

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ,
УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ**
SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

УДК 681.5
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-5-385-394

**АЛГОРИТМ СОГЛАСОВАННОГО ТРАЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖЕНИЕМ КВАДРОКОПТЕРА**

С. А. Ким*, А. А. Пыркин, О. И. Борисов

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

* *skim@itmo.ru*

Аннотация. Представлена полная модель движения квадрокоптера вдоль гладкой пространственной траектории. На основе модели предложен робастный алгоритм управления квадрокоптером по измерениям линейных координат и угла рысканья. С использованием дополнительных интеграторов получен динамический алгоритм управления с упрощенной методикой настройки регулятора.

Ключевые слова: управление движением квадрокоптера, траекторное управление, согласованное управление, робастное управление по выходу, геометрический подход

Благодарности: работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, паспорт госзадания № 2019-0898.

Ссылка для цитирования: Ким С. А., Пыркин А. А., Борисов О. И. Алгоритм согласованного траекторного управления движением квадрокоптера // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 5. С. 385–394. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-5-385-394.

ALGORITHM FOR COORDINATED TRAJECTORY CONTROL OF QUADCOPTER MOTION

S. A. Kim, A. A. Pyrkin, O. I. Borisov

ITMO University, St. Petersburg, Russia

* *skim@itmo.ru*

Abstract. A complete model of the motion of a quadcopter along a smooth spatial trajectory is presented. Using the model, a robust algorithm for controlling a quadcopter based on measurements of linear coordinates and yaw angle is proposed. Using additional integrators, a dynamic control algorithm with a simplified controller tuning technique is designed.

Keywords: robust control, quadrotor motion control, dynamic positioning, coordinated control, geometric approach.

Acknowledgments: the work was carried out with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, state assignment passport No. 2019-0898.

For citation: Kim S. A., Pyrkin A. A., Borisov O. I. Algorithm for coordinated trajectory control of quadcopter motion. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 5. P. 385–394 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-5-385-394.

Введение. Траекторное управление можно разделить на два вида — следящее и согласованное [1]. В первом случае задается желаемое значение регулируемых переменных (положение и ориентация) в каждый момент времени, а ошибка регулирования представляет собой рассогласование между желаемым и текущим значениями выходных переменных объекта [2–4]. Такой подход подразумевает преодоление кратчайшего расстояния между текущим положением

и заданным и не предполагает наличия подвижных препятствий на пути движения. Если же кратчайший путь проходит через стены, препятствия, запрещенные зоны, и при этом на объект действуют неизмеряемые возмущения, то задача точного планирования геометрического места объекта в пространстве становится несостоятельной. В этом случае целесообразно использовать метод согласованного управления, где задана траектория движения и скорость движения вдоль этой кривой. Тогда ошибка регулирования — это кратчайшее расстояние от текущего положения робота до желаемой траектории, а также рассогласование по линейной скорости и ориентации [5–7]. В этом случае предпочтение отдается минимальному отклонению от траектории, которая имеет большое число поворотов с обходом препятствий.

В настоящей статье решена задача согласованного управления движением квадрокоптера вдоль гладкой пространственной траектории по измерениям линейных координат и угла рыскания [2–4]. Динамическая модель движения такого объекта в пространстве является нелинейной, а модель отклонений робота от заданной траектории сложнее из-за возникающей голономной связи между всеми регулируемыми переменными [1, 5–7]. Задача управления таким многомерным объектом осложняется тем, что относительная степень по каждому каналу управления не одинакова, а декомпозиция модели на однородные подсистемы, как в случае с динамическим позиционированием в точке [2–4], не представляется возможной.

В [2, 3] используется неполная модель движения, которая не учитывает динамику угла рыскания. Кроме того, предложенные алгоритмы следящего управления предполагают неочевидную методику настройки, при которой значения параметров регулятора должны быть выбраны исходя из соблюдения условий, связанных с доказательством утверждений. В [4] учтены выявленные недостатки, в результате чего получена полная модель движения квадрокоптера для задачи динамического позиционирования в точке; на основе этой модели синтезирован динамический алгоритм следящего управления с упрощенной методикой настройки регулятора, но предполагается измерение вектора состояния.

Алгоритм согласованного управления движением вдоль гладкой траектории в терминах геометрического подхода, как и в [2–4], представлен в [7], но для движения мобильного робота на плоскости. В настоящей статье с использованием подходов, изложенных в [4, 7], решена задача синтеза закона управления движением квадрокоптера вдоль пространственной кривой по измерениям выходных регулируемых переменных.

Постановка задачи. Рассмотрим декартову систему координат $OXYZ$ и робот типа квадрокоптер с линейными координатами $P = \text{col}(x, y, z)$ и ориентацией (угол рыскания, тангаж, крен) $\Theta = \text{col}(\varphi, \theta, \psi)$, движущийся в пространстве вдоль гладкой траектории S (рис. 1).

Кривая S может быть задана в виде системы уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} x_S &= \eta_x(s); \\ y_S &= \eta_y(s); \\ z_S &= \eta_z(s), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

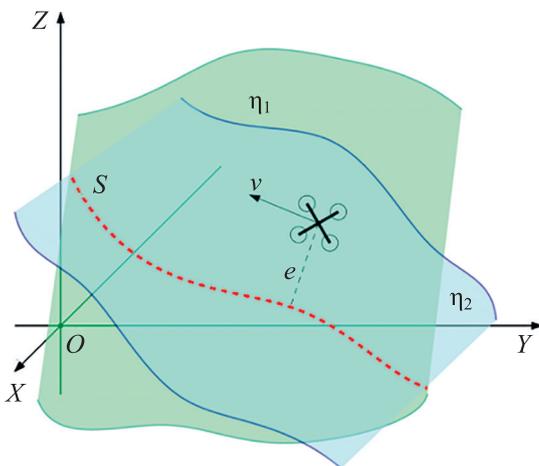


Рис. 1

параметризованной как геометрическое место точек, соответствующих путевой координате s . Другим способом задания кривой может быть пересечение двух гладких поверхностей, т. е. в виде системы двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(x_S, y_S, z_S) &= 0, \\ \eta_2(x_S, y_S, z_S) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Замечание 1. Следует отметить, что существует бесконечное множество пар функций η_1 и η_2 , пересечение которых соответствует пространственной кривой.

Модель движения в пространстве без учета сил трения имеет следующий вид [4]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ c_\theta c_\psi \end{bmatrix} (u_1 + g) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где (x, y, z) и (φ, θ, ψ) — линейные и угловые координаты робота в пространстве; $M = \text{diag}\left\{\frac{1}{m}, \frac{C}{J_\varphi}, \frac{\ell}{J_\theta}, \frac{\ell}{J_\psi}\right\}$ — массагабаритные параметры; $F = \text{col}(F_1, F_2, F_3, F_4)$ — силы, развиваемые пропеллерами; $U = \text{col}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ — вспомогательные переменные или виртуальные управления, и введены обозначения $c_{(\cdot)} = \cos(\cdot)$ и $s_{(\cdot)} = \sin(\cdot)$.

Требуется разработать закон управления F , обеспечивающий движение робота вдоль кривой S с заданной скоростью V^* , ориентацией $\Theta^*(s)$ и отклонением:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (s - V^*) \leq \tilde{V}_{\max}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\Theta(t) - \Theta^*(s)) \leq \tilde{\Theta}_{\max}, \quad \text{dist}(P, S) \leq e_{\max}, \quad (5)$$

где выполняются условия $\tilde{V}_{\max} > 0, \tilde{\Theta}_{\max} > 0, e_{\max} > 0$.

Динамическая модель отклонения робота от траектории. Отклонение робота от пространственной траектории определим с помощью трех линейных и одной угловой координат:

$$s = \Sigma(P), \quad e_1 = E_1(P), \quad e_2 = E_2(P), \quad \delta_\varphi = \varphi - \varphi^*(s), \quad \delta_\theta = \theta, \quad \delta_\psi = \psi, \quad (6)$$

где функция $\Sigma(P)$ определяет ближайшую к роботу точку на кривой S ; линейные функции $E_1(P)$ и $E_2(P)$ определяют расстояние от робота до двух плоскостей $E_1(P) = 0$ и $E_2(P) = 0$, пересечение которых соответствует вектору заданной скорости V^* вдоль касательной к кривой S (рис. 2, а, плоскость E_1 проходит через вектор V^* параллельно оси OZ , плоскость E_2 проходит через вектор V^* перпендикулярно E_1); заданный угол рыскания $\varphi^*(s)$ связан с направлением вектора V_{XY}^* , являющегося проекцией вектора V^* на плоскость OXY и определяющего заданную скорость в горизонтальной плоскости (рис. 2, б). Заданный тангаж $\theta^*(s)$ и крен $\psi^*(s)$ примем равными нулю для всех s .

Замечание 2. В особом случае, когда вектор V^* параллелен оси OZ , заданный угол рыскания $\varphi^*(s)$ необходимо доопределить разработчику.

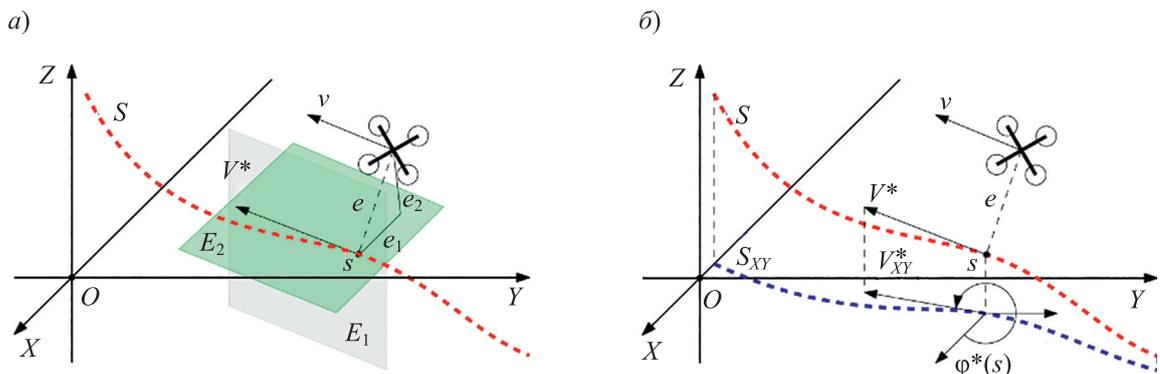


Рис. 2

Запишем кинематические соотношения между регулируемым переменными s , e_1 , e_2 и координатами робота x , y , z . Для этого необходимо выполнить три однородных преобразования: одно линейное и два поворотных:

$$\begin{bmatrix} s \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = R_{Y,\beta}^T R_{Z,\alpha}^T \begin{bmatrix} x - x_s \\ y - y_s \\ z - z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\alpha & s_\alpha & 0 \\ -s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_s \\ y - y_s \\ z - z_s \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где первое преобразование соответствует параллельному переносу системы координат с началом в точке x_s , y_s , z_s (ближайшая точка кривой к роботу), далее поворот вокруг оси Z на угол $\alpha = \varphi^*(s)$ (угол между плоскостями E_1 и OXZ с учетом замечания 2) и поворот вокруг оси Y на угол β (угол между плоскостями E_2 и OXY).

Дифференцируя (7), получаем динамическую модель для линейных координат:

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & s_\alpha c_\beta & s_\beta \\ -s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ -c_\alpha s_\beta & -s_\alpha s_\beta & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ c_\theta c_\psi \end{bmatrix} (u_1 + g) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Для угловых отклонений запишем упрощенную модель:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_\varphi \\ \dot{\delta}_\theta \\ \dot{\delta}_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \varepsilon \dot{s} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $\varepsilon = \frac{d\alpha}{ds}$ — кривизна проекции кривой S на плоскость OXY [5].

Модель движения в нормальной форме.

Утверждение 1. Пусть

$$u_1 = \text{sat}_{lg} \bar{u}_1,$$

где $\text{sat}_{lg}(\cdot)$ — гладкая функция насыщения с уровнем lg для любого $l \in (0, 1)$, а переменные \bar{u}_1 и u_2 — выходы двух интеграторов с входами v_1 и v_2 :

$$\ddot{\bar{u}}_1 = \rho_1, \quad \dot{\rho}_1 = v_1, \quad \ddot{u}_2 = \rho_2, \quad \dot{\rho}_2 = v_2, \quad (10)$$

при этом переменная u_1 удовлетворяет двойному неравенству

$$-lg \leq u_1 \leq lg. \quad (11)$$

Тогда модель (8), (9) может быть представлена в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \xi_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\xi}_4 &= q(\xi) + Wb(\xi, \varphi)\bar{U}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\xi = \text{col}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in R^{16}$ — расширенный вектор переменных состояния; W — неособая 4×4 -матрица, зависящая от направления и кривизны траектории; $q(\xi, \varphi)$ и $b(\xi, \varphi)$ — функции соответствующих размерностей; $\xi_1 = \text{col}(s, e_1, e_2, \delta_\varphi)$ — регулируемые переменные, $\bar{U} = \text{col}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ — управляющие входы.

Доказательство. Дифференцируя выход ξ_1 последовательно 4 раза, получаем соответствующее преобразование координат для ξ_2, ξ_3, ξ_4 :

$$\xi_2 = \dot{\xi}_1 = W(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, \quad W(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & s_\alpha c_\beta & s_\beta & 0 \\ -s_\alpha & c_\alpha & 0 & 0 \\ -c_\alpha s_\beta & -s_\alpha s_\beta & c_\beta & 0 \\ -\varepsilon c_\alpha c_\beta & -\varepsilon s_\alpha c_\beta & -\varepsilon s_\beta & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Заметим, что определитель матрицы $W(\alpha, \beta)$ равен единице для всех значений углов α и β . Выражение для обратной матрицы имеет вид

$$W^{-1}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & -s_\alpha & -c_\alpha s_\beta & 0 \\ s_\alpha c_\beta & c_\alpha & -s_\alpha s_\beta & 0 \\ s_\beta & 0 & c_\beta & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Далее определим ξ_3 :

$$\xi_3 = \dot{\xi}_2 = \dot{W} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + W \begin{bmatrix} (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi)(u_1 + g) \\ (s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi)(u_1 + g) \\ c_\theta c_\psi (u_1 + g) - g \\ u_2 \end{bmatrix} = q_1(\xi) + b_1(\xi, \varphi) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix}; \quad (15)$$

$$q_1(\xi) = \bar{W}\xi_2 + gT(c_\theta c_\psi - 1), \quad b_1(\xi, \varphi) = W \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & d \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi \\ s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix};$$

$$\bar{W} = \dot{W}W^{-1}, \quad T = W \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta_3 = s_\theta c_\psi, \quad \zeta_4 = -s_\psi, \quad d = u_1 + g.$$

Отметим, что соотношение (15) является обратимым. Действительно, в силу допущения (11) функция d , зависящая от u_1 , строго отделена от нуля, следовательно, справедливо соотношение

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (c_\theta c_\psi)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ d^{-1} \begin{bmatrix} c_\phi & s_\phi \\ -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} W^{-1}(\xi_3 - q_1(\xi_2, \theta, \psi)), \quad (16)$$

где видно, что $u_1 = u_1(\xi_2, \xi_3, \theta, \psi)$; отдельно рассматривая третью и четвертую строки матричного равенства (16) с учетом соотношений $\zeta_3 = s_\theta c_\psi$, $\zeta_4 = -s_\psi$, можно найти выражения для $\theta = \theta(\xi_2, \xi_3, \varphi)$ и $\psi = \psi(\xi_2, \xi_3, \varphi)$, откуда следует существование функций $u_{1,2} = u_{1,2}(\xi_2, \xi_3, \varphi)$, $\zeta_{3,4} = \zeta_{3,4}(\xi_2, \xi_3, \varphi)$.

Непосредственное вычисление дает

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_\theta^{-1} c_\psi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ d^{-1} \begin{bmatrix} c_\phi & s_\phi \\ -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} W^{-1}(\xi_3 - \bar{W}\xi_2) - g \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (1 - c_\theta^{-1} c_\psi^{-1});$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= c_\theta^{-1} c_\psi^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T W^{-1}(\xi_3 - \bar{W}\xi_2) - g(1 - c_\theta^{-1} c_\psi^{-1}) = \\
&= c_\theta^{-1} c_\psi^{-1} \left(\begin{bmatrix} s_\beta \\ 0 \\ c_\beta \\ 0 \end{bmatrix}^T \xi_3 + \begin{bmatrix} c_\beta \\ 0 \\ -s_\beta \\ 0 \end{bmatrix}^T \xi_2 \right) - g + g c_\theta^{-1} c_\psi^{-1} = u_1(\xi_2, \xi_3, \theta, \psi); \\
\begin{bmatrix} \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s_\theta c_\psi \\ -s_\psi \end{bmatrix} = (u_1 + g)^{-1} \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} Q_1^T W^{-1}(\xi_3 - \bar{W}\xi_2) = \\
&= c_\theta c_\psi \left(\begin{bmatrix} s_\beta \\ 0 \\ c_\beta \\ 0 \end{bmatrix}^T \xi_3 + \begin{bmatrix} c_\beta \\ 0 \\ -s_\beta \\ 0 \end{bmatrix}^T \xi_2 + g \right)^{-1} \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} Q_1^T W^{-1}(\xi_3 - \bar{W}\xi_2),
\end{aligned}$$

откуда имеем

$$\begin{bmatrix} \operatorname{tg} \theta \\ -\operatorname{tg} \psi c_\theta^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s_\beta \\ 0 \\ c_\beta \\ 0 \end{bmatrix}^T \xi_3 + \begin{bmatrix} c_\beta \\ 0 \\ -s_\beta \\ 0 \end{bmatrix}^T \xi_2 + g \right)^{-1} \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} Q_1^T W^{-1}(\xi_3 - \bar{W}\xi_2) = \tau_3(\xi_2, \xi_3, \varphi)$$

и в итоге

$$\begin{aligned}
\theta &= \operatorname{arctg} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \tau_3 \right) = \theta(\xi_2, \xi_3, \varphi), \\
\psi &= \operatorname{arctg} \left(- \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \tau_3 \cos \left(\operatorname{arctg} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \tau_3 \right) \right) = \psi(\xi_2, \xi_3, \varphi).
\end{aligned}$$

На следующем шаге определим ξ_4 :

$$\dot{\xi}_4 = \dot{\xi}_3 = \dot{q}_1(\xi) + \dot{b}_1(\xi, \varphi) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} + b_1(\xi, \varphi) \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dot{\zeta}_3 \\ \dot{\zeta}_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

и вычислим $\dot{\xi}_4$:

$$\dot{\xi}_4 = \ddot{q}_1(\xi) + \ddot{b}_1(\xi, \varphi) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} + 2\dot{b}_1(\xi, \varphi) \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dot{\zeta}_3 \\ \dot{\zeta}_4 \end{bmatrix} + b_1(\xi, \varphi) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ddot{\zeta}_3 \\ \ddot{\zeta}_4 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Выполняя дифференцирование всех членов в (18), можно получить выражение (12), где

$$q(\xi, \varphi) = f_1(\xi) + f_2(\xi) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} + 2\dot{b}_1(\xi, \varphi) \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dot{\zeta}_3 \\ \dot{\zeta}_4 \end{bmatrix} + b_1(\xi, \varphi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -s_\theta c_\psi (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) - 2c_\theta s_\psi \dot{\theta} \dot{\psi} \\ s_\psi \dot{\psi}^2 \end{bmatrix};$$

$$b(\xi, \varphi) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & d \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ s_\varphi & -c_\varphi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \tilde{b}(\xi);$$

$$\tilde{b}(\xi) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11}(\xi) & \tilde{b}_{12}(\xi) \\ \tilde{b}_{21}(\xi) & \tilde{b}_{22}(\xi) \end{bmatrix}, \quad \tilde{b}_{11}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b}_{22}(\xi) = -g \begin{bmatrix} s_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{b}_{12}(\xi) = d \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ s_\varphi & -c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi - 1 & s_\theta s_\psi \\ 0 & c_\psi - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_3^2 & c_\theta s_\psi \zeta_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{b}_{21}(\xi) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & -du_2 \\ u_2 & du_1 \end{bmatrix},$$

а функции $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ и $b_1(\xi)$ представлены далее (см. след. раздел). Заметим, что $q(0, \varphi) = 0$ и $\tilde{b}(0, \varphi) = 0$, а матрица $b(0, \varphi)$ обратима в любой момент времени.

Дополнительные вычисления. Для упрощения расчетов приведем вспомогательные вычисления:

$$\dot{q}_1(\xi) = \dot{\bar{W}}\xi_2 + \bar{W}\xi_3 + g\dot{T}(c_\theta c_\psi - 1) - gT \begin{bmatrix} s_\theta c_\psi \\ c_\theta s_\psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix};$$

$$\ddot{q}_1(\xi) = f_1(\xi) - gT \begin{bmatrix} s_\theta c_\psi \\ c_\theta s_\psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix};$$

$$f_1(\xi) = \ddot{\bar{W}}\xi_2 + 2\dot{\bar{W}}\xi_3 + \bar{W}\xi_4 + gT(c_\theta c_\psi - 1) - 2g\dot{T} \begin{bmatrix} s_\theta c_\psi \\ c_\theta s_\psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - gT(c_\theta c_\psi \dot{\theta}^2 - s_\theta s_\psi \dot{\theta}\dot{\psi} + c_\theta c_\psi \dot{\psi}^2);$$

$$b_1(\xi) = W \left(Q_2^T \begin{bmatrix} c_\theta s_\psi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q_1 + Q_1^T \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} Q_2 d \right);$$

$$\dot{b}_1(\xi, \varphi) = \dot{W} \left(Q_2^T \begin{bmatrix} c_\theta s_\psi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q_1 + Q_1^T \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} Q_2 d \right) +$$

$$+ W Q_1^T \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} Q_2 p_1 - W Q_1^T \begin{bmatrix} s_\varphi & c_\varphi \\ -c_\varphi & s_\varphi \end{bmatrix} Q_2 d \dot{\varphi} - W Q_2^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_1 \begin{bmatrix} s_\theta c_\psi \\ c_\theta s_\psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix};$$

$$\ddot{b}_1(\xi) = f_2(\xi) + W Q_1^T \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & -dv_2 \\ dv_2 & v_1 \end{bmatrix} Q_2 - W Q_2^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_1 \begin{bmatrix} s_\theta c_\psi \\ c_\theta s_\psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix};$$

$$f_2(\xi) = \ddot{W} \left(Q_2^T \begin{bmatrix} c_\theta s_\psi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q_1 + Q_1^T \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} Q_2 d \right) +$$

$$+ \dot{W} Q_1^T \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} Q_2 p_1 - \dot{W} Q_1^T \begin{bmatrix} s_\varphi & c_\varphi \\ -c_\varphi & s_\varphi \end{bmatrix} Q_2 d \dot{\varphi} - \dot{W} Q_2^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_1 \begin{bmatrix} s_\theta c_\psi \\ c_\theta s_\psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} -$$

$$- 2W Q_1^T \begin{bmatrix} s_\varphi & c_\varphi \\ -c_\varphi & s_\varphi \end{bmatrix} Q_2 p_1 \dot{\varphi} - W Q_2^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_1 (c_\theta c_\psi \dot{\theta}^2 - 2s_\theta s_\psi \dot{\theta}\dot{\psi} + c_\theta c_\psi \dot{\psi}^2);$$

$$\begin{bmatrix} \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_\theta c_\psi \\ -s_\psi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_3 \\ \dot{\zeta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & -s_\theta s_\psi \\ 0 & -c_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\xi}_3 \\ \ddot{\xi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_\theta c_\psi (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) - 2c_\theta s_\psi \dot{\theta} \dot{\psi} \\ s_\psi \dot{\psi}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & -s_\theta s_\psi \\ 0 & -c_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Синтез робастного закона управления по выходу. Для синтеза закона управления, обеспечивающего все три цели (5), необходимо указать заданное значение для выходной переменной. Пусть $\xi_1^* = \text{col}(V^*t, 0, 0, 0)$ и $\xi_2^* = \text{col}(V^*, 0, 0, 0)$. Введем замену переменных:

$$\tilde{\xi}_1 = \xi_1 - \xi_1^*, \quad \tilde{\xi}_2 = \xi_2 - \xi_2^*, \quad \tilde{\xi}_3 = \xi_3, \quad \tilde{\xi}_4 = \xi_4. \quad (19)$$

Дифференцируя $\tilde{\xi}_1$, получаем модель вида

$$\dot{\tilde{\xi}}_1 = \tilde{\xi}_2, \quad \dot{\tilde{\xi}}_2 = \tilde{\xi}_3, \quad \dot{\tilde{\xi}}_3 = \tilde{\xi}_4, \quad \dot{\tilde{\xi}}_4 = \tilde{q}(\tilde{\xi}, \varphi, V^*) + b(\tilde{\xi}, \varphi)\bar{U},$$

где $\tilde{q}(\tilde{\xi}, \varphi, V^*) = q(\text{col}(\tilde{\xi}_1 + \xi_1^*, \tilde{\xi}_2 + \xi_2^*, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4)) = q(\tilde{\xi}, \varphi) + \Delta(\ddot{W}, V^*)$ а член $\Delta(\ddot{W}, V^*)$ пренебрежимо мал при ограниченной кривизне заданной траектории.

Утверждение 2. Закон управления вида

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} u_1 + g \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \bar{U}; \quad (20)$$

$$\bar{U} = b(\tilde{\xi}, \varphi)^{-1} [-\tilde{q}(\tilde{\xi}, \varphi, V^*) - \gamma_1 \tilde{\xi}_1 - \gamma_2 \tilde{\xi}_2 - \gamma_3 \tilde{\xi}_3 - \gamma_4 \tilde{\xi}_4], \quad (21)$$

где параметры $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 > 0$ соответствуют некоторому гурвицеву полиному $\gamma(p) = p^4 + \gamma_4 p^3 + \gamma_3 p^2 + \gamma_2 p + \gamma_1$, обеспечивает глобальную локальную устойчивость замкнутой системы и достижение цели (5).

Доказательство. Модель замкнутой системы для отклонений (19) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}}_1 \\ \dot{\tilde{\xi}}_2 \\ \dot{\tilde{\xi}}_3 \\ \dot{\tilde{\xi}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 \\ -\gamma_1 I_4 & -\gamma_2 I_4 & -\gamma_3 I_4 & -\gamma_4 I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_3 \\ \tilde{\xi}_4 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

откуда нетрудно показать, что если параметры $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ выбраны как соответствующие коэффициенты типовых (гурвицевых) характеристических полиномов $\gamma(p) = p^4 + \gamma_4 p^3 + \gamma_3 p^2 + \gamma_2 p + \gamma_1$ или вычислены методом модального управления, то все переменные отклонений (19) асимптотически стремятся к нулю, что гарантирует выполнение цели (5). Локальный характер устойчивости обусловлен ограничением (11).

Однако закон управления (21) требует измерений всех переменных состояния и в рамках рассматриваемой задачи является нереализуемым. Используя метод расширенного наблюдателя [8], можно исключить неизвестные члены.

Реализуемый закон управления по выходу имеет наряду с (20) также следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \text{sat}_M[b(0, \varphi)^{-1}(-\sigma - \gamma_1 \tilde{\xi}_1 - \gamma_2 \tilde{\xi}_2 - \gamma_3 \tilde{\xi}_3 - \gamma_4 \tilde{\xi}_4)]; \\ \dot{\tilde{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \kappa a_1(\tilde{\xi}_1 - \hat{\xi}_1), \quad \dot{\tilde{\xi}}_2 = \hat{\xi}_3 + \kappa^2 a_2(\tilde{\xi}_1 - \hat{\xi}_1), \quad \dot{\tilde{\xi}}_3 = \hat{\xi}_4 + \kappa^3 a_3(\tilde{\xi}_1 - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\tilde{\xi}}_4 &= \sigma + b(0, \varphi)\bar{U} + \kappa^4 a_4(\tilde{\xi}_1 - \hat{\xi}_1), \quad \dot{\sigma} = \kappa^5 a_5(\tilde{\xi}_1 - \hat{\xi}_1), \end{aligned}$$

где $\text{sat}_N(\cdot)$ — гладкая функция насыщения с уровнем N ; входной сигнал $\tilde{\xi}_1$ определен в (19); коэффициенты a_i , $i = \overline{1, 5}$, соответствуют гурвицеву полиному $a(p) = p^5 + a_1p^4 + a_2p^3 + a_3p^2 + a_4p + a_5$, а коэффициент усиления к больше некоторого числа $k_0 = k_0(\xi(0)) > 0$, зависящего от начальных условий объекта.

Заключение. В работе решена задача согласованного управления движением квадрокоптера вдоль гладкой пространственной траектории. В отличие от [4] рассмотрена постановка задачи управления движением квадрокоптера по выходу, а в отличие от [7], где решена задача согласованного управления движением по траектории на плоскости, в настоящей статье решена задача управления движением в трехмерном пространстве. В дальнейшем планируется проведение натурных экспериментальных исследований синтезированного закона управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000. 549 с.
2. Borisov O. I., Pyrkin A. A., Isidori A. Application of enhanced extended observer in station-keeping of a quadrotor with unmeasurable pitch and roll angles // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52, N 16. P. 837–842. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.067.
3. Борисов О. И., Каканов М. А., Живицкий А. Ю., Пыркин А. А. Робастное траекторное управление квадрокоптером по выходу на основе геометрического подхода // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 12. С. 982–992.
4. Ким С. А., Пыркин А. А., Борисов О. И. Алгоритмы управления движением квадрокоптера в режиме динамического позиционирования // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 10. С. 834–844.
5. Бурдаков С. Ф., Мирошник И. В., Стельмаков Р. Э. Системы управления движением колесных роботов. СПб: Наука, 2001. 232 с.
6. Бушуев А. Б., Исаева Е. Г., Морозов С. Н., Чепинский С. А. Управление траекторным движением многоканальных динамических систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 11. С. 50–56.
7. Хоанг Д. Т., Пыркин А. А. Синтез алгоритма робастного управления движением мобильного робота вдоль гладкой траектории // Изв. вузов. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 7. С. 500–512.
8. Freidovich L. B., Khalil H. K. Performance recovery of feedback-linearization-based designs // IEEE Trans. on Automatic Control. 2008. Vol. 53, N 10. P. 2324–2334.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Станислав Александрович Ким** — аспирант; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: skim@itmo.ru
- Антон Александрович Пыркин** — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: pyrkin@itmo.ru
- Олег Игоревич Борисов** — канд. техн. наук; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; доцент; E-mail: borisov@itmo.ru

Поступила в редакцию 16.01.2024; одобрена после рецензирования 19.01.2024; принята к публикации 22.03.2024.

REFERENCES

1. Miroshnik I. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L. *Nelineynoye i adaptivnoye upravleniye slozhnyimi dinamicheskimi sistemami (Nonlinear and Adaptive Control of Complex Dynamic Systems)*, St. Petersburg, 2000, 549 p. (in Russ.)
2. Borisov O. I., Pyrkin A. A., Isidori A. *PapersOnLine*, 2019, no. 16(52), pp. 837–842, DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.067.
3. Borisov O. I., Kakanov M. A., Zhivitskii A. Yu., Pyrkin A. A. *Journal of Instrument Engineering*, 2021, no. 12(64), pp. 982–992 (in Russ.)
4. Kim S. A., Pyrkin A. A., Borisov O. I. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 10(66), pp. 834–844 (in Russ.)
5. Burdakov S. F., Miroshnik I. V., Stel'makov R. E. *Sistemy upravleniya dvizheniyem kolesnykh robotov (Motion Control Systems for Wheeled Robots)*, St. Petersburg, 2001, 232 p. (in Russ.)
6. Bushuev A. B., Isaeva E. G., Morozov S. N., Chepinsky S. A. *Journal of Instrument Engineering*, 2009, no. 11(52), pp. 50–56 (in Russ.)
7. Hoang Duc Thinh, Pyrkin A. A. *Journal of Instrument Engineering*, 2022, no. 7(65), pp. 500–512, DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-7-500-512 (in Russ.).
8. Freidovich L. B., Khalil H. K. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, no. 10(53), pp. 2324–2334.

DATA ON AUTHORS

- Stanislav A. Kim** — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: skim@itmo.ru
- Anton A. Pyrkin** — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: pyrkin@itmo.ru
- Oleg I. Borisov** — PhD; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Associate Professor; E-mail: borisov@itmo.ru

Received 16.01.2024; approved after reviewing 19.01.2024; accepted for publication 22.03.2024.