживания заявок.

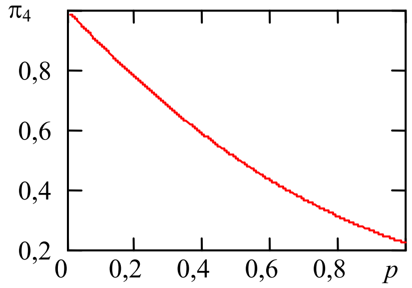

Рис. 1

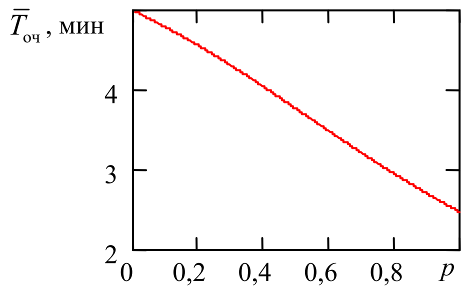

Рис. 2

Заключение. Построен полумарковский процесс функционирования одноканальной системы обслуживания с конечной очередью, в которой обслуживание заявки прибором проводится до тех пор, пока его качество не будет признано удовлетворительным. Полученные расчетные формулы для вычисления стационарных характеристик системы позволяют оценить влияние вероятности качественного обслуживания заявок на показатели системы. Результаты статьи могут быть использованы для более адекватного описания функционирования современных технических и информационных систем в самых различных предметных областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
2. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 336 с.
3. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966. 244 с.
4. *Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания // Итоги науки. Серия „Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970“. 1971. С. 5—109.
5. *Матвеев В. Ф., Ушаков В. Г.* Системы массового обслуживания. М.: Изд-во МГУ, 1984. 240 с.
6. *Боровков А. А*. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1971. 368 с.
7. *Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания. М.: Высш. школа, 1982. 256 с.
8. *Peschansky A. I.* Stationary Characteristics of the Single-Server Queue System with Losses and Immediate Service Quality Control // Appl. Mathematics. 2011. Vol. 2, N 4. P. 403—409. DOI: 10.4236/am.2011.24049.
9. *Песчанский А. И.* Полумарковская модель однолинейной системы с потерями и мгновенным контролем качества обслуживания // Вестн. СевНТУ: Сер. Информатика, электроника, связь. 2011. Вып. 114. С. 47—52.
10. *Kendall D.* Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain // Ann. Math. Statistics. 1953. Vol. 24, N 3. P. 338—354.

11. *Песчанский А. И.* Стационарные характеристики одноканальной системы с неограниченной очередью и учетом контроля качества обслуживания // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 9. С. 715—730. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-9-715-730.

12. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. К.: Наук. думка, 1982. 236 с.

13. *Корлат А. Н., Кузнецов В. Н., Новиков М. И., Турбин А. Ф.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. Кишинев: Штиинца, 1991. 276 с.

14. *Beichelt F., Franken P.* Zuverlässigkeit und Instanphaltung, Mathematische Methoden. Berlin: VEB Verlag Technik, 1983. 392 s.

15. *Райншке К., Ушаков И. А.* Оценка надежности систем с использованием графов. М.: Радио и связь, 1988. 208 с.

Сведения об авторе

Алексей Иванович Песчанский — д-р техн. наук, профессор; Севастопольский государственный университет, кафедра высшей математики; E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

Поступила в редакцию 14.09.2023; одобрена после рецензирования 25.10.2023; принята к публикации 17.12.2023.

REFERENCES

1. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* (Queuing Theory), Moscow, 1995, 529 p. (in Russ.)
2. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. *Vvedeniye v teoriyu massovogo obsluzhivaniya* (Introduction to Queuing Theory), Moscow, 1987, 336 p. (in Russ.)
3. Klimov G.P. *Stokhasticheskiye sistemy obsluzhivaniya* (Stochastic Queuing Systems), Moscow, 1966, 244 p. (in Russ.)
4. Kovalenko I.N. *Itogi Nauki. Seriya "Teoriya Veroyatnostei. Matematicheskaya Statistika. Teoreticheskaya Kibernetika. 1970",* Moscow, 1971, pp. 5–109. (in Russ.)
5. Matveev V.F., Ushakov V.G. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya* (Queuing Systems), Moscow, 1984, 240 p. (in Russ.)
6. Borovkov A.A. *Veroyatnostnyye protsessy v teorii massovogo obsluzhivaniya* (Probabilistic Processes in Queuing Theory), Moscow, 1971, 368 p. (in Russ.)
7. Ivchenko G.I., Kashtanov V.A., Kovalenko I.N. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* (Queuing theory), Moscow, 1982, 256 p. (in Russ.)
8. Peschansky A.I. *Appl. Mathematics*, 2011, no. 4(2), pp. 403–409, DOI: 10.4236/am.2011.24049.
9. Peschansky A.I. *Vestnik. SevNTU: Ser. Informatika, elektronika, svyaz'*, 2011, no. 114, pp. 47–52. (in Russ.)
10. Kendall D. *Ann. Math. Statistics*, 1953, no. 3(24), pp. 338–354.
11. Peschansky A.I. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 9(66), pp. 715–730, DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-9-715-730. (in Russ.)
12. Korolyuk V.S., Turbin A.F. *Protsessy markovskogo vosstanovleniya v zadachakh nadezhnosti sistem* (Markov Recovery Processes in System Reliability Problems), Kyiv, 1982, 236 p.
13. Korlat A.N., Kuznetsov V.N., Novikov M.I., Turbin A.F. *Polumarkovskiye modeli vosstanavlivayemykh sistem i sistem massovogo obsluzhivaniya* (Semi-Markov Models of Recoverable Systems and Queuing Systems), Kishinev, 1991, 276 p. (in Russ.)
14. Beichelt F., Franken P. *Zuverlässigkeit und Instanphaltung, Mathematische Methoden*, Berlin, VEB Verlag Technik, 1983, 392 s.
15. Raynshke K., Ushakov I.A. *Otsenka nadezhnosti sistem s ispol'zovaniyem grafov* (Assessing the Reliability of Systems Using Graphs), Moscow, 1988, 208 p. (in Russ.)

Data on author

Alexey I. Peschansky — Dr. Sci., Professor; Sevastopol State University, Department of Higher Mathematics; E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

Received 14.09.2023; approved after reviewing 25.10.2023; accepted for publication 17.12.2023.