

---

---

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ,  
УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ**  
**SYSTEM ANALYSIS, CONTROL, AND INFORMATION PROCESSING**

---

---

УДК 519.71  
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-209-219

**СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЯ  
ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ И СИНУСОИДАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ  
ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ  
С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

В. Х. Буй<sup>1</sup>, А. А. МАРГУН<sup>1,2\*</sup>, А. А. БОБЦОВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия  
\* alexeimargun@gmail.com

<sup>2</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

**Аннотация.** Рассматривается задача синтеза наблюдателя вектора переменных состояния для класса линейных нестационарных систем с произвольной относительной степенью  $r$  в условиях внешних мультигармонических возмущений. Входной сигнал предполагается неизвестным. На первом этапе решения задачи синтезируется наблюдатель вектора переменных состояния по измерениям выходной переменной. Для его реализации требуется измерение  $r$ -й производной выходного сигнала. Для преодоления данного ограничения вводится вспомогательный наблюдатель, обеспечивающий оценку начальной ошибки наблюдения с использованием метода динамического расширения регрессора с конечным временем сходимости. На основе полученной оценки выполняется восстановление сигналов, требуемых для построения наблюдателя по выходу в виде авторегрессионной модели. Предложенный алгоритм обеспечивает оценку вектора состояния объекта по выходу за конечное время. Приведено строгое математическое доказательство полученных результатов. Представлены результаты компьютерного моделирования в программной среде MatLab Simulink, демонстрирующие эффективность и работоспособность предложенного подхода. Разработанный алгоритм может быть применен в различных технических системах для создания виртуальных датчиков и решения задач диагностирования.

**Ключевые слова:** наблюдатель по выходу, внешнее возмущение, нестационарные системы, конечное время сходимости

**Благодарности:** исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, госзадание № 2019-0898.

**Ссылка для цитирования:** Буй В. Х., Маргун А. А., Бобцов А. А. Синтез наблюдателя переменных состояния и синусоидального возмущения для линейной нестационарной системы с неизвестными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 209—219. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-209-219.

**SYNTHESIS OF AN OBSERVER OF STATE VARIABLES  
AND SINUSOIDAL DISTURBANCE  
FOR A LINEAR NONSTATIONARY SYSTEM  
WITH UNKNOWN PARAMETERS**

V. H. Bui<sup>1</sup>, A. A. Margun<sup>1,2\*</sup>, A. A. Bobtsov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ITMO University, St. Petersburg, Russia  
\* alexeimargun@gmail.com

<sup>2</sup>Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS, St. Petersburg, Russia

**Abstract.** The problem of synthesizing an observer of a vector of state variables for a class of linear nonstationary systems with an arbitrary relative degree  $r$  under conditions of external multi-harmonic disturbances is considered. The input signal is assumed to be unknown. At the first stage of solving the problem, an observer of the vector of state variables is synthesized from the measurements of the output variable. To implement it, it is necessary to measure the  $r$ -th derivative of the output signal. To overcome this limitation, an auxiliary observer is introduced, which provides an estimate of the initial observation error using the method of dynamic expansion of the regressor with a finite convergence time. Based on the obtained estimate, the reconstruction of the signals required to construct an output observer in the form of an autoregressive model is carried out. The proposed algorithm provides an estimate of the state vector of an object based on output in a finite time. A rigorous mathematical proof of the obtained solution is given. The results of computer simulation in the MatLab Simulink software environment are presented, demonstrating the effectiveness and efficiency of the proposed approach. The developed algorithm can be used in various technical systems to create virtual sensors and solve diagnostic problems.

**Keywords:** output observer, external disturbance, non-stationary systems, finite convergence time

**Acknowledgements:** the research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, state assignment No. 2019-0898.

**For citation:** Bui V. H., Margun A. A., Bobtsov A. A. Synthesis of an observer of state variables and sinusoidal disturbance for a linear nonstationary system with unknown parameters. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 3. P. 209—219 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-209-219.

**Введение.** Построение наблюдателей вектора переменных состояния — одна из фундаментальных задач в теории управления. Данной тематике посвящено большое количество исследований, что обусловлено технологическими ограничениями при измерении переменных физических величин на практике (см., например [1—3]). Кроме того, значительное количество реальных систем имеют нестационарные параметры, что не позволяет использовать известные классические подходы [4].

Наряду с этим наличие внешних факторов, таких как возмущения в канале управления и шумы измерений, приводит к отклонению измеряемых сигналов от реальных значений, что, в свою очередь, приводит к возникновению ошибок оценивания переменных вектора состояния. Синтез наблюдателей для нестационарных систем при неизвестных возмущениях в канале управления — достаточно сложная задача, одним из распространенных подходов к решению которой является сведение исходной модели объекта к линейной регрессии [5, 6]. При таком решении матрица системы предполагается заданной в канонической форме [7] или может быть переписана как сумма некоторой известной и неизвестной постоянной матриц [8]. Преимущество такого подхода заключается в возможности идентификации неизвестных параметров системы или внешних возмущений независимо от алгоритма управления. Это позволяет комбинировать различные алгоритмы идентификации, управления и компенсации возмущений. Недостатком данного метода, препятствующего его применению, является необходимость незатухающего возбуждения регрессора. Другой подход основан на использовании наблюдателя по выходу (Unknown Input Observer — UIO) [9—11]. При этом внешние возмущения и нестационарные компоненты рассматриваются как неизвестный входной сигнал, воздействующий на систему. Однако, как правило, построение таких наблюдателей возможно только для линейных систем, относительная степень которых равна единице [12, 13].

Построение наблюдателей состояния по выходу для объектов с большей относительной степенью требует введения существенных ограничений, например измерения производных выходного сигнала системы [14—16].

В настоящей статье предложен новый подход, объединяющий идеи двух вышеупомянутых методов, что позволяет синтезировать наблюдатель вектора состояния по выходу для класса нестационарных систем с произвольной относительной степенью.

**Постановка задачи.** Рассмотрим класс линейных одноканальных, подверженных влиянию возмущающих воздействий объектов управления вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}[u(t) + f(t)]; \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  — неизмеримый вектор состояния;  $u(t) = \boldsymbol{\theta}^T(t)\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}$  — неизвестный входной сигнал, зависящий от вектора состояния;  $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор нестационарных параметров;  $y(t) \in \mathbb{R}$  — измеряемый выходной сигнал объекта управления;  $f(t) \in \mathbb{R}$  — неизмеримое мультигармоническое возмущение;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  — известные постоянные матрицы соответствующих размерностей; объект управления имеет относительную степень, равную  $r \leq n$ , что означает  $\mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-2}\mathbf{B} = 0$ .

Введем следующие допущения.

Допущение 1. Количество гармоник в сигнале возмущения известно.

Допущение 2. Пары известных постоянных матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  и  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  соответственно управляемы и наблюдаемы.

Допущение 3. Нестационарный параметр  $\boldsymbol{\theta}(t)$  является выходом линейного генератора:

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{H}\xi(t); \quad \dot{\xi}(t) = \mathbf{\Gamma}\xi(t),$$

где  $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$  — вектор состояния генератора с неизвестными начальными условиями  $\xi(0)$ , постоянные матрицы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{\Gamma}$  известны.

Цель работы заключается в построении наблюдателя вектора переменных состояния объекта (1), обеспечивающего выполнение следующих равенств:

$$|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)| = 0, \quad |f(t) - \hat{f}(t)| = 0, \quad t \geq \tau > 0,$$

где  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  — оценка вектора состояния,  $\hat{f}(t)$  — оценка возмущения,  $\tau$  — положительное число.

**Построение наблюдателя по выходу.** Рассмотрим систему (1) с относительной степенью  $r \leq n$ . Построим для нее наблюдатель состояния по выходу вида

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}y^{(r)}(t), \quad (2)$$

где матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{G}$  обеспечивают выполнение следующих условий:

$$\mathbf{B} - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}^r. \quad (4)$$

Введем ошибку наблюдения  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ . Продифференцировав  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  с учетом (1) и (2), получим ее динамическую модель:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}[u(t) + f(t)] - \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{G}y^{(r)}(t) = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(u + f) - \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}^r\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}(u + f). \end{aligned}$$

Так как в (4)  $\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}^r$ , то

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B})(u + f).$$

Обозначив  $\mathbf{F} = \mathbf{M} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ , получим

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B})(u + f). \quad (5)$$

Подставим выражения (3) в (5):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}}(t). \quad (6)$$

Очевидно, что если матрица  $\mathbf{F}$  гурвицева, то  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  экспоненциально сходится к нулю. С другой стороны, для построения наблюдателя (2) требуется решить систему уравнений (3), (4). Данная система уравнений разрешима, если выполняется следующее условие:

$$\text{rank}(\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}) = \text{rank}\mathbf{B}.$$

Доказательство приведено в работе [17].

Для уменьшения времени сходимости применим другой подход, использующий метод динамического расширения регрессора с конечным временем сходимости (FT DREM) [18]. Введем следующие вспомогательные переменные:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{G}y^{(r-1)}, \\ \dot{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y + \mathbf{G}y^{(r)} - \mathbf{G}y^{(r)} = \mathbf{F}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{G}y^{(r-1)}) + \mathbf{L}y, \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{z}_1 - \mathbf{F}\mathbf{G}y^{(r-2)}, \\ \dot{\mathbf{z}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{G}y^{(r-1)}) + \mathbf{L}y - \mathbf{F}\mathbf{G}y^{(r-1)} = \mathbf{F}(\mathbf{z}_2 + \mathbf{F}\mathbf{G}y^{(r-2)}) + \mathbf{L}y, \\ &\vdots \\ \mathbf{z}_r &= \mathbf{z}_{r-1} - \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y, \\ \dot{\mathbf{z}}_r &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y) + \mathbf{L}y. \end{aligned} \quad (7)$$

Оценка вектора состояния примет вид

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{G}y^{(r-1)} = \mathbf{z}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y + \dots + \mathbf{G}y^{(r-1)}. \quad (8)$$

Решая (6) с учетом (7), (8), получаем

$$\mathbf{x} - [\mathbf{z}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y + \dots + \mathbf{G}y^{(r-1)}] = e^{\mathbf{F}t}\tilde{\mathbf{x}}(0), \quad (9)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$  — начальная ошибка наблюдения.

Умножив уравнение (9) на матрицу  $\mathbf{C}$ , получим

$$y - \mathbf{C}(\mathbf{z}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y + \dots + \mathbf{G}y^{(r-1)}) = \mathbf{C}e^{\mathbf{F}t}\tilde{\mathbf{x}}(0).$$

Применив фильтр  $(r-1)$ -го порядка  $\frac{\lambda_1^{r-1}}{(p+\lambda_1)^{r-1}}$ , где  $p = \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования, получим следующее выражение:

$$q_1(t) = \mathbf{m}_1^T \mathbf{k}_1, \quad (10)$$

где

$$q_1(t) = \frac{\lambda_1^{r-1}}{(p+\lambda_1)^{r-1}} \left[ y - \mathbf{C}(\mathbf{z}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y + \dots + \mathbf{G}y^{(r-1)}) \right], \quad \mathbf{m}_1^T = \frac{\lambda_1^{r-1}}{(p+\lambda_1)^{r-1}} \left[ \mathbf{C}e^{\mathbf{F}t} \right], \quad \mathbf{k}_1 = \tilde{\mathbf{x}}(0).$$

Уравнение (10) имеет вид линейной регрессии. Используем метод FT DREM для определения значения  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$  [18]. После расширения системы (10) на  $n-1$  уравнений путем применения к сигналам различных линейных фильтров первого порядка получим систему из  $n$  скалярных уравнений

$$\bar{\mathbf{q}}_1(t) = \bar{\mathbf{m}}_1(t) \mathbf{k}_1.$$

Умножив уравнение на союзную матрицу  $\text{adj}(\bar{\mathbf{m}}_1(t))$ , получим, что каждый элемент вектора  $\mathbf{k}_1$  может быть определен с применением градиентного спуска:

$$\dot{\hat{k}}_{1i} = \gamma_{1i} \Delta_1(t) \left[ \Upsilon_{1i} - \Delta_1(t) \hat{k}_{1i} \right], \quad (11)$$

где  $\Delta_1(t) = \det(\bar{\mathbf{m}}_1(t))$ ,  $\Upsilon_{1i} = \text{adj}(\bar{\mathbf{m}}_1(t)) \bar{\mathbf{q}}_1(t)$ , или его финитной модификации для обеспечения сходимости за конечное время:

$$\hat{k}_{1i}^*(t) = \frac{1}{1 - \nu_i^c(t)} \left[ \hat{k}_{1i}(t) - \nu_i^c(t) \hat{k}_{1i}(0) \right], \quad (12)$$

где

$$\nu_{1i}^c(t) = \begin{cases} \mu_{1i}, & \text{если } \nu_{1i}(t) \geq \mu_{1i}; \\ \nu_{1i}(t), & \text{если } \nu_{1i}(t) < \mu_{1i}; \end{cases}$$

$$\mu_{1i} \in (0, 1),$$

$$\dot{\nu}_{1i}(t) = -\gamma_{1i} \Delta_1^2(t) \nu_{1i}(t), \nu_{1i}(0) = 1, \gamma_{1i} > 0.$$

На основе полученных уравнений сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Пусть производные выходного сигнала доступны для измерения и сигнал  $\Delta_1(t) \notin \mathbf{L}_2$ , тогда наблюдатель (2) с алгоритмом адаптации (10)—(12) обеспечивает оценку вектора состояния  $\mathbf{x}(t)$  за конечное время.

**Синтез вспомогательного наблюдателя.** Предложенный наблюдатель обеспечивает оценку вектора состояния при условии измерения производных выходного сигнала. Подставив выражение для оценки  $\mathbf{x}(t)$  в (1), с учетом допущения 3 получим

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{z}}}_r + \mathbf{F}^{r-1} \mathbf{G} \dot{\mathbf{y}} + \dots + \mathbf{G} \mathbf{y}^{(r)} &= \mathbf{A} \left( \bar{\mathbf{z}}_r + \mathbf{F}^{r-1} \mathbf{G} \mathbf{y} + \dots + \mathbf{G} \mathbf{y}^{(r-1)} \right) + \\ &+ \mathbf{B} \left( \bar{\mathbf{z}}_r + \mathbf{F}^{r-1} \mathbf{G} \mathbf{y} + \dots + \mathbf{G} \mathbf{y}^{(r-1)} \right)^T \mathbf{H} e^{\Gamma t} \boldsymbol{\xi}(0) + \mathbf{B} \mathbf{f}(t), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\bar{\mathbf{z}}_r(t) = \mathbf{z}_r(t) + e^{\mathbf{F}t} \tilde{\mathbf{x}}(0)$ ,  $\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{H} e^{\Gamma t} \boldsymbol{\xi}(0)$ .

В уравнении (13) присутствуют производные выходного сигнала, неизвестное внешнее возмущение и начальные условия  $\boldsymbol{\xi}(0)$ . Для решения проблемы, связанной неизмеримостью производных сигнала  $\mathbf{y}(t)$ , применим линейные фильтры  $r$ -го порядка и лемму о перестановках [19], что позволит исключить члены, содержащие  $\boldsymbol{\xi}(0)$ . Для упрощения дальнейшего изложения рассмотрим случай, когда относительная степень равна двум, а возмущение представлено синусоидой. При этом уравнение (13) примет вид

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}_2 + \mathbf{F} \mathbf{G} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{G} \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} (\bar{\mathbf{z}}_2 + \mathbf{F} \mathbf{G} \mathbf{y} + \mathbf{G} \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{B} (\bar{\mathbf{z}}_2 + \mathbf{F} \mathbf{G} \mathbf{y} + \mathbf{G} \dot{\mathbf{y}})^T \mathbf{H} e^{\Gamma t} \boldsymbol{\xi}(0) + \mathbf{B} \mathbf{f}.$$

Применим фильтр  $\frac{\lambda_2^2}{(p + \lambda_2)^2}$  и лемму о перестановках [19]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{B} \frac{\lambda_2}{p + \lambda_2} \left[ \dot{\mathbf{y}} \mathbf{G}^T \mathbf{H} e^{\Gamma t} \boldsymbol{\xi}(0) \right] = \\ &= \mathbf{B} \left\{ \mathbf{G}^T \mathbf{H} e^{\Gamma t} \boldsymbol{\xi}(0) \frac{\lambda_2 p}{p + \lambda_2} [\mathbf{y}] - \frac{1}{p + \lambda_2} \left[ \mathbf{G}^T \mathbf{H} \Gamma e^{\Gamma t} \boldsymbol{\xi}(0) \frac{\lambda_2 p}{p + \lambda_2} [\mathbf{y}] \right] \right\} = \\ &= \left\{ \mathbf{B} \frac{\lambda_2 p}{p + \lambda_2} [\mathbf{y}] \mathbf{G}^T \mathbf{H} e^{\Gamma t} - \mathbf{B} \frac{1}{p + \lambda_2} \left[ \frac{\lambda_2 p}{p + \lambda_2} [\mathbf{y}] \mathbf{G}^T \mathbf{H} \Gamma e^{\Gamma t} \right] \right\} \boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{B} \mathbf{S}_1^* \boldsymbol{\xi}(0). \end{aligned}$$

Перепишем данное уравнение в следующей форме:

$$q_2(t) = \mathbf{B} \left[ S_0^*(t) + \frac{\lambda_2}{p + \lambda_2} [S_1^*(t)] \right] \xi(0) + \mathbf{B} \bar{f}(t),$$

где

$$q_2(t) = \frac{\lambda_2^2}{(p + \lambda_2)^2} \left[ (\dot{\bar{z}}_2 + \mathbf{F} \mathbf{G} \dot{y} + \mathbf{G} \ddot{y}) - \mathbf{A} (\bar{z}_2 + \mathbf{F} \mathbf{G} y + \mathbf{G} \dot{y}) \right],$$

$$S_0^*(t) = \frac{\lambda_2^2}{(p + \lambda_2)^2} \left[ (\bar{z}_2 + \mathbf{F} \mathbf{G} y)^T \mathbf{H} e^{\Gamma t} \right], \quad \bar{f}(t) = \frac{\lambda_2^2}{(p + \lambda_2)^2} [f(t)].$$

Таким образом, путем применения фильтра к (13) после ряда преобразований получаем следующее выражение для системы с произвольной относительной степенью:

$$q_r(t) = \mathbf{B} \left[ S_0(t) + \frac{\lambda^{r-1}}{(p + \lambda)^{r-1}} [S_1(t)] + \dots + S_{r-1}(t) \right] \xi(0) + \mathbf{B} \frac{\lambda^r}{(p + \lambda)^r} [f(t)], \quad (14)$$

где

$$q_r(t) = \frac{\lambda^r}{(p + \lambda)^r} \left[ (\dot{\bar{z}}_r + \mathbf{F}^{r-1} \mathbf{G} \dot{y} + \dots + \mathbf{G} y^{(r)}) - \mathbf{A} (\bar{z}_r + \mathbf{F}^{r-1} \mathbf{G} y + \dots + \mathbf{G} y^{(r-1)}) \right],$$

$$S_0^*(t) = \frac{\lambda^r}{(p + \lambda)^r} \left[ (\bar{z}_r + \mathbf{F}^{r-1} \mathbf{G} y)^T \mathbf{H} e^{\Gamma t} \right], \quad \bar{f}(t) = \frac{\lambda^r}{(p + \lambda)^r} [f(t)].$$

Полученное уравнение в упрощенном виде выглядит следующим образом:

$$q_r(t) = \mathbf{B} \bar{S}_r(t) \xi(0) + \mathbf{B} \bar{f}(t). \quad (15)$$

Далее, используя свойства синусоидального сигнала

$$p^2 \bar{f}(t) = -\omega^2 \bar{f}(t),$$

где  $\omega$  — частота, перепишем уравнение (15):

$$p^2 [q_r(t) - \mathbf{B} \bar{S}_r(t) \xi(0)] = -\omega^2 [q_r(t) - \mathbf{B} \bar{S}_r(t) \xi(0)]. \quad (16)$$

Для получения линейной регрессии из уравнения (16) потребуется только его первая строка. Умножим (16) на матрицу-строку  $\bar{\mathbf{B}}$ , такую что  $\bar{\mathbf{B}} \mathbf{B} = 1$ . Затем применим фильтр второго порядка  $\frac{\lambda_r^2}{(p + \lambda_r)^2}$ , где  $\lambda_r > 0$ , и сгруппируем неизвестные члены для получения регрессионного уравнения следующего вида:

$$q_r^*(t) = \mathbf{m}_r^T \mathbf{k}_r, \quad (17)$$

где

$$q_r^*(t) = \bar{\mathbf{B}} \frac{\lambda_r^2 p^2}{(p + \lambda_r)^2} [q_r(t)], \quad \mathbf{m}_r^T = \left\{ \frac{\lambda_r^2 p^2}{(p + \lambda_r)^2} [\bar{S}_r(t)], \frac{\lambda_r^2}{(p + \lambda_r)^2} [q_r(t)] - \frac{\lambda_r^2}{(p + \lambda_r)^2} [\bar{S}_r(t)] \right\},$$

$$\mathbf{k}_r = [\xi(0), \omega^2, \omega^2 \xi(0)].$$

На основе (17) могут быть сформированы оценки начальных условий вектора нестационарных параметров  $\hat{\xi}(0)$  и частоты возмущения  $\hat{\omega}$ . Переходные процессы оценивания могут иметь как асимптотический характер сходимости (метод градиентного спуска [20]), так и

сходимость за конечное время (метод FT DREM) [18]). Аналогично утверждению 1, предлагается использовать метод FT DREM.

После расширения регрессии получим линейное уравнение вида

$$\bar{\mathbf{q}}_r(t) = \bar{\mathbf{m}}_r(t) \mathbf{k}_r.$$

Умножим уравнение на союзную матрицу  $\text{adj}(\bar{\mathbf{m}}_r(t))$ . Тогда каждый элемент вектора  $\mathbf{k}_r$  определяется следующим образом:

$$\hat{k}_{ri} = \gamma_{ri} \Delta_r(t) [\Upsilon_{ri} - \Delta_r(t) \hat{k}_{ri}]; \quad (18)$$

$$\hat{k}_{ri}^*(t) = \frac{1}{1 - \nu_{ri}^c(t)} [\hat{k}_{ri}(t) - \nu_{ri}^c(t) \hat{k}_{ri}(0)], \quad (19)$$

где  $\Delta_r(t) = \det(\bar{\mathbf{m}}_r(t))$ ;  $\Upsilon_{ri} = \text{adj}(\bar{\mathbf{m}}_r(t)) \bar{\mathbf{q}}_r(t)$ ;  $\nu_{ri}^c(t)$  определяется через функцию

$$\nu_{ri}^c(t) = \begin{cases} \mu_{ri}, & \text{если } \nu_{ri}(t) \geq \mu_{ri}; \\ \nu_{ri}(t), & \text{если } \nu_{ri}(t) < \mu_{ri}; \end{cases}$$

$$\mu_{ri} \in (0, 1),$$

$$\dot{\nu}_{ri}(t) = -\gamma_{ri} \Delta_r^2(t) \nu_{ri}(t), \nu_{ri}(0) = 1, \gamma_{ri} > 0.$$

Сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Пусть объект управления, описываемый уравнением (1), удовлетворяет допущениям 1—3, вектор состояния  $\mathbf{x}(t)$  восстанавливается согласно утверждению 1 и сигнал  $\Delta_r(t) \notin \mathbf{L}_2$ . Тогда алгоритм (17)—(19) обеспечивает оценку начальных условий вектора нестационарных параметров  $\xi(0)$  и частоты внешнего возмущения за конечное время.

Из уравнения (15) с учетом утверждения 2 получаем

$$\bar{f}(t) = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{q}_r(t) - \bar{\mathbf{S}}_r(t) \xi(0) = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t) = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{a}, \quad (20)$$

где  $\boldsymbol{\Phi} = [\sin(\omega t); \cos(\omega t)]$ ,  $\mathbf{a} = [a_1 a_2]$ .

Утверждение 2 обеспечивает оценку  $\bar{f}(t)$  и  $\omega$ . Тогда линейное регрессионное уравнение (20) может быть решено с помощью метода FT DREM для определения амплитуды возмущения. Аналогично адаптивному алгоритму (10)—(12) или (17)—(19) амплитуда определяется следующим образом:

$$\hat{a}_i = \gamma_{ai} \Delta_a(t) [\Upsilon_{ai} - \Delta_a(t) \hat{a}_i], \quad (21)$$

$$\hat{a}_i^*(t) = \frac{1}{1 - \nu_{ai}^c(t)} [\hat{a}_i(t) - \nu_{ai}^c(t) \hat{a}_i(0)]. \quad (22)$$

С другой стороны, с учетом найденного в (21), (22) значения амплитуды вместе с (14) очевидно, что внешнее возмущение  $f(t)$  может быть восстановлено следующим образом:

$$f(t) = \frac{(p + \lambda)^r}{\lambda^r} [\bar{f}(t)]. \quad (23)$$

Отметим, что при известных параметрах  $\bar{f}(t)$  его производные могут быть вычислены в силу гармонической природы сигнала. После определения всех нестационарных параметров и внешних возмущений несложно построить наблюдатель состояния для системы (1). Задача

может быть решена с использованием любого классического подхода, например с помощью наблюдателя Люенбергера. Для повышения эффективности и скорости сходимости наблюдателя состояния предлагается использовать подход, описанный в утверждении 1.

**Математическое моделирование.** Для демонстрации работоспособности и эффективности предложенного подхода рассмотрим объект управления второго порядка с относительной степенью  $r = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}[\boldsymbol{\theta}^T(t)\mathbf{x}(t) + f(t)]; \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{aligned} \right\}$$

где  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = [2 \ 0]$ ,  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $f(t) = 5 \sin t$ , параметр  $\boldsymbol{\theta}^T(t) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$  генерируется выходом линейного генератора с матрицами  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{\Gamma} = 0_m$ ,  $\boldsymbol{\xi}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ; поскольку параметр  $\theta_1$  умножается на  $y(t)$ , будем полагать, что значение  $\theta_1 = 0$  известно.

Построим наблюдатель вида (2) с матрицами

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}[(\mathbf{CAB})^T \mathbf{CAB}]^{-1} (\mathbf{CAB})^T, \mathbf{T} = \mathbf{I}_n - \mathbf{GCA}, \mathbf{M} = \mathbf{TA},$$

$$\mathbf{L} = \text{place}(\mathbf{M}^T, \mathbf{C}^T, [-0,5, -0,3])^T, \mathbf{F} = \mathbf{M} - \mathbf{LC}$$

при начальных условиях наблюдателя  $\mathbf{z}_2(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

Фильтры выберем следующим образом:

$$\frac{\lambda_1}{p + \lambda_1} = \frac{\lambda_2}{p + \lambda_2} = \frac{\lambda_a}{p + \lambda_a} = \dots = \frac{\lambda_r}{p + \lambda_r} = \frac{10}{p + 10}.$$

Матрицу  $\bar{\mathbf{B}}$  зададим как  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Параметры адаптивного алгоритма FT DREM выбраны следующим образом:  $\gamma_{1i} = \gamma_{2i} = \gamma_{ai} = \gamma_{ri} = 10^6$ ,  $\mu_{1i} = \mu_{2i} = \mu_{ai} = \mu_{ri} = 0,98$ .

На рис. 1—3 показаны переходные процессы моделирования алгоритмов (10)—(12), (17)—(20) и (21)—(23): рис. 1, а, б — оценка вектора начальной ошибки наблюдения  $\hat{\tilde{\mathbf{x}}}(0)$  и оценка ошибки вектора состояния  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ ; рис. 2, а, б — оценка вектора начальных условий генератора возмущения  $\hat{\boldsymbol{\xi}}(0)$  и оценка частоты внешнего возмущения  $\hat{\omega}(t)$ ; рис. 3, а, б — оценка внешнего возмущения  $\hat{f}(t)$  и ошибка оценки внешнего возмущения  $\tilde{f}(t) = f(t) - \hat{f}(t)$ .

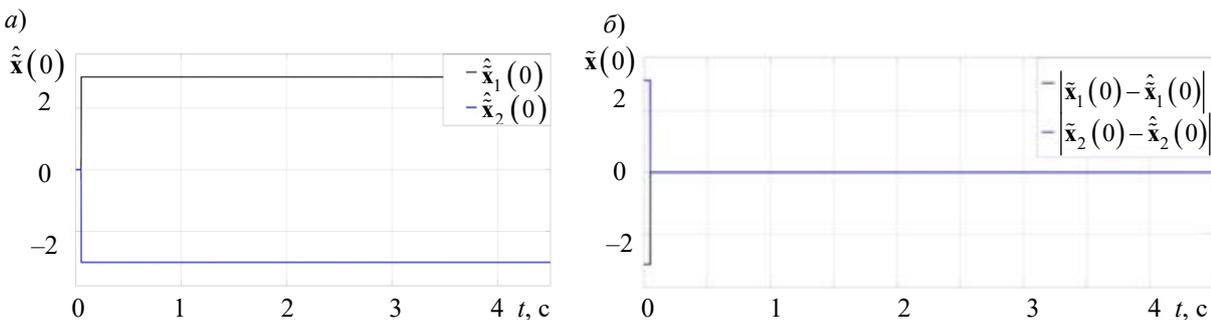


Рис. 1

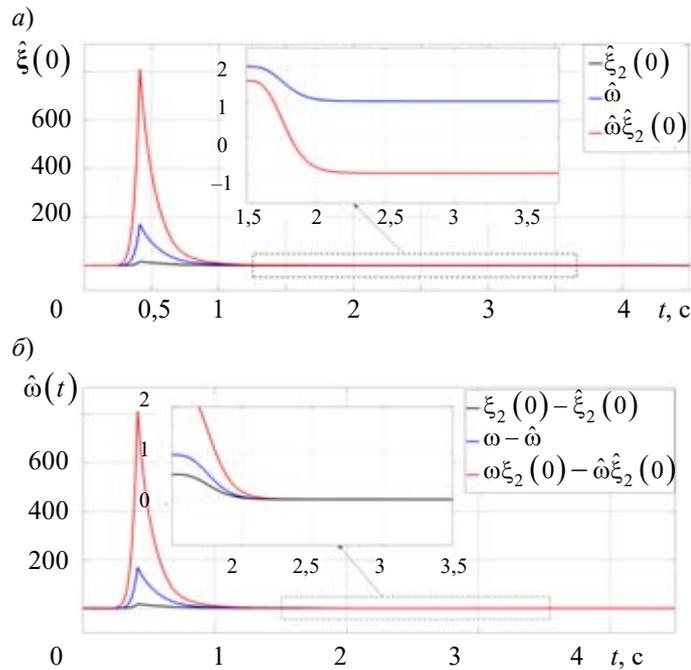


Рис. 2

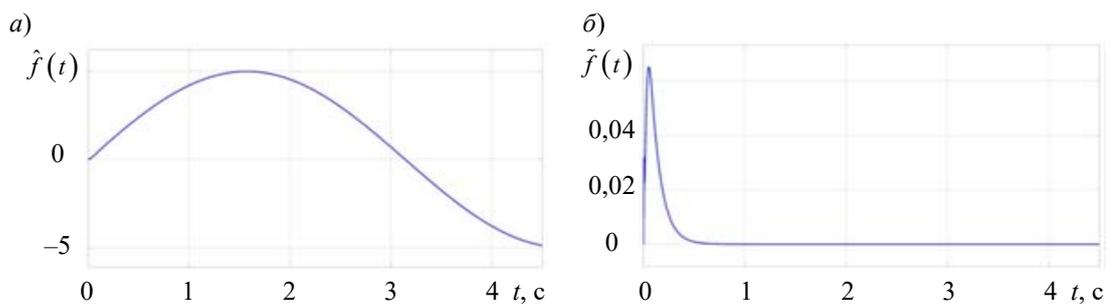


Рис. 3

**Заключение.** Рассмотрена задача синтеза наблюдателя по выходу для класса линейных нестационарных систем с внешним мультигармоническим возмущением. Преимуществом предложенного метода является возможность решения задачи наблюдения вектора состояния по выходу для объектов с произвольной относительной степенью. Представленный подход также обеспечивает идентификацию нестационарных параметров и возмущения. Работоспособность рассмотренного подхода подтверждается результатами компьютерного моделирования. В дальнейшем представленное решение может быть расширено на класс объектов с нелинейностями или нестационарными параметрами, генератор которых неизвестен.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kailath T. Linear Systems. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1985.
2. O'Reilly J. Observers for Linear Systems. N. Y.: Academic, 1983.
3. Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory. Oxford, UK: Clarendon, 1975.
4. Во К. Д., Бобцов А. А. Адаптивный наблюдатель переменных состояния линейных нестационарных систем с параметрами, заданными не точно // Автоматика и телемеханика. 2020. № 12. С. 100—110.
5. Bobtsov A., Ortega R., Yi B., Nikolaev N. Adaptive state estimation of state-affine systems with unknown timevarying parameters // Intern. Journal of Control. 2021. Vol. 95, N 9. P. 1—26. DOI: 10.1080/00207179.2021.1913647.

6. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Robust Time-Varying Parameters Estimation Based on I-DREM Procedure // arXiv preprint arXiv:2111.11716, 2021.
7. *Кочетков С. А.* Об одном алгоритме идентификации параметров в линейных нестационарных системах // Тр. IX Междунар. конф. „Идентификация систем и задачи управления“ SICPRO'12. 2012. С. 195—209.
8. *Bobtsov A., Nikolaev N., Slita O., Kozachek O., Oskina O.* Adaptive observer for a LTV system with partially unknown state matrix and delayed measurements // 14th Intern. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. ICUMT-2022. 2022. P. 165—170.
9. *Hou M., Muller P. C.* Design of Observers for Linear Systems with Unknown Inputs // IEEE Trans. on Automatic Control. 1992. Vol. 37, N 6. P. 871—875.
10. *Hou M., Muller P. C.* Disturbance Decoupled Observer Design: A Unified Viewpoint // IEEE Trans. on Automatic Control. 1994. Vol. 39, N 6. P. 1338—1341.
11. *Chen J., R. Patton J., Zhang H.* Design of Unknown Input Observers and Robust Fault Detection Filters // Intern. Journal of Control. 1996. Vol. 63. P. 85—105.
12. *Shen Z.* Nonlinear unknown input observer design by LMI for lipschitz nonlinear systems // 8th World Congress on Intelligent Control and Automation. 2010. P. 3450—3454.
13. *Malikov A. I.* State and unknown inputs observers for time-varying nonlinear systems with uncertain disturbances // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40. P. 769—775.
14. *Chen W., Saif M.* High-order sliding-mode differentiator based actuator fault diagnosis for linear systems with arbitrary relative degree and unmatched Unknown Inputs // Proc. of the 45th IEEE Conf. on Decision and Control. IEEE. 2006. P. 1153—1158.
15. *Coutinho P. H., Bessa I., Xie W. B., Nguyen A. T.* A sufficient condition to design unknown input observers for nonlinear systems with arbitrary relative degree // Intern. Journal of Robust and Nonlinear Control. 2022. Vol. 32, N 15. P. 8331—8348.
16. *Park Tae-Geon, Kim D.* Design of unknown input observers for linear systems with unmatched unknown inputs // Trans. of the Institute of Measurement and Control. 2014. Vol. 36, N 3. P. 399—410.
17. *Chen J., Patton R. J.* Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems. N. Y.: Springer Science & Business Media, 2012.
18. *Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A. A., Astolfi A., Bobtsov A. A.* New results on parameter estimation via dynamic regressor extension and mixing: Continuous and discrete-time cases // IEEE Trans. on Automatic Control. 2020. Vol. 66, N 5. P. 2265—2272.
19. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. М.: Наука, 1991.
20. *Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Vedyakov A., Aranovskiy S.* Adaptive state observers using dynamic regressor extension and mixing // Systems & Control Letters. 2019. Vol. 133. P. 104519.

#### Сведения об авторах

**Ван Хуан Буй**

— аспирант; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: buinguyenkhanh201095@gmail.com

**Алексей Анатольевич Маргун**

— канд. техн. наук; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; Институт проблем машиноведения РАН; доцент; E-mail: alexeimargun@gmail.com

**Алексей Алексеевич Бобцов**

— д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: bobtsov@mail.ru

Поступила в редакцию 29.11.2023; одобрена после рецензирования 07.12.2023; принята к публикации 14.01.2024.

#### REFERENCES

1. Kailath T. *Linear Systems*, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1985.
2. O'Reilly J. *Observers for Linear Systems*, NY, Academic, 1983.
3. Barnett S. *Introduction to Mathematical Control Theory*, Oxford, UK, Clarendon, 1975.
4. Quoc D.V., Bobtsov A.A. *Automation and Remote Control*, 2020, no. 12(81), pp. 2220—2229.
5. Bobtsov A., Ortega R., Yi B., Nikolaev N. *Intern. Journal of Control*, 2021, no. 9(95), pp. 1—26, DOI:10.1080/00207179.2021.1913647.

6. Glushchenko A., Lastochkin K. *arXiv preprint arXiv:2111.11716*, 2021.
7. Kochetkov S.A. *Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniya, SICPRO'12* (System Identification and Control Problems, SICPRO'12), Proc. of the IX Intern. Conf., 2012, pp. 195–209. (in Russ.)
8. Bobtsov A., Nikolaev N., Slita O., Kozachek O., Oskina O. *14th Intern. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops, ICUMT-2022*, 2022, pp. 165–170.
9. Hou M., Muller P.C. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1992, no. 6(37), pp. 871–875.
10. Hou M., Muller P.C. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1994, no. 6(39), pp. 1338–1341.
11. Chen J., Patton R.J., Zhang H. *Intern. Journal of Control*, 1996, vol. 63, pp. 85–105.
12. Shen Z. *8th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2010, pp. 3450–3454.
13. Malikov A.I. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, pp. 769–775.
14. Chen W., Saif M. *Proc. of the 45th IEEE Conf. on Decision and Control*, IEEE, 2006, pp. 1153–1158.
15. Coutinho P.H., Bessa I., Xie W.B., Nguyen A.T. *Intern. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, no. 15(32), pp. 8331–8348.
16. Park Tae-Geon, Kim D. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2014, no. 3(36), pp. 399–410.
17. Chen J., Patton R.J. *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*, NY, Springer Science & Business Media, 2012.
18. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A.A., Astolfi A., Bobtsov A.A. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2020, no. 5(66), pp. 2265–2272.
19. Ljung L. *System Identification, Theory for the User*, NJ, PTR Prentice Hall, 1987.
20. Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Vedyakov A., Aranovskiy S. *Systems & Control Letters*, 2019, vol. 133, pp. 104519.

#### Data on authors

- Van Huan Bui** — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: buinguyenkhanh201095@gmail.com
- Alexey A. Margun** — PhD; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS; Associate Professor; E-mail: alexeimargun@gmail.com
- Alexey A. Bobtsov** — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: bobtsov@mail.ru

Received 29.11.2023; approved after reviewing 07.12.2023; accepted for publication 14.01.2024.