

### АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**А. В. Земсков**

*Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова,  
198035, Санкт-Петербург, Россия  
aleksei.zemskov@yandex.ru*

**Аннотация.** Предложен аналитический подход к исследованию счетных неоднородных марковских цепей на основе  $z$ -преобразования. На примере двух вариантов исходных данных для переходных вероятностей марковской цепи показано, что оценки стационарного режима могут существенно искажать представление о поведении системы. Описаны аналитические процедуры получения функций вероятностей при вещественных и комплексно-сопряженных собственных значениях матрицы переходных вероятностей, если ее элементы меняются скачкообразно. Приведены оценки для границ наступления установившегося режима в тактовом времени. Основные выкладки проиллюстрированы оценкой характеристик марковских цепей с учетом влияния переходной динамики при изменении вероятностей состояний и кусочно-постоянном изменении переходных вероятностей на интервале функционирования в тактовом времени.

**Ключевые слова:** марковская цепь, оператор „вход–выход“ в  $z$ -форме, собственные значения, кусочно-постоянное изменение переходных вероятностей, функция вероятности состояния

**Ссылка для цитирования:** Земсков А. В. Аналитический подход к исследованию неоднородных марковских цепей с кусочно-постоянными изменениями переходных вероятностей // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 8. С. 657–669. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-657-669.

### ANALYTICAL APPROACH TO THE STUDY OF HETEROGENEOUS MARKOV CHAINS WITH PIECEWISE CONSTANT CHANGES IN TRANSITION PROBABILITIES

**A. V. Zemskov**

*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, St. Petersburg, Russia  
aleksei.zemskov@yandex.ru*

**Abstract.** An analytical approach to the study of countable non-homogeneous Markov chains based on the  $z$ -transformation is proposed. Using two variants of the initial data for the transition probabilities of a Markov chain as an example, it is shown that estimates of the steady-state mode can significantly distort the understanding of the system behavior. Analytical procedures for obtaining probability functions for real and complex-conjugate eigenvalues of the transition probability matrix are described for the case when its elements change abruptly. Estimates are given for the boundaries of the onset of a steady-state mode in the clock time. The main calculations are illustrated by an assessment of the characteristics of Markov chains taking into account the influence of transition dynamics under variance of the state probabilities and the piecewise constant change in transition probabilities over the operating interval in clock time.

**Keywords:** Markov chain,  $z$ -form input-output operator, eigenvalues, piecewise constant change in transition probabilities, state probability function

**For citation:** Zemskov A. V. Analytical approach to the study of heterogeneous Markov chains with piecewise constant changes in transition probabilities. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 8. P. 657–669 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-657-669.

**Введение.** Марковские процессы (МП) широко применяются при исследовании различных стохастических систем [1–4]. При этом наиболее проработаны процедуры исследования установившихся режимов при стационарном представлении соответствующих математических моделей. Между тем переходные процессы могут существенно влиять на характеристики системы через действительные средние значения вероятностей состояний [5], а вероятности (интенсивности) переходов в общем случае изменяются во времени, в том числе скачкообразно.

Подробный обзор работ по переходным режимам и поведению систем с кусочно-постоянными изменениями интенсивностей переходов выполнен в статье [6]. В ней отмечено, что одно из первых исследований переходного режима было представлено в работе Харрисона [7] в 1981 г. Затем проблема достаточно долго не рассматривалась и вновь стала актуальной в связи с увеличением сетевого трафика и появлением так называемых катастроф [8–10]. В этих же работах указывается, что изучение МП с зависимыми от времени интенсивностями переходов началось с работ Кларка [11, 12]. Дальнейшее развитие соответствующей проблематики рассмотрено в публикациях [6, 13–17].

Следует отметить, что все перечисленные работы посвящены системам с непрерывным временем, и марковские цепи (МЦ) в них не рассматриваются.

**Постановка задачи.** В качестве МЦ в настоящей статье рассматривается счетная неоднородная цепь из  $n$  состояний, математическое описание которой представлено нестационарной матрицей переходных вероятностей (МПВ) с кусочно-постоянными изменениями элементов на каком-либо шаге тактового времени и вектором начального распределения вероятностей (ВНРВ):

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} p_{11.K} & p_{12.K} & \dots & p_{1n.K} \\ p_{21.K} & p_{22.K} & \dots & p_{2n.K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1.K} & p_{n2.K} & \dots & p_{nn.K} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \mathbf{P}(0) = [P_1(0) \ P_2(0) \ \dots \ P_n(0)]^T \in \mathfrak{R}^n, \quad (1)$$

где  $K = \text{var}$  — символическое обозначение очередного такта, на котором происходит скачок переходных вероятностей  $p_{\alpha\beta.K}$   $\alpha = 1, \dots, n$ ,  $\beta = 1, \dots, n$ ;  $T$  — символ транспонирования.

На практике допускается достаточно общий вариант, когда спектр матрицы  $\mathbf{P}_K$  составляют некрратные вещественные и комплексно-сопряженные собственные значения.

Динамика неоднородной МЦ с тактовым временем  $k$  описывается векторно-матричным рекуррентным уравнением [1–4]:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_K^T \mathbf{P}_k = [\mathbf{P}_K^T]^k \mathbf{P}_0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{P}_k$  и  $\mathbf{P}_{k+1}$  — векторы вероятностей состояний на  $k$  и  $k + 1$  шаге (в моменты тактового времени  $k$  и  $k + 1$ ),  $\mathbf{P}_K^T$  — транспонированная МПВ.

Алгоритмы (2) по сути не отличаются от аналогичных алгоритмов рекуррентного построения решения в однородных МЦ. При этом на очередном шаге  $K = \text{var}$  для дальнейших матричных операций используется соответствующая матрица  $\mathbf{P}_K$ . При увеличении ее порядка (т.е. числа состояний МЦ), количества тактов функционирования  $k$ , а также при необходимости учета влияния переходных режимов интерпретация результатов становится все более затруднительной и не наглядной.

В этой связи актуальна задача обобщения основных результатов [5] в части выборочного поиска передаточных функций и выражений для вероятностей состояний на неоднородные МЦ с кусочно-постоянными изменениями переходных вероятностей, что позволяло бы получать функции вероятностей состояний в „замкнутой“ аналитической форме, наглядно отображать поведение систем графически и находить средние значения вероятностей на заданном интервале функционирования в тактовом времени. Вспомогательной задачей выступает обоснование процедур получения оценок для границ наступления установившегося режима с учетом скачков переходных вероятностей. Разработка соответствующего аналитического подхода составляет основное содержание настоящей статьи.

**Иллюстрация недостоверности стационарных оценок вероятностей состояний.** Скачки переходных вероятностей обуславливают необходимость исследования не только стационарных, но и переходных режимов. Отсутствие учета переходной динамики может весьма критично сказаться на общем и детальном восприятии свойств системы. Рассмотрим простейшую стохастическую систему с графом состояний, изображенным на рис. 1.

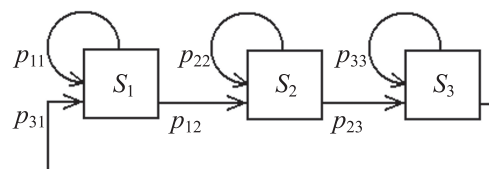


Рис. 1

Пусть имеется два варианта исходных данных МПВ:

$$1) \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,9 & 0 & 0,1 \end{bmatrix};$$

$$2) \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}.$$

Ввиду равенства отдельных характеристик состояний между собой „внутри“ каждого варианта в силу эргодичности (независимо от значений компонентов вектора  $\mathbf{P}(0) = [P_1(0) \ P_2(0) \ P_3(0)]^T$ ) для вектора установившегося решения имеет место результат

$$\mathbf{P}(k \rightarrow \infty) = [1/3 \ 1/3 \ 1/3]^T. \tag{3}$$

Насколько справедливо его использование, рассмотрим на примере поведения системы при изменении тактового времени от 0 до 40, если задан вектор начальных условий  $\mathbf{P}(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$ .

Для поиска операторов „вход–выход“ в  $z$ -форме ( $z$ -передаточных функций) воспользуемся соотношениями [5]:

$$\Phi_{ii}(z) = \frac{P_i(z)}{P_i(0)} = \frac{\det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{ii}^T)}{\det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T)}, \quad \Phi_{ij}(z) = \frac{P_j(z)}{P_j(0)} = \frac{z\det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{ii}^T) - \det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{D}_{ij})}{\det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T)}, \tag{4}$$

где  $P_i(z)$  —  $i$ -й компонент вектора текущего распределения вероятностей (ВТРВ) в  $z$ -форме;  $P_j(0)$  —  $j$ -й компонент ВНРВ;  $\det(\dots)$  — характеристический определитель числовых матриц;  $\mathbf{E}_{n-1}$  — единичная  $((n-1) \times (n-1))$ -матрица;  $\mathbf{P}_{ii}^T$  — матрица  $\mathbf{P}^T$ , уплотненная в результате удаления  $i$ -й строки и  $i$ -го столбца;  $\mathbf{D}_{ij}$  — матрица  $\mathbf{P}^T$ , в которой  $i$ -й столбец коэффициентов заменен на  $j$ -й столбец матрицы  $\mathbf{E}_n$ .

Для каждого варианта исходных данных требуется найти операторы от первого компонента ВНРВ к каждому из компонентов ВТРВ. В соответствии с выражениями (4) для первого варианта исходных данных МПВ получаем

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{11}^T = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{22}^T = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{33}^T = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0,1 & 1 & 0,9 \\ 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{31} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 1 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{P}^T) = \det \begin{bmatrix} z - 0,1 & 0 & -0,9 \\ -0,9 & z - 0,1 & 0 \\ 0 & -0,9 & z - 0,1 \end{bmatrix} = z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73,$$

$$\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{11}^T) = \det \begin{bmatrix} z - 0,1 & 0 \\ -0,9 & z - 0,1 \end{bmatrix} = z^2 - 0,2z + 0,01,$$

$$\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{22}^T) = \det \begin{bmatrix} z - 0,1 & -0,9 \\ 0 & z - 0,1 \end{bmatrix} = z^2 - 0,2z + 0,01,$$

$$\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{33}^T) = \det \begin{bmatrix} z - 0,1 & 0 \\ -0,9 & z - 0,1 \end{bmatrix} = z^2 - 0,2z + 0,01,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{21}) = \det \begin{bmatrix} z - 0,1 & -1 & -0,9 \\ -0,9 & z & 0 \\ 0 & 0 & z - 0,1 \end{bmatrix} = z^3 - 0,2z^2 - 0,89z + 0,09,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{31}) = \det \begin{bmatrix} z - 0,1 & 0 & -1 \\ -0,9 & z - 0,1 & 0 \\ 0 & -0,9 & z \end{bmatrix} = z^3 - 0,2z^2 + 0,01z - 0,81,$$

$$\Phi_{11}(z) = \frac{P_1(z)}{P_1(0)} = \frac{\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{11}^T)}{\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{P}^T)} = \frac{z^2 - 0,2z + 0,01}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{21}(z) &= \frac{P_2(z)}{P_1(0)} = \frac{z\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{22}^T) - \det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{21})}{\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{P}^T)} = \frac{z(z^2 - 0,2z + 0,01) - (z^3 - 0,2z^2 - 0,89z + 0,09)}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} = \\ &= \frac{0,9z - 0,09}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{31}(z) &= \frac{P_3(z)}{P_1(0)} = \frac{z\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{33}^T) - \det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{31})}{\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{P}^T)} = \frac{z(z^2 - 0,2z + 0,01) - (z^3 - 0,2z^2 + 0,01z - 0,81)}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} = \\ &= \frac{0,81}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} \end{aligned}$$

Матрица  $\mathbf{P}^T$  имеет собственные значения  $z_1 = 1$ ,  $z_{2,3} = \lambda \pm j\omega = -0,35 \pm j0,779$ . Таким образом, общий знаменатель всех полученных  $z$ -операторов представляется в виде

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{P}^T) = (z - z_1)(z_2 - 2\lambda z + \lambda^2 + \omega^2) = (z - 1)(z^2 + 0,7z + 0,73).$$

Паре комплексно-сопряженных корней  $z_{2,3}$  соответствуют общие для всех функций вероятностей базовые параметры [5]:

$$d = \sqrt{\lambda^2 + \omega^2} = 0,854; \varphi_0 = \pi - \arctg\left(\left|\frac{\omega}{\lambda}\right|\right) = 1,993; \varphi = \arctg\left(\left|\frac{\omega}{\lambda - 1}\right|\right) = 0,524.$$

Далее согласно [5]:

$$1) \text{ для оператора } \Phi_{11}(z) = \frac{z^2 - 0,2z + 0,01}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} = \frac{z^2 - 0,2z + 0,01}{(z - 1)(z^2 + 0,7z + 0,73)} \text{ имеем}$$

$$C_{1.11}(k) = \left[ \frac{z^2 - 0,2z + 0,01}{z^2 + 0,7z + 0,73} \right]_{z=z_1=1} z_1^k = c_{1.11} \cdot z_1^k = 0,333 \cdot 1^k = 0,333,$$

$$\Phi_{y.11}(z) = \Phi_{11}(z)(z - z_2)(z - z_3)(z - 1) = z^2 - 0,2z + 0,01,$$

$$\Phi_{y.11}(\lambda + j\omega) = \Phi_{y.11}(z) \Big|_{z=\lambda + j\omega} = -0,405 - j0,701,$$

$$d_{11} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{|\Phi_{y,11}(\lambda + j\omega)|}{\sqrt{(1-\lambda)^2 + \omega^2}} = 0,667, \Delta\varphi_{11} = \arg[\Phi_{y,11}(\lambda + j\omega)] = -2,094, \varphi_{11} = \varphi + \Delta\varphi_{11} = -1,571,$$

$$P_1(k) = C_{1,11}(k) - d_{11}d^k \sin(\varphi_0 k + \varphi_{11}) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(1,993k - 1,571);$$

2) для оператора  $\Phi_{21}(z) = \frac{0,9z - 0,09}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} = \frac{0,9z - 0,09}{(z-1)(z^2 + 0,7z + 0,73)}$  имеем

$$C_{1,21}(k) = \left[ \frac{0,9z - 0,09}{z^2 + 0,7z + 0,73} \Big|_{z=z_1=1} \right] z_1^k = c_{1,21} \cdot z_1^k = 0,333 \cdot 1^k = 0,333,$$

$$\Phi_{y,21}(z) = \Phi_{21}(z)(z - z_2)(z - z_3)(z - 1) = 0,9z - 0,09,$$

$$\Phi_{y,21}(\lambda + j\omega) = \Phi_{y,21}(z) \Big|_{z=\lambda + j\omega} = -0,405 + j0,701,$$

$$d_{21} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{|\Phi_{y,21}(\lambda + j\omega)|}{\sqrt{(1-\lambda)^2 + \omega^2}} = 0,667, \Delta\varphi_{21} = \arg[\Phi_{y,21}(\lambda + j\omega)] = 2,094, \varphi_{21} = \varphi + \Delta\varphi_{21} = 2,618,$$

$$P_2(k) = C_{1,21}(k) - d_{21}d^k \sin(\varphi_0 k + \varphi_{21}) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(1,993k + 2,618);$$

3) для оператора  $\Phi_{31}(z) = \frac{0,81}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} = \frac{0,81}{(z-1)(z^2 + 0,7z + 0,73)}$  имеем

$$C_{1,31}(k) = \left[ \frac{0,81}{z^2 + 0,7z + 0,73} \Big|_{z=z_1=1} \right] z_1^k = c_{1,31} \cdot z_1^k = 0,333 \cdot 1^k = 0,333,$$

$$\Phi_{y,31}(z) = \Phi_{31}(z)(z - z_2)(z - z_3)(z - 1) = 0,81, \Phi_{y,31}(\lambda + j\omega) = \Phi_{y,31}(z) \Big|_{z=\lambda + j\omega} = 0,81,$$

$$d_{31} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{|\Phi_{y,31}(\lambda + j\omega)|}{\sqrt{(1-\lambda)^2 + \omega^2}} = 0,667, \Delta\varphi_{31} = \arg[\Phi_{y,31}(\lambda + j\omega)] = 0, \varphi_{31} = \varphi + \Delta\varphi_{31} = 0,524,$$

$$P_3(k) = C_{1,31}(k) - d_{31}d^k \sin(\varphi_0 k + \varphi_{31}) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(1,993k + 0,524).$$

При втором варианте исходных данных, пользуясь результатами [5], по аналогии получаем для функций вероятностей состояний следующие соотношения (для различения в индексы вероятностей добавляется символ „\*“):

$$P_1^*(k) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k - 1,571), P_2^*(k) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k + 2,618),$$

$$P_3^*(k) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k + 0,524).$$

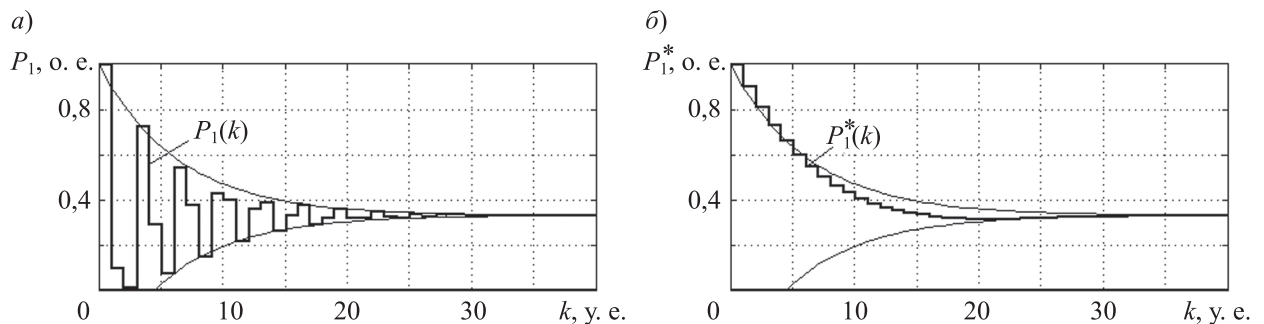


Рис. 2

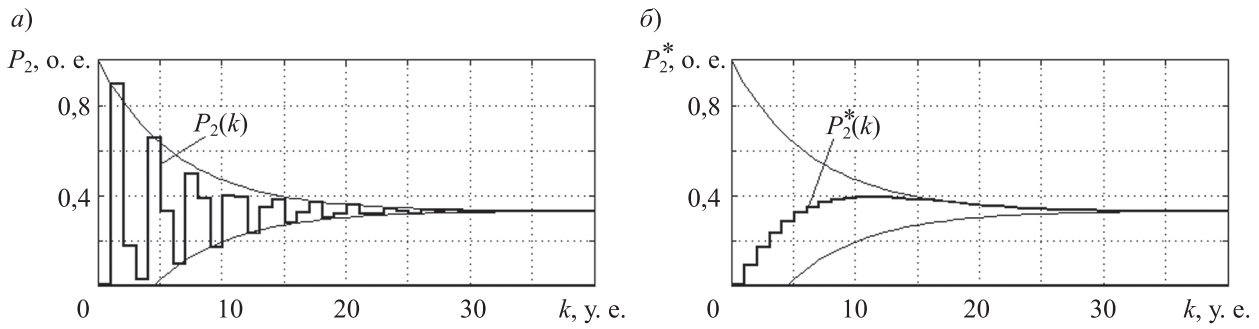


Рис. 3

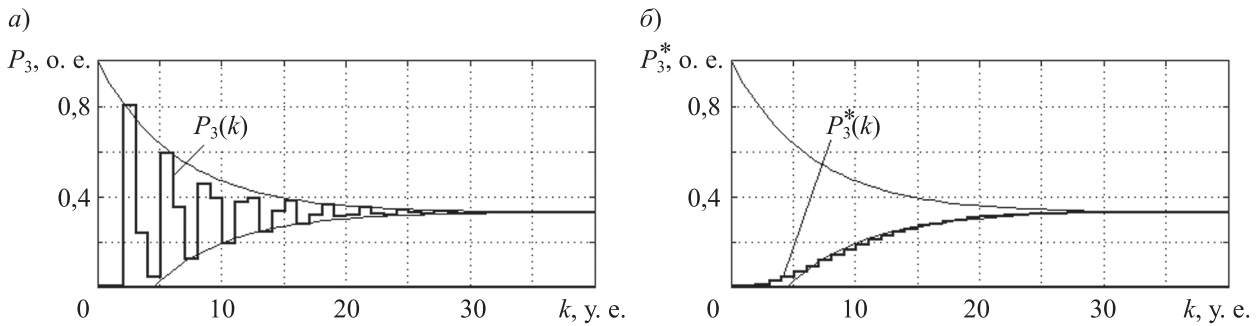


Рис. 4

Сравнительный анализ приведенных функций для первого и второго варианта исходных данных МПВ показывает, что единственное различие одноименных вероятностей заключается в значении параметра  $\varphi_0$ . Для комплексно-сопряженной пары собственных значений МПВ второго варианта  $z_{2,3}^* = \lambda^* \pm j\omega^* = 0,85 \pm j0,087$  справедлив результат  $\varphi_0 = \text{arctg}(|\omega/\lambda|) = 0,102$  [5]. Однако это приводит к различающемуся поведению одноименных функций вероятностей, что видно из попарного сравнения графиков (см. рис. 2–4). Здесь функции вероятностей состояний представлены с экстраполяцией значений на длину такта. Тонкими линиями на графиках показаны верхняя  $P_+(k) = 0,333 + 0,667 \cdot 0,854^k$  и нижняя  $P_-(k) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k$  огибающие, которые идентичны для всех функций вероятностей.

Соответственно все функции вероятностей имеют одно и то же время установления стационарного режима [5]:

$$\tilde{k} = \frac{\ln(0,05) + \ln(0,333) - \ln(0,667)}{\ln(0,854)} = 23,443 \rightarrow 24.$$

В то же время очевидно, что некорректно описанные варианты отождествлять по одинаковым установившимся значениям вероятностей и единому тактовому времени наступления стационарного режима. В частности, „биения“ вероятностей при изменении тактового времени в первом варианте обуславливают очень осторожное прогнозирование свойств МЦ в переходной динамике, так как на каком-либо шаге можно получить значительное несоответствие ожидаемых и реальных характеристик, хотя средние значения вероятностей на интервале функционирования достаточно близки к стационарным.

Для второго варианта на интервале  $k = 0-40$  среднее значение вероятности первого, например, состояния  $\bar{P}_1(0-40) = \left[ \sum_{k=0}^{40} P_1(k) \right] / 41 = 0,415$  оказывается почти на 24,6 % больше стационарного. Понятно, что при уменьшении интервала функционирования ситуация усугубляется: при  $k = 0-10$  среднее значение той же вероятности  $\bar{P}_1(0-10) = \left[ \sum_{k=0}^{10} P_1(k) \right] / 11 = 0,641$  оказывается больше стационарного уже на 92,5 %.



Также ясно, что при исследовании неоднородной МЦ со скачками вероятностей переходов от первого варианта ко второму и наоборот возникающие стационарные режимы не будут отражать истинную картину поведения системы.

**Исследование неоднородных МЦ с кусочно-постоянными переходными вероятностями.** Поведение неоднородной МЦ при скачках переходных вероятностей схематично отображается на рис. 5.

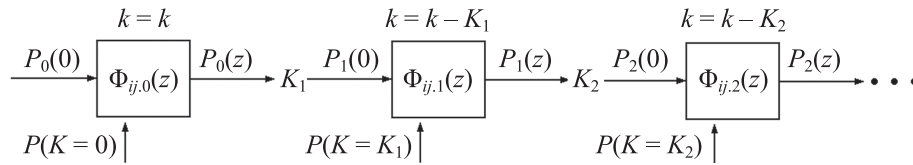


Рис. 5

С начала функционирования МЦ каждому соответствующему интервалу тактового времени сопоставляется „собственная“ МПВ и, как следствие, своя матрица передаточных функций. При скачке в момент тактового времени  $k = K_1$  из мгновенных значений функций вероятностей составляется новый вектор начального распределения. Находятся новые необходимые для вычислений  $z$ -передаточные функции, определяются текущие функции вероятностей состояний. В очередной момент скачка тактового времени  $k = K_2$  процесс повторяется и т. д. При сопряжении функций вероятностей и при получении оценок для границ наступления установившегося режима учитывается смещение временного аргумента. Выходной вектор вероятностей очередного скачка является вектором начальных условий в момент тактового времени следующего скачка переходных вероятностей.

В качестве примера рассматривается неоднородная МЦ с интервалом функционирования от 0 до 30 тактов и кусочно-постоянными изменениями переходных вероятностей. Математическая модель МЦ задается в виде следующих структур МПВ и ВНРВ (соответствует графу на рис. 1):

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{20} = \begin{bmatrix} 0,92 & 0,08 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,92 & 0 & 0,08 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_0(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При этом происходит два скачка переходных вероятностей на 10 и 20 тактах соответственно.

При  $k = K_1 = 10$  с помощью полученных ранее функций вероятностей находятся „новые“ начальные условия и собственные значения МПВ

$$P_1^*(10) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k - 1,571)|_{k=10} = 0,406,$$

$$P_2^*(10) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k + 2,618)|_{k=10} = 0,399,$$

$$P_3^*(10) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k + 0,524)|_{k=10} = 0,195,$$

$$\mathbf{P}_1(0) = \mathbf{P}_0(10) = [0,406 \quad 0,399 \quad 0,195]^T,$$

$$\mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = 1, z_{2,3} = 0,1 \pm j0,48 = \lambda \pm j\omega.$$

Для упрощения записей вводится ранее использованное обозначение

$$\mathbf{P}^\Gamma = \mathbf{P}_{10}^T = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,4 \\ 0,8 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix},$$

$$A(z) = \det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{P}^\Gamma) = (z - z_1)(z^2 - 2\lambda z + \lambda^2 + \omega^2) = (z - 1)(z^2 - 0,2z + 0,24),$$

далее формируются

$$\mathbf{P}_{11}^T = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{22}^T = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{33}^T = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0,8 & 0,4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0,2 & 1 & 0,4 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{31} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 1 \\ 0,8 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 1 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{32} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 1 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{23} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,4 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,6 \end{bmatrix},$$

$$\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{11}^T) = \det \begin{bmatrix} z-0,4 & 0 \\ -0,6 & z-0,6 \end{bmatrix} = z^2 - z + 0,24,$$

$$\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{22}^T) = \det \begin{bmatrix} z-0,2 & -0,4 \\ 0 & z-0,6 \end{bmatrix} = z^2 - 0,8z + 0,12,$$

$$\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{33}^T) = \det \begin{bmatrix} z-0,2 & 0 \\ -0,8 & z-0,4 \end{bmatrix} = z^2 - 0,6z + 0,08,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{21}) = \det \begin{bmatrix} z-0,2 & -1 & -0,4 \\ -0,8 & z & 0 \\ 0 & 0 & z-0,6 \end{bmatrix} = z^3 - 0,8z^2 - 0,68z + 0,48,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{31}) = \det \begin{bmatrix} z-0,2 & -1 & -0,4 \\ -0,8 & z-0,4 & 0 \\ 0 & -0,6 & z \end{bmatrix} = z^3 - 0,6z^2 + 0,08z - 0,48,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{12}) = \det \begin{bmatrix} z & 0 & -0,4 \\ -1 & z-0,4 & 0 \\ 0 & -0,6 & z-0,6 \end{bmatrix} = z^3 - z^2 + 0,24z - 0,24,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{32}) = \det \begin{bmatrix} z-0,2 & 0 & 0 \\ -0,8 & z-0,4 & -1 \\ 0 & -0,6 & z \end{bmatrix} = z^3 - 0,6z^2 - 0,52z + 0,12,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{13}) = \det \begin{bmatrix} z & 0 & -0,4 \\ 0 & z-0,4 & 0 \\ -1 & -0,6 & z-0,6 \end{bmatrix} = z^3 - z^2 - 0,16z + 0,16,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{23}) = \det \begin{bmatrix} z-0,2 & 0 & -0,4 \\ -0,8 & z & 0 \\ 0 & -1 & z-0,6 \end{bmatrix} = z^3 - 0,8z^2 + 0,12z - 0,32.$$

Строится матрица передаточных функций (общий знаменатель для удобства записи выносятся)

$$B_{11}(z) = \det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{11}^T) = z^2 - z + 0,24,$$

$$B_{12}(z) = z\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{11}^T) - \det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{12}) = z(z^2 - z + 0,24) - (z^3 - z^2 + 0,24z - 0,24) = 0,24,$$

$$B_{13}(z) = z\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{11}^T) - \det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{13}) = z(z^2 - z + 0,24) - (z^3 - z^2 - 0,16z + 0,16) = 0,4z - 0,16,$$

$$B_{21}(z) = z\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{22}^T) - \det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{21}) = z(z^2 - 0,8z + 0,12) - (z^3 - 0,8z^2 - 0,68z + 0,48) = 0,8z - 0,48,$$



$$\begin{aligned}
 B_{22}(z) &= \det(zE_2 - P_{22}^T) = z^2 - 0,8z + 0,12, \\
 B_{23}(z) &= z\det(zE_2 - P_{22}^T) - \det(zE_3 - D_{23}) = z(z^2 - 0,8z + 0,12) - (z^3 - 0,8z^2 + 0,12z - 0,32) = 0,32, \\
 B_{31}(z) &= z\det(zE_2 - P_{33}^T) - \det(zE_3 - D_{31}) = z(z^2 - 0,6z + 0,08) - (z^3 - 0,6z^2 + 0,08z - 0,48) = 0,48, \\
 B_{32}(z) &= z\det(zE_2 - P_{33}^T) - \det(zE_3 - D_{32}) = z(z^2 - 0,6z + 0,08) - (z^3 - 0,6z^2 - 0,52z + 0,12) = 0,6z - 0,12, \\
 B_{33}(z) &= \det(zE_2 - P_{33}^T) = z^2 - 0,6z + 0,08.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= \frac{1}{A(z)} \begin{bmatrix} B_{11}(z) & B_{12}(z) & B_{13}(z) \\ B_{21}(z) & B_{22}(z) & B_{23}(z) \\ B_{31}(z) & B_{32}(z) & B_{33}(z) \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} \cdot \begin{bmatrix} z^2-z+0,24 & 0,24 & 0,4z-0,16 \\ 0,8z-0,48 & z^2-0,8z+0,12 & 0,32 \\ 0,48 & 0,6z-0,12 & z^2-0,6z+0,08 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Определяются эквивалентные  $z$ -операторы

$$\begin{aligned}
 \Phi_{1.1}(z) &= \frac{1}{A(z)} \sum_{n=1}^3 B_{1n}(z)P_{n.1}(0) = \frac{B_{11}(z)P_{1.1}(0) + B_{12}(z)P_{2.1}(0) + B_{13}(z)P_{3.1}(0)}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} = \\
 &= \frac{(z^2-z+0,24) \cdot 0,406 + 0,24 \cdot 0,399 + (0,4z-0,16) \cdot 0,195}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} = \frac{0,406z^2 - 0,328z + 0,162}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)}, \\
 \Phi_{2.1}(z) &= \frac{1}{A(z)} \sum_{n=1}^3 B_{2n}(z)P_{n.1}(0) = \frac{B_{21}(z)P_{1.1}(0) + B_{22}(z)P_{2.1}(0) + B_{23}(z)P_{3.1}(0)}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} = \\
 &= \frac{(0,8z-0,48) \cdot 0,406 + (z^2-0,8z+0,12) \cdot 0,399 + 0,32 \cdot 0,195}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} = \frac{0,399z^2 + 0,006z - 0,085}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)}, \\
 \Phi_{3.1}(z) &= \frac{1}{A(z)} \sum_{n=1}^3 B_{3n}(z)P_{n.1}(0) = \frac{B_{31}(z)P_{1.1}(0) + B_{32}(z)P_{2.1}(0) + B_{33}(z)P_{3.1}(0)}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} = \\
 &= \frac{0,48 \cdot 0,406 + (0,6z-0,12) \cdot 0,399 + (z^2-0,6z+0,08) \cdot 0,195}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} = \frac{0,195z^2 + 0,122z + 0,163}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)}.
 \end{aligned}$$

С использованием общих результатов [5] по полученным  $z$ -операторам  $\Phi_{1.1}(z)$ ,  $\Phi_{2.1}(z)$ ,  $\Phi_{3.1}(z)$  находятся текущие выражения для функций вероятностей состояний

$$\begin{aligned}
 P_{1.1}(k) &= 0,231 - 0,255 \cdot 0,49^k \cdot \sin(1,776k - 0,757), \\
 P_{2.1}(k) &= 0,307 - 0,361 \cdot 0,49^k \cdot \sin(1,776k + 0,396), \\
 P_{3.1}(k) &= 0,462 - 0,313 \cdot 0,49^k \cdot \sin(1,776k + 1,019).
 \end{aligned}$$

При  $k = K_1 = 20$

$$\begin{aligned}
 P_{1.1}(k - K_1) = P_{1.1}(10) = 0,231, \quad P_{2.1}(k - K_1) = P_{2.1}(10) = 0,307, \quad P_{3.1}(k - K_1) = P_{3.1}(10) = 0,462, \\
 P_2(0) = P_1(10) = [0,231 \quad 0,307 \quad 0,462]^T,
 \end{aligned}$$

$$P_{20} = \begin{bmatrix} 0,92 & 0,08 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,92 & 0 & 0,08 \end{bmatrix}, \quad P^T = P_{20}^T = \begin{bmatrix} 0,92 & 0 & 0,92 \\ 0,08 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,08 \end{bmatrix}, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 0,428, \quad z_3 = 0,172,$$

$$A(z) = \det(zE_3 - P^T) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = (z - 1)(z - 0,428)(z - 0,172).$$

По аналогии с предыдущими расчетами находится очередная матрица передаточных функций и определяются эквивалентные по суммарному действию компонентов „нового“ вектора начальных условий  $z$ -операторы

$$\Phi(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0,428)(z-0,172)} \cdot \begin{bmatrix} z^2 - 0,68z + 0,048 & 0,368 & 0,92z - 0,552 \\ 0,08z - 0,0064 & z^2 - z + 0,0736 & 0,0736 \\ 0,032 & 0,4z - 0,368 & z^2 - 1,52z + 0,552 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{1,2}(z) = \frac{0,231z^2 + 0,268z - 0,131}{(z-1)(z-0,428)(z-0,172)}, \quad \Phi_{2,2}(z) = \frac{0,307z^2 - 0,289z + 0,055}{(z-1)(z-0,428)(z-0,172)},$$

$$\Phi_{3,2}(z) = \frac{0,462z^2 - 0,579z + 0,149}{(z-1)(z-0,428)(z-0,172)}.$$

В итоге находятся аналитические выражения функций вероятностей после второго скачка

$$P_{1,2}(k) = 0,777 - 0,18 \cdot 0,428^k - 0,366 \cdot 0,172^k,$$

$$P_{2,2}(k) = 0,155 + 0,084 \cdot 0,428^k + 0,068 \cdot 0,172^k,$$

$$P_{3,2}(k) = 0,068 + 0,096 \cdot 0,428^k + 0,298 \cdot 0,172^k.$$

После сопряжения по участкам тактового времени имеют место следующие соотношения:

$$P_1(k) = \begin{cases} 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k - 1,571), & \forall 0 \leq k < 10; \\ 0,231 - 0,255 \cdot 0,49^{k-10} \sin[1,776(k-10) - 0,757], & 10 \leq k < 20; \\ 0,777 - 0,18 \cdot 0,428^{k-20} - 0,366 \cdot 0,172^{k-20}, & k \geq 20, \end{cases}$$

$$P_2(k) = \begin{cases} 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k + 2,618), & \forall 0 \leq k < 10; \\ 0,307 - 0,361 \cdot 0,49^{k-10} \sin[1,776(k-10) + 3,396], & 10 \leq k < 20; \\ 0,155 + 0,084 \cdot 0,428^{k-20} + 0,068 \cdot 0,172^{k-20}, & k \geq 20, \end{cases}$$

$$P_3(k) = \begin{cases} 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k + 0,524), & \forall 0 \leq k < 10; \\ 0,462 - 0,313 \cdot 0,49^{k-10} \sin[1,776(k-10) + 1,019], & 10 \leq k < 20; \\ 0,068 + 0,096 \cdot 0,428^{k-20} + 0,298 \cdot 0,172^{k-20}, & k \geq 20. \end{cases}$$

Графики огибающих найденных аналитических функций вероятностей состояний при кусочно-постоянном изменении переходных вероятностей представлены на рис. 6.

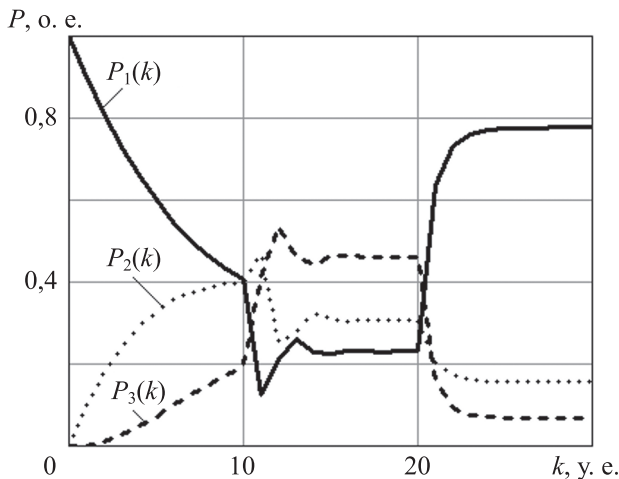


Рис. 6

При оценке границ наступления установленного режима для каждого значения вероятности следует учитывать смещение тактового времени. Для первого состояния при несмещенном тактовом времени функция вероятности состояния окончательно принимает вид

$$P_{1,2}(k) = 0,777 - 0,18 \cdot 0,428^k - 0,366 \cdot 0,172^k.$$

Согласно [5], для несмещенной оценки времени установления „снизу“ с использованием части функции с доминирующим корнем можно получить

$$k_1 = \frac{\ln(0,05) + \ln(0,777) - \ln(0,18)}{\ln(0,428)} = 1,805 \rightarrow 2.$$

Действительное время наступления стационарного режима для вероятности первого состояния рассчитывается с учетом смещения в 20 тактов

$$k_{1,20-} = k_{1-} + 20 = 22.$$

Для вероятности второго состояния несмещенное время установления „сверху“ при  $P_{2,2}(k) \approx 0,155 + 0,084 \cdot 0,428^k$  с тем же доминирующим корнем составит

$$k_{2+} = \frac{\ln(0,05) + \ln(0,155) - \ln(0,084)}{\ln(0,428)} = 2,8 \rightarrow 3,$$

а с учетом смещения тактового времени

$$k_{2,20+} = k_{2+} + 20 = 23.$$

И, наконец, для вероятности третьего состояния при приближении  $P_{3,2}(k) \approx 0,068 + 0,096 \cdot 0,428^k$  можно получить

$$k_{3+} = \frac{\ln(0,05) + \ln(0,068) - \ln(0,096)}{\ln(0,428)} = 3,946 \rightarrow 4, k_{3,20+} = k_{3+} + 20 = 24.$$

Полученные оценки времен установления хорошо согласуются с графиками функций вероятностей состояний на рис. 6.

Очевидно, что установившиеся значения вероятностей в виде

$$P(k \rightarrow \infty) = [0,777 \quad 0,155 \quad 0,068]^T.$$

существенно отличаются от их средних значений на всем интервале функционирования МЦ с учетом скачков переходных вероятностей

$$\bar{P}_1(0-30) = \frac{\sum_{k=0}^{30} P_1(k)}{31} = 0,542, \bar{P}_2(0-30) = \frac{\sum_{k=0}^{30} P_2(2k)}{31} = 0,254, \bar{P}_3(0-30) = \frac{\sum_{k=0}^{30} P_3(2k)}{31} = 0,204.$$

**Заключение.** Описанный подход позволяет исследовать неоднородные МЦ с кусочно-постоянными изменениями переходных вероятностей в строгой аналитической форме, он сохраняет все свойства основного подхода к выборочному поиску функций вероятностей состояний, изложенному в работе [5]. Наиболее просто процедуры реализуются для варианта некратных вещественных собственных значений МПВ. Однако наличие комплексно-сопряженных пар также не приводит к каким-либо существенным вычислительным затруднениям.

При этом обеспечиваются точность и наглядность представления соответствующих результатов, получение валидных оценок для времени установления стационарных режимов, определение „истинных“ средних значений вероятностей состояний на всем интервале развития системы с учетом скачков вероятностей. Таким образом, в целом значительно (а часто — принципиально несоизмеримо), по сравнению с результатами использования стационарных характеристик, повышается информативность представлений о реальном поведении МЦ.

Автор выражает признательность рецензенту за продуктивные замечания, способствовавшие улучшению содержания настоящей статьи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 485 с.
2. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: КноРус, 2010. 190 с.
3. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989. 208 с.
4. Фурман Я. А., Юрьев А. Н., Янин В. В. Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений. Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1992. 245 с.

5. Земсков А. В. Аналитический подход к выборочному поиску функций вероятностей состояний в марковских цепях // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 12. С. 1035–1049. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1035-1049.
6. Вытовтов К. А., Барабанова Е. А. Аналитический метод анализа неоднородных непрерывных марковских процессов с кусочно-постоянными интенсивностями перехода // Автоматика и телемеханика. 2021. № 12. С. 91–104. DOI: 10.31857/S0005231021120060.
7. Harrison P. G. Transient Behaviour of Queueing Networks // J. Appl. Prob. 1981. Vol. 18, N 2. P. 482–490.
8. Dudin A. N., Karolik A. V. BMAP/SM/1 Queue with Markovian Input of Disasters and Non-instantaneous Recovery // Performance Evaluat. 2001. Vol. 45, N 1. P. 19–32.
9. Dharmaraja S., Kumar R. Transient solution of a Markovian queueing model with heterogeneous servers and catastrophes // OPSEARCH. 2015. Vol. 52, N 4. P. 810–826.
10. Kumar B. Krishna, Madheshwari S. Pavai, Venkatakrishanan K. S. Transient solution of an M/M/2 queue with heterogeneous servers subject to catastrophes // Intern. J. Inform. Management Sci. 2017. Vol. 18, N 1. P. 63–80.
11. Clarke A. B. The time-dependent waiting line problem. Umv Michigan Rept. M720-1RS9. 1953.
12. Clarke A. B. On time-dependent waiting line processes // Ann. Math. Statist. 1953. Vol. 24. P. 491–492.
13. Коган Я. А., Литвин В. Г. К вычислению характеристик систем массового обслуживания с конечным буфером, работающей в случайной среде // Автоматика и телемеханика. 1976. № 12. С. 49–57.
14. Дудин А. Н. Об обслуживающей системе с переменным режимом работы // Автоматика и вычислительная техника. 1985. № 2. С. 27–29.
15. Головкин Н. И., Каретник В. О., Пелешок О. В. СМО с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока // Автоматика и вычислительная техника. 2009. № 10. С. 75–96.
16. Бондрова О. В., Крылова Д. С., Головкин Н. И., Жук Т. А. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока // Вестник ВГУ: Серия: физика, математика. 2015. № 4. С. 89–100.
17. Миллер А. Б., Миллер Б. М., Степанян К. В. Одновременное импульсное и непрерывное управление марковской цепью в непрерывном времени // Автоматика и телемеханика. 2020. № 3. С. 114–131. DOI: 10.31857/S0005231020030071.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Алексей Викторович Земсков**

— докт. техн. наук, профессор; Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, кафедра математического моделирования и прикладной информатики; профессор кафедры;  
E-mail: aleksei.zemskov@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.01.2024; одобрена после рецензирования 30.04.2024; принята к публикации 19.06.2024.

#### REFERENCES

1. Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskiy protsessy* (Markov Processes), Moscow, 1977, 485 p. (in Russ.)
2. Ventzel E.S. *Issledovaniye operatsiy: zadachi, printsipy, metodologiya* (Operations Research: Objectives, Principles, Methodology), Moscow, 2010, 190 p. (in Russ.)
3. Nummelin E. *General Irreducible Markov Chains and Non-Negative Operators*, Cambridge etc., 1984, 156 p.
4. Furman Ya.A., Yuryev A.N., Yanshin V.V. *Tsifrovyye metody obrabotki i raspoznavaniya binarnykh izobrazheniy* (Digital Methods of Processing and Recognition of Binary Images), Krasnoyarsk, 1992, 245 p. (in Russ.)
5. Zemskov A.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 12(66), pp. 1035–1049, DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1035-1049.
6. Vytovtov K.A. and Barabanova E.A. *Automation and Remote Control*, 2021, no. 12, pp. 2112–2124, DOI: 10.31857/S0005231021120060.
7. Harrison P.G. *J. Appl. Prob.*, 1981, no. 2(18), pp. 482–490.
8. Dudin A.N., Karolik A.V. *Performance Evaluat.*, 2001, no. 1(45), pp. 19–32.
9. Dharmaraja S., Rakesh Kumar, *OPSEARCH*, 2015, no. 4(52), pp. 810–826.
10. Kumar B. Krishna, Madheshwari S. Pavai, Venkatakrishanan K.S. *Int. J. Inform. Management Sci.*, 2017, no. 1(18), pp. 63–80.
11. Clarke A.B. *The time-dependent waiting line problem*, Umv Michigan Rept M720-1RS9, 1953.
12. Clarke A.B. *Ann. Math. Statist.*, 1953, vol. 24, pp. 491–492.
13. Kogan V.Ya., Menn A.A. *Automation and Remote Control*, 1976, no. 12, pp. 1908–1919.
14. Dudin A.N. *Automatic Control and Computer Sciences*, 1985, no. 2, pp. 27–29. (in Russ.)
15. Golovko N.I., Karetnik V.O., Peleshok O.V. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2009, no. 10, pp. 75–96. (in Russ.)

16. Bondrova O.V., Krylova D.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. *Proceedings of Voronezh State University*. Series: Physics. Mathematics, 2015, no. 4, pp. 89–100. (in Russ.)
17. Miller A.B., Miller B.M., Stepanyan K.V. *Automation and Remote Control*, 2020, no. 3, pp. 469–482, DOI: 10.31857/S0005231020030071.

**DATA ON AUTHOR****Alexey V. Zemskov**

—

Dr. Sci., Professor; Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Department of Mathematical Simulation and Applied Informatics; Professor; E-mail: aleksei.zemskov@yandex.ru

Received 25.01.2024; approved after reviewing 30.04.2024; accepted for publication 19.06.2024.