УДК 620.179.16
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-2-186-194

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДАХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ПРИ УСЛОВИИ ЖЕСТКОГО КОНТАКТА

А. В. Вагин*, А. С. Воротынцева

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет „ЛЭТИ“ им. В. И. Ульянова (Ленина) Санкт-Петербург, Россия
av.vagin@bk.ru

Аннотация. Исследовано распространение волны Лява по цилиндрическим поверхностям слоистых сред (параллельно слоям) с однородными граничными условиями. В рамках исследования получено и решено относительно волнового числа дисперсионное уравнение. По полученным решениям построены графические зависимости скорости распространения волны от частоты ультразвука, показано влияние радиуса кривизны поверхности на скорость волны.

Ключевые слова: *волна Лява, дисперсионное уравнение, слоистая среда, цилиндрическая поверхность, однородные граничные условия*

Ссылка для цитирования: *Вагин А. В., Воротынцева А. С.* Волновые процессы в средах с цилиндрическими поверхностями при условии жесткого контакта // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 2. С. 186—194. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-2-186-194.

WAVE PROCESSES IN MEDIA WITH CYLINDRICAL SURFACES UNDER RIGID CONTACT

A. V. Vagin*, A. S. Vorotyntseva

St. Petersburg Electrotechnical University, St. Petersburg, Russia
av.vagin@bk.ru

Abstract. Love wave propagation in layered media parallel to the layers of the structure along the cylindrical surfaces with homogeneous boundary conditions is investigated. As part of the study, a dispersion equation was obtained and solved with respect to the wave number. Based on the obtained solutions, graphical dependences of the wave propagation velocity on the ultrasound frequency are plotted, and the influence of the surface curvature radius on the wave velocity is shown.

Keywords: Love wave, dispersion equation, layered medium, cylindrical surface, homogeneous boundary conditions

For citation: Vagin A. V., Vorotyntseva A. S. Wave processes in media with cylindrical surfaces under rigid contact. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 2. P. 186—194 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-2-186-194.

Введение. Потребность в создании и конструировании новых материалов с наилучшими физико-механическими характеристиками обусловливает необходимость разработки новых технологий производства изделий для их контроля. Одной из перспективных разработок в области создания структур являются цилиндрические слоистые среды. Приближение цилиндрических слоистых сред широко используется в разнообразных прикладных задачах, применительно к геоакустике [1, 2], к условиям неразрушающего контроля, структуроскопии [3].

Первые исследования слоистых сред начались с изучения структур горных пород методом акустогеологического исследования. Как показано в статье [4], первые упоминания об исследованиях в этом направлении приходятся на 1930-е гг. — тогда впервые были выявлены анизотропные свойства осадочных пород [5—8]. По данным об анизотропии продольных и поперечных волн в период 1940—1950 гг. в тонкослоистых средах были проведены исследования анизотропных свойств, по результатам которых теоретически описано явление анизотропии, что впоследствии подтверждено экспериментально [9, 10]. В 1960—1980 гг. была наиболее подробно изучена анизотропия тонкослоистых сред [11, 12], а также разработана эффективная анизотропная модель трещиноватой среды [13, 14], представлены основы теории распространения упругих волн в таких системах [15—17] и соответствующие численные методы и алгоритмы [18—21] для их оценки.

Слоистые среды перспективны для создания материалов с хорошими физико-механическими характеристиками, что основывается на развитии соответствующей контрольно-измерительной аппаратуры. Так как распространение волн на криволинейных поверхностях представляет практический интерес, такая задача имеет значение для современной науки и техники. Большинство криволинейных поверхностей на практике можно аппроксимировать для получения примерного решения задачи под цилиндрическую или сферическую поверхность — так, множество работ, к примеру [22—24], посвящено именно поверхностным волнам, распространяющимся по цилиндрической поверхности.

Задачей настоящей работы является исследование распространения волн Лява: необходимо показать влияние частоты ультразвука и кривизны поверхности на абсолютные значения фазовых скоростей используемых для контроля волн, взаимодействующих в приближении жесткого контакта слоев.

Исследование волн Лява представляет научный интерес, поскольку волны этого типа широко применяются в неразрушающем контроле поверхностных дефектов различных структур. Волны Лява являются частным случаем поверхностных волн, часто применяются для контроля качества поверхностей материалов, также при исследованиях в многослойных средах за счет использования волн такого типа представляется возможным выявлять физико-механические характеристики отдельных слоев [25, 26]. Помимо прочего, необходимо отметить, что волны Лява используются и в сейсмоакустике — в [27] показано, что такие волны имеют большое значение при преобразовании сейсмической энергии во время землетрясений. Таким образом, широкий спектр задач, решаемых с помощью волн Лява, определяет актуальность настоящего исследования.

Описание распространения волн Лява на цилиндрических поверхностях. В рамках поставленной задачи рассматривается цилиндрическая поверхность (рис. 1), состоящая из слоя стали и слоя графита. Радиус кривизны цилиндрической поверхности от центра до верхней границы слоя стали составляет $R_2 = 110$ мм, до границы раздела двух сред — $R_1 = 100$ мм, до нижней границы слоя графита — $R_0 = 90$ мм. Известны также данные для этих сред — плотности и параметры Лямэ: ρ_1, λ_1, μ_1 — для слоя графита; ρ_2, λ_2, μ_2 — для слоя стали.

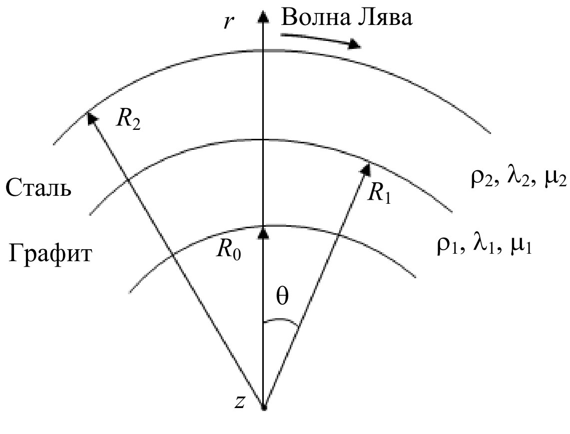

Рис. 1

Известно [28], что волна Лява является поперечной с горизонтальной поляризацией, следовательно, уравнение движения для нее будет иметь вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_t}{\partial t^2} - \mu \Delta \xi_t = 0,$$

где ρ — плотность среды, ξ_t — вектор поперечного смещения частиц, μ — модуль сдвига, $\Delta\xi_t = \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\left(\xi_t\right)\right)$.

Поскольку рассматривается распространение волн на криволинейной поверхности, дальнейшее описание целесообразно представить в цилиндрической системе координат (r, θ, z). Также для определенности примем, что ось цилиндрической поверхности соответствует оси координат z, учитывается параллельное слоям, т.е. по азимутальной координате θ, распространение волны Лява. Поскольку при такой постановке задачи у поперечных волн единственным ненулевым компонентом смещения является компонент, параллельный образующей цилиндра ξ_z, то уравнение движения запишется следующим образом:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} = \mu \Delta \xi_z = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \xi_z,$$

где $\Delta\xi_z = \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\left(\xi_z\right)\right)$, r, θ — параметры системы координат.

В [28] показано, что в случае распространения волн на цилиндрических поверхностях решение уравнение движения, согласно теории упругости, должно соответствовать следующим условиям:

— отсутствие напряжений на цилиндрической поверхности;

— соответствие принципу погашаемости [29];

— зависимость от азимутальной координаты θ по экспоненциальному закону $\mathrm{e}^{\pm ip\theta}$, где i — мнимая единица, p — угловое волновое число;

— переход в рэлеевскую волну, распространяющуюся вдоль плоской границы упругого полупространства с вакуумом при стремлении радиуса кривизны цилиндра R к бесконечности и конечном соотношении p/R.

Тогда для определения параметра упругого смещения необходимо решить представленное уравнение движения, которое находится в форме [28]:

$$\xi_z = \xi_z(r)\mathrm{e}^{i(p\theta - \omega t)},$$

где ω — частота, t — время.

Как показано в [30], компоненты смещения в двух средах соответствуют уравнениям Гельмгольца в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k_t^2 \psi = 0,$$

где ψ — векторный потенциал, k_t^2 — квадрат волнового числа.

Известно [31], что одним из фундаментальных способов решения таких уравнений является использование семейства функций Бесселя. Для определенности и удобства изложения принято, что компоненты смещения в слое графита (нижнем слое) будут обозначаться как ξ_{1z}, в слое стали (верхнем слое) — соответственно ξ_{2z}. Тогда компоненты смещения в двух средах определятся следующим образом:

$$\xi_{1z} = AJ_p\left(k_{1t} r\right)\mathrm{e}^{ip\theta} \quad \text{при } r < R_1, \tag{1}$$

$$\xi_{2z} = \left[BJ_p\left(k_{2t} r\right) + CN_p\left(k_{2t} r\right) \right]\mathrm{e}^{ip\theta} \quad \text{при } R_1 < r < R_2, \tag{2}$$

где A, B, C — неопределенные константы, $k_{1,2t} = \sqrt{\dfrac{\rho_{1,2}\omega^2}{\mu_{1,2}}}$ — волновое число для каждой среды, $J_p\left(k_{1,2t}r\right)$ — функция Бесселя порядка p, $N_p\left(k_{2t}r\right)$ — функция Неймана порядка p, θ, рассматриваемая в бесконечном интервале $-\infty < \theta < +\infty$.

Также необходимо установить еще один важный параметр — компонент механических напряжений, который определяется по обобщенному закону Гука как линейная функция, связывающая тензор деформаций и тензор напряжений [32]. Для поставленной задачи определено, что компонент механических напряжений σ_z представляется выражениями:

$$\sigma_{1z} = \mu_1 \frac{\partial \xi_{1z}}{\partial r}, \tag{3}$$

$$\sigma_{2z} = \mu_2 \frac{\partial \xi_{2z}}{\partial r}. \tag{4}$$

Распространение волн Лява в однородных средах. Для дальнейшего вывода дисперсионного уравнения необходимо определить выражения граничных условий для однородной системы „твердая среда—упругое полупространство“, которые представлены ниже.

Первое граничное условие определяется равенством механических напряжений на границе раздела системы „твердая среда—упругое полупространство“:

$$\sigma_{1z} = \sigma_{2z} \ \text{ при } r = R_1. \tag{5}$$

Второе граничное условие заключается в равенстве нулю компонентов механических напряжений на верхней границе второго слоя:

$$\sigma_{2z} = 0 \text{ при } r = R_2. \tag{6}$$

Третье граничное условие определяет равенство компонентов упругих смещений на границе раздела двух сред:

$$\xi_{1z} = \xi_{2z} \text{ при } r = R_1. \tag{7}$$

С целью определения дисперсионного уравнения для волны Лява, распространяющейся по цилиндрической поверхности в слоистой среде, необходимо подставить выражения для упругих смещений и механических напряжений (1)—(4) в соотношения для граничных условий (5)—(7). При выполнении подстановки сформируется следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \mu_1 \left.\dfrac{\partial \xi_{1z}}{\partial r}\right|_{r=R_1} = \mu_2 \left.\dfrac{\partial \xi_{2z}}{\partial r}\right|_{r=R_1}, \\ \left.\dfrac{\partial \xi_{2z}}{\partial r}\right|_{r=R_2} = 0, \\ \left.\xi_{1z}\right|_{r=R_1} = \left.\xi_{2z}\right|_{r=R_1}. \end{cases}$$

В эту систему уравнений подставляются известные компоненты упругих смещений (1), (2):

$$\begin{cases} \mu_1 A J'_p\left(k_{1t}R_1\right) - \mu_2\left[BJ'_p\left(k_{2t}R_2\right) + CN'_p\left(k_{2t}R_2\right)\right] = 0, \\ BJ'_p\left(k_{2t}R_2\right) + CN'_p\left(k_{2t}R_2\right) = 0, \\ AJ_p\left(k_{1t}R_1\right) - BJ_p\left(k_{2t}R_1\right) - CN_p\left(k_{2t}R_1\right) = 0, \end{cases}$$

где $J'_p(x)=\dfrac{dJ_p(x)}{dx}$, $N'_p(x)=\dfrac{dN_p(x)}{dx}$ при $x=k_{1,2t}R_{1,2}$.

Далее, воспользовавшись вышеприведенной системой уравнений, требуется составить детерминант и приравнять его к нулю:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 J'_p(k_{1t}R_1) & -\mu_2 J'_p(k_{2t}R_2) & N'_p(k_{2t}R_2) \\ 0 & J'_p(k_{2t}R_2) & N'_p(k_{2t}R_2) \\ J_p(k_{1t}R_1) & -J_p(k_{2t}R_1) & -N_p(k_{2t}R_1) \end{vmatrix} = 0 .$$

После решения детерминанта и ряда нескольких преобразований получим дисперсионное уравнение для рассматриваемой задачи [33]:

$$\frac{J'_p(k_{1t}R_1)}{J_p(k_{1t}R_1)} = \frac{\mu_2 k_{2t}}{\mu_1 k_{1t}} \times$$
$$\times \frac{J'_p(k_{2t}R_1) N'_p\left[k_{2t}(R_1+h)\right] - J'_p\left[k_{2t}(R_1+h)\right] N'_p(k_{2t}R_1)}{J_p(k_{2t}R_1) N'_p\left[k_{2t}(R_1+h)\right] - J'_p\left[k_{2t}(R_1+h)\right] N_p(k_{2t}R_1)}, \qquad (8)$$

где $h=R_2-R_1$ — толщина второго слоя.

Поскольку дисперсионное уравнение (8) содержит неэлементарные функции Бесселя и Неймана, такое уравнение является трансцендентным и имеет множество решений. Найденные корни уравнения определяются параметром p, связь которого с величиной волновых чисел k_t при определенном радиусе R устанавливает уравнение (8). Для дальнейшего упрощения рассмотрения и анализа уравнения будет учтено условие малости толщины верхнего слоя среды, т.е. $hk_{2t} \ll 1$, а также применены правила дифференцирования бесселевых функций [34]:

$$\frac{d}{dx}J_p(x) = -J_{p+1}(x) + \frac{pJ_p(x)}{x}, \qquad (9)$$

$$\frac{d}{dx}J_p(x) = J_{p-1}(x) - \frac{pJ_p(x)}{x}. \qquad (10)$$

Аналогичные правила (9), (10) справедливы и для функций Неймана, которые являются частным случаем функции Бесселя определенного порядка.

Тогда, принимая во внимание условие малости толщины верхнего слоя и выражения (9) и (10), дисперсионное уравнение (8) преобразуем к следующему упрощенному виду:

$$\frac{J'_p(k_{1t}R_1)}{J_p(k_{1t}R_1)} = -\frac{h}{R_1}\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{p^2-(k_{2t}R_1)^2}{k_{1t}R_1}. \qquad (11)$$

Руководствуясь допущением, что соотношение для волновых чисел сред соответствует случаю плоскопараллельной границы, т.е. $k_{2t} > k > k_{1t}$, скорости распространения волны в средах будут соотноситься как $c_{1t} > c > c_{2t}$, т.е. нижний слой структуры является замедляющим и понижает скорость распространения волны.

Для дальнейшего рассмотрения зависимости скорости распространения волны Лява от частоты и соответствующих графических построений оценим диапазон частот. Как показано в [30], существует некоторое условие ограничения по частоте $\omega > \omega_{\text{пр}}$, где $\omega_{\text{пр}}$ — предельная частота:

$$\left.\frac{J'_p\left(k_{1t}R_1\right)}{J_p\left(k_{1t}R_1\right)}\right|_{k_{1t}R_1=p} < \frac{J'_p\left(k_{1t}R_1\right)}{J_p\left(k_{1t}R_1\right)}, \quad (12)$$

где обозначение $k_{1t}R_1 = p$ соответствует предельной частоте $\omega_{пр}$: $\left[k_{1t}R_1\right]_{пр} = \frac{\omega_{пр}}{c_{1t}}R_1$, $c_t^{(1)}$ — скорость поперечной волны. При использовании асимптотического представления и упрощения дисперсионного уравнения (11) по материалам работ [30, 34] в виде:

$$\frac{J'_p\left(k_{1t}R_1\right)}{J_p\left(k_{1t}R_1\right)} \simeq \sqrt{\frac{p^2}{\left(k_{1t}R_1\right)^2}-1} - \frac{1}{2\left(k_{1t}R_1\right)} \text{ при } p > k_{1t}R_1 \gg 1, \quad (13)$$

а также выполнении подстановки предельных значений в данное выражение, условие ограничения частотного диапазона запишем следующим образом:

$$\omega_{пр} \propto \left(\frac{c_{1t}}{R_1}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\mu_1 c_{2t}}{\mu_2 c_{1t}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{c_{2t}}{R_2 - R_1}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{\left(c_{2t}\right)^2}{\left(c_{1t}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{3}}. \quad (14)$$

Выполнив расчет по данному выражению, получим значение предельной частоты: $\omega_{пр} \approx 379,8 - 657,9i$ Гц.

Анализ выражения (14) показывает, что при стремлении скорости поперечных волн в первом слое к скорости во втором слое $c_{1t} \to c_{2t}$, или при равенстве нулю толщины второго слоя (h = 0), волны Лява на цилиндрической поверхности не распространяются. Согласно (14), условие ограничения частотного диапазона связано с ограничением глубины проникновения волны в зависимости от толщины верхнего слоя h: при стремлении этого параметра к нулю возрастает глубина проникновения волны, вследствие чего на линии разветвления бесконечного порядка $r = 0$ появляется смещение, что, в свою очередь, препятствует установлению волнового процесса в среде. Если рассматривать случай „развертывания“ цилиндрической поверхности в плоскость, т.е. устремления радиуса кривизны в бесконечность $\left(R_1 \to \infty\right)$, волны Лява могут распространяться в пределах всего частотного диапазона [30].

Для построения графической зависимости скорости распространения волны Лява от частоты ультразвука используется упрощенный вид дисперсионного уравнения, записанного в форме (11). Графические построения выполняются в диапазоне частот ω = 0—1 МГц (рис. 2; кривая *1* соответствует радиусу кривизны цилиндрической поверхности R = 130, *2* — 110, *3* — 80 мм).

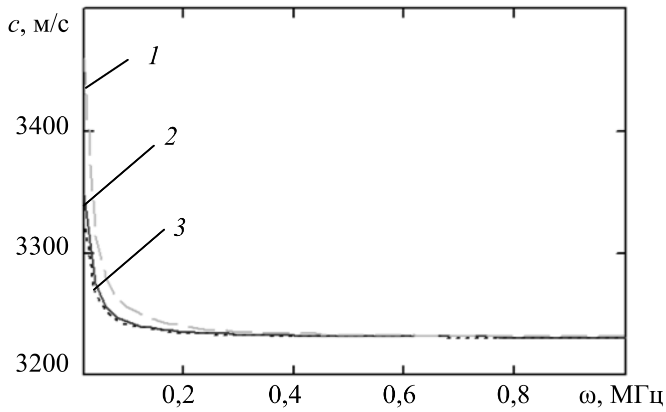

Рис. 2

Проанализировав рис. 2, стоит отметить убывающий характер зависимости скорости распространения волны Лява от увеличения частоты. Также следует отметить влияние радиуса кривизны поверхности на скорость распространения волны — из представленных графиков видно, что при уменьшении радиуса скорость распространения волны в слоях значительно падает.

Заключение. Отметим, что в статье показано влияние на абсолютное значение скорости волны Лява таких параметров однородной цилиндрической среды, как радиус кривизны поверхности.

Представлены отличия акустических свойств цилиндрических слоистых сред от свойств плоскопараллельных сред. Получено дисперсионное уравнение для волны Лява, распространяющейся параллельно слоям структуры на цилиндрической поверхности с однородными граничными условиями. Стоит отметить, что параметром, влияющим на фазовую скорость волны, является не только радиус кривизны цилиндрической поверхности, но и наличие дополнительных промежуточных слоев.

При увеличении частоты скорость распространения волны Лява плавно понижается, кроме того, существенное влияние на скорость волны вносит параметр кривизны цилиндрической поверхности, что подтверждается построенными графическими зависимостями скорости волны Лява от частоты для трех случаев радиуса кривизны — 80, 110 и 130 мм.

Полученные зависимости используются применительно к задачам нахождения основных физико-механических характеристик материала на основе акустических измерений, а также в качестве основного материала для проведения предызмерительных изысканий с целью получения максимального объема информации без применения средств ультразвукового контроля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ямщиков В. С., Бауков Ю. И.* Упругие волны в неоднородном массиве // Геоакустика. М.: Изд-во МГИ, 1973. 256 с.

2. *Горбацевич Ф. Ф.* Отражение и преломление упругих волн на границе раздела сред. Апатиты: Кольский филиал РАН, 1985.

3. *Панасюк О. Н.* Анализ влияния граничных условий на распространение волн в слоистых композитных материалах // Прикладная механика. 2014. № 4. С. 52—58.

4. *Оболенцева И. Р.*, *Чичинина Т. И.* 50 лет исследований сейсмической анизотропии в России // Геология и геофизика. 2010. Т. 51, № 10. С. 1452—1470.

5. *McCollum B., Snell F. A.* Asymmetry of sound velocity in stratified formations // Physics. 1932. Vol. 2, N 3. P. 174.

6. *Weatherby B. B., Born W. T., Harding R. L.* Granite and limestone velocity determinations in Arbuckle Mountains, Oklahoma // Bull. AAPG. 1934. Vol. 18. P. 106—118.

7. *Pirson S. J.* The correlation method of seismographing for oil // Oil Weekly. 1937. Vol. 87, N 2. P. 24—44.

8. *Beers R. F.* Velocity stratification as an aid to correlation // Geophysics. 1940. Vol. 5, N 1. P. 15—21.

9. *Тархов А. Г.* К вопросу об анизотропии упругих свойств горных пород // Материалы ВСЕГЕИ. Общая серия. Сборник № 5. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1940. С. 209—222.

10. *Ризниченко Ю. В.* О сейсмической квазианизотропии // Изв. АН СССР. Серия географ. и геофиз. 1949. № 6. С. 518—543.

11. *Ляховицкий Ф. М., Невский М. В.* Анализ анизотропии скоростей сейсмических волн в тонкослоистых периодических средах // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1970. № 9. С. 12—21.

12. *Сибиряков Б. П., Максимов Л. А., Татарников М. А.* Анизотропия и дисперсия упругих волн в слоистых периодических структурах. Новосибирск: Наука, 1980. 73 с.

13. *Клем-Мусатов К. Д., Оболенцева И. Р., Айзенберг А. М.* Расчет полей упругих волн для одной модели анизотропной среды // Динамические характеристики сейсмических волн. Новосибирск: Наука, 1973. С. 73—98.

14. *Айзенберг А. М., Клем-Мусатов К. Д., Ланда Е. И.* Модель анизотропной сейсмической среды // Сейсмические волны в сложнопостроенных средах. Новосибирск: Наука, 1974. С. 64—110.

15. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.

16. *Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 639 с.

17. *Петрашень Г. И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.

18. *Мартынов В. Н., Михайленко Б. Г.* Численное моделирование распространения упругих волн в анизотропных неоднородных средах для полупространства и сферы // Математические методы интерпретации геофизических наблюдений. Новосибирск: Вычислительный центр СО РАН, 1979. С. 85—114.

19. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1961. Вып. 5. С. 36—46.

20. *Оболенцева И. Р., Гречка В. Ю.* Лучевой метод в анизотропной среде (алгоритмы, программы). Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1989. 225 с.

21. *Бродов Л. Ю., Ковтун А. А., Тихонов А. А.* Некоторые результаты численного моделирования для поперечно-изотропной среды // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 11. С. 48—57.

22. *Авилова Г. М., Рыбак С. А.* Нормальные волны в слоистых цилиндрических оболочках // Акустический журн. 1979. Т. 25, № 1. С. 18—22.

23. *Белубекян М. В., Овсепян В. В.* Задача типа Лява для цилиндрической полости // Акустический журн. 1993. Т. 39, № 2. С. 370—373.

24. *Пятаков П. А.* Возбуждение волн Лява, распространяющихся по цилиндрической поверхности // Акустический журн. 1980. Т. 26, № 2. С. 237—241.

25. *Капцов А. В., Кузнецов С. В.* Волны Лява в трехслойном упругом полупространстве // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79, № 4. С. 550—557.

26. *Ильяшенко А. В., Кузнецов С. В.* Теоретические аспекты применения волн Лява и SH-волн в неразрущающей диагностике слоистых сред // Дефектоскопия. 2017. № 9. С. 3—9.

27. *Рашидов Т. Р., Кузнецов С. В., Мардонов Б. М., Мирзаев И.* Прикладные задачи сейсмодинамики сооружений. Кн. 1. Действие сейсмических волн на подземный трубопровод и фундаменты сооружений, взаимодействующих с грунтовой средой. Ташкент: Navro'z, 2019. 268 с.

28. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.

29. *Малюжинец Г. Д.* Математическая формулировка задачи о вынужденных гармонических колебаниях в произвольной области // ДАН СССР. 1951. Т. 78, № 3. С. 439—442.

30. *Шевяхов Н. С.* О волнах Лява на поверхности цилиндра, покрытого слоем // Акустический журн. 1977. Т. 23, № 1. С. 155—157.

31. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004.

32. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.

33. *Гуляев Ю. В., Ползикова Н. И.* Сдвиговые поверхностные акустические волны на цилиндрической поверхности твердого тела, покрытой слоем инородного материала // Акустический журн. 1978. Т. 24, № 4. С. 504—507.

34. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971.

Сведения об авторах

Антон Владимирович Вагин — аспирант; СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, кафедра электроакустики и ультразвуковой техники, ассистент; E-mail: av.vagin@bk.ru

Алена Сергеевна Воротынцева — магистрант; СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, кафедра электроакустики и ультразвуковой техники; E-mail: avorotynceva@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.08.2023; одобрена после рецензирования 03.11.2023; принята к публикации 17.12.2023.

REFERENCES

1. Yamshchikov V.S., Baukov Yu.I. *Uprugiye volny v neodnorodnom massive. Geoakustika* (Elastic Waves in an Inhomogeneous Mass *in* Geoacoustics), Moscow, 1973, pp. 256. (in Russ.)
2. Gorbatsevich F.F. *Otrazheniye i prelomleniye uprugikh voln na granitse razdela sred* (Reflection and Refraction of Elastic Waves at the Interface between Media), Apatity, 1985. (in Russ.)
3. Panasyuk O.N. *International Applied Mechanics*, 2014, no. 4(50), pp. 399–405.
4. Obolentseva I.R., Chichinina T.I. *Geologiya i geofizika*, 2010, no. 10(51), pp. 1452–1470. (in Russ.)
5. McCollum B., Snell F.A. *Physics*, 1932, no. 3(2), pp. 174.
6. Weatherby B.B., Born W.T., Harding R.L. *Bull. AAPG*, 1934, vol. 18, pp. 106–118.
7. Pirson S.J. *Oil Weekly*, 1937, no. 2(87), pp. 24–44.
8. Beers R.F. *Geophysics*, 1940, no. 1(5), pp. 15–21.
9. Tarkhov A.G. *Materialy VSEGEI. Obshchaya seriya, sbornik № 5* (VSEGEI Materials. General Series, Collection No. 5), Moscow, Leningrad, 1940, pp. 209–222. (in Russ.)
10. Riznichenko Yu.V. *Izvestiya AN SSSR. Seriya geografiya i geofizika*, 1949, no. 6, pp. 518–543. (in Russ.)
11. Lyakhovitskiy F.M., Nevskiy M.V. *Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli*, 1970, no. 9, pp. 12–21. (in Russ.)
12. Sibiryakov B.P., Maksimov L.A., Tatarnikov M.A. *Anizotropiya i dispersiya uprugikh voln v sloistykh periodicheskikh strukturakh* (Anisotropy and Dispersion of Elastic Waves in Layered Periodic Structures) Novosibirsk, 1980, 73 p. (in Russ.)
13. Klem-Musatov K.D., Obolentseva I.R., Ayzenberg A.M. *Dinamicheskiye kharakteristiki seysmicheskikh voln* (Dynamic Characteristics of Seismic Waves), Novosibirsk, 1973, pp. 73–98. (in Russ.)
14. Aizenberg A.M., Klem-Musatov K.D., Landa E.I. *Seysmicheskiye volny v slozhnopostroyennykh sredakh* (Seismic Waves in Complex Environments), Novosibirsk, 1974, pp. 64–110. (in Russ.)
15. Fedorov F.I. *Teoriya uprugikh voln v kristallakh* (Theory of Elastic Waves in Crystals), Moscow, 1965, 386 p. (in Russ.)
16. Sirotin Yu.I., Shaskolskaya M.P. *Osnovy kristallofiziki* (Fundamentals of Crystal Physics), Moscow, 1979, 639 p. (in Russ.)
17. Petrashen' G.I. *Rasprostraneniye voln v anizotropnykh uprugikh sredakh* (Wave Propagation in Anisotropic Elastic Media), Leningrad, 1980, 280 p. (in Russ.)
18. Martynov V.N., Mikhaylenko B.G. *Matematicheskiye metody interpretatsii geofizicheskikh nablyudeniy* (Mathematical Methods for Interpreting Geophysical Observations), Novosibirsk, 1979, pp. 85–114. (in Russ.)
19. Babich V.M. *Voprosy dinamicheskoy teorii rasprostraneniya seysmicheskikh voln* (Questions of the Dynamic Theory of Seismic Wave Propagation), Leningrad, 1961, no. 5, pp. 36–46. (in Russ.)
20. Obolentseva I.R., Grechka V.Yu. *Luchevoy metod v anizotropnoy srede (algoritmy, programmy)* (Beam Method in an Anisotropic Environment (Algorithms, Programs)), Novosibirsk, 1989, 225 p. (in Russ.)
21. Brodov L.Yu., Kovtun A.A., Tikhonov A.A. *Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli*, 1986, no. 11, pp. 48–57. (in Russ.)
22. Avilova G.M., Rybak S.A. *Soviet Physics. Acoustics*, 1979, no. 1(25), pp. 18–22. (in Russ.)
23. Belubekyan M.V., Ovsepyan V.V. *Acoustical Physics*, 1993, no. 2(39), pp. 370–373. (in Russ.)
24. Pyatakov P.A. *Soviet Physics. Acoustics*, 1980, no. 2(26), pp. 237–241. (in Russ.)
25. Kaptsov A.V., Kuznetsov S.V. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, no. 4(79), pp. 388–393.
26. Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2017, no. 9(53), pp. 597–603.
27. Rashidov T.R., Kuznetsov S.V., Mardonov B.M., Mirzayev I. *Prikladnyye zadachi seysmodinamiki sooruzheniy. Kniga 1. Deystviye seysmicheskikh voln na podzemnyy truboprovod i fundamenty sooruzheniy, vzaimodeystvuyushchikh s gruntovoy sredoy* (Applied Problems of Seismodynamics of Structures. Book 1. The Effect of Seismic Waves on Underground Pipelines and Foundations of Structures Interacting with the Soil Environment), Tashkent, 2019, 268 p. (in Russ.)
28. Viktorov I.A. *Zvukovyye poverkhnostnyye volny v tverdykh telakh* (Sound Surface Waves in Solids), Moscow, 1981, 287 p. (in Russ.)
29. Malyuzhinets G.D. *DAN USSR*, 1951, no. 3(78), pp. 439–442. (in Russ.)
30. Shevyakhov N.S. *Soviet Physics. Acoustics*, 1977, no. 1(23), pp. 155–157. (in Russ.)
31. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow, 2004. (in Russ.)
32. Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* (Mathematical Theory of Elasticity), Moscow, Leningrad, 1935, 674 p. (in Russ.)
33. Gulyaev Yu.V., Polzikova N.I. *Soviet Physics. Acoustics*, 1978, no. 4(24), pp. 504–507. (in Russ.)
34. Korenev B.G. *Vvedeniye v teoriyu besselevykh funktsiy* (Introduction to the Theory of Bessel Functions), Moscow, 1971. (in Russ.)

Data on authors

Anton V. Vagin	—	Post-Graduate Student; St. Petersburg Electrotechnical University, Department of Electroacoustics and Ultrasonic Technology, Assistant; E-mail: av.vagin@bk.ru
Alena S. Vorotyntseva	—	Master's Student; St. Petersburg Electrotechnical University, Department of Electroacoustics and Ultrasonic Technology; E-mail: avorotynceva@yandex.ru

Received 10.08.2023; approved after reviewing 03.11.2023; accepted for publication 17.12.2023.