

**АЛГОРИТМ ДЛИННОБАЗОВОЙ НАВИГАЦИИ
АВТОНОМНОГО НЕОБИТАЕМОГО ПОДВОДНОГО АППАРАТА
ПРИ ОТСУТСТВИИ АПРИОРНЫХ ДАННЫХ О ЕГО МЕСТОПОЛОЖЕНИИ
И РАЗРЕЖЕННОМ РАСПОЛОЖЕНИИ МАЯКОВ**

Д. А. Кошаев¹, В. В. Богомолов^{1,2*}

¹ Концерн «ЦНИИ „Электроприбор“», Санкт-Петербург, Россия

² Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

* bogomolov.v.v@yandex.ru

Аннотация. Разработан рекуррентный алгоритм определения координат автономного необитаемого подводного аппарата (АНПА) с использованием разномоментных измерений дальностей до гидроакустических маяков и данных относительного лага и курсоуказателя. Предполагается, что априорные координаты АНПА неизвестны, а из-за разреженного расположения маяков по одномоментным измерениям невозможно получить однозначное навигационное решение. Алгоритм запускается при первом получении одновременных измерений от двух маяков. Предусматривается совместная обработка текущих и сохраненных до запуска алгоритма измерений с помощью фильтра Калмана. Неоднозначность местоположения АНПА разрешается согласно отношению апостериорных вероятностей альтернатив. Представлены результаты моделирования и обработки натурных данных, а также оценки быстродействия, подтверждающие эффективность разработанного алгоритма.

Ключевые слова: автономный необитаемый подводный аппарат, метод длинной базы, система счисления, фильтр Калмана, разрешение неоднозначности

Благодарность: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00626, <https://rscf.ru/project/23-19-00626/>.

Ссылка для цитирования: Кошаев Д. А., Богомолов В. В. Алгоритм длиннбазовой навигации автономного необитаемого подводного аппарата при отсутствии априорных данных о его местоположении и разреженном расположении маяков // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 12. С. 1052–1064. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-12-1052-1064.

**ALGORITHM OF LONG BASELINE NAVIGATION OF AN AUTONOMOUS UNDERWATER VEHICLE
IN THE ABSENCE OF A PRIORI DATA ON ITS LOCATION UNDER CONDITIONS
OF SPARSE BEACON PLACEMENT**

D. A. Koshaev¹, V. V. Bogomolov^{1,2*}

¹ Concern CSRI Elektropribor, JSC, St. Petersburg, Russia

² ITMO University, St. Petersburg, Russia

* bogomolov.v.v@yandex.ru

Abstract. A recursive algorithm is developed to determine coordinates of an autonomous underwater vehicle (AUV) using measurements of ranges to acoustic beacons, taken at different times, together with relative lag and course indicator data. It is assumed that a priori coordinates of the AUV are unknown, and the unambiguous navigation solution cannot be obtained from one-shot measurements due to a sparse beacon location. The algorithm is started upon the first receipt of simultaneous measurements from two beacons. Joint processing of current and saved measurements before the algorithm launch is provided using the Kalman filter. The ambiguity of the AUV location is resolved according to the ratio of a posteriori probabilities of alternatives. The results of modeling and processing of field data, as well as performance assessments, confirming the efficiency of the developed algorithm are presented.

Keywords: autonomous underwater vehicle, long baseline method, notation, Kalman filter, ambiguity resolution

Acknowledgments: The study was supported by the grant of the Russian Science Foundation No. 23-19-00626, <https://rscf.ru/project/23-19-00626/>.

For citation: Koshaev D. A., Bogomolov V. V. Algorithm of long baseline navigation of an autonomous underwater vehicle in the absence of a priori data on its location under conditions of sparse beacon placement. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 12. P. 1052–1064 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-12-1052-1064.

Введение. Система навигации, построенная на основе автономных датчиков, в частности лага и курсоуказателя, и используемая на автономном необитаемом подводном аппарате (АНПА), накапливает ошибки с течением времени. Для их списания может использоваться коррекция по измерениям дальностей до гидроакустических маяков [1–12]. Эффективность коррекции зависит от количества приемников и гидроакустических маяков, геометрических особенностей их расположения, а также математических подходов, используемых при обработке измерений.

В настоящей работе исследуется метод длинной базы, предполагающий получение измерений времени распространения сигнала от маяков, разнесенных друг от друга на значительное расстояние, к АНПА. Координаты маяков считаются известными, измерения носят беззапросный характер, шкалы времени маяков и АНПА синхронизированы. Измерение дальности формируется как произведение измеренного времени на приближенную оценку скорости звука в воде. Задача решается по серии разномоментных измерений дальностей до гидроакустических маяков с привлечением показаний относительного лага и курсоуказателя, обеспечивающих счисление. Для решения такой задачи могут использоваться детерминированный метод крьюйс-дальности и его разновидности [13], предполагающие применение выборочных разномоментных измерений. Более эффективное решение можно получить, используя полную реализацию регулярно поступающих измерений и учитывая статистические свойства их погрешностей, т. е. в рамках стохастического подхода, который и применяется в настоящей работе с учетом особенностей рассматриваемой задачи.

Отметим, что при наличии точной для линеаризации измерений априорной информации о местоположении АНПА метод длинной базы может быть реализован с помощью обобщенного или итерационного фильтров Калмана (ФК) [4, 14]. Но по условиям рассматриваемой задачи априорные координаты отсутствуют, и эти методы неприменимы в чистом виде. Предлагаемое решение опирается на методы обработки линеаризованных измерений как наиболее простые для реализации, которые дополнены необходимыми для их корректного применения подготовительными действиями.

В момент t_0 , когда впервые появляются одномоментные измерения от двух или большего числа маяков, в работе используются метод наименьших квадратов и итерационный алгоритм на основе линеаризации измерений. Если число и расположение используемых на момент t_0 маяков не позволяет однозначно оценить координаты АНПА, т. е. имеют место две гипотезы о возможном местоположении АНПА, для каждой гипотезы применяется обобщенный ФК. Результаты работы ФК используются для определения отношения апостериорных вероятностей гипотез и в конечном счете — для разрешения неоднозначности местоположения АНПА.

Чтобы не потерять полезную информацию, можно учесть сохраненные до момента t_0 измерения, а затем приступить к обработке измерений, поступивших после t_0 . Такое решение, использующее процедуру сглаживания в фиксированной точке [15], было исследовано в [16, 17]. Однако обработка большого числа сохраненных до момента t_0 измерений требует затрат времени. В настоящей работе предлагается алгоритм, в котором сохраненные измерения обрабатываются постепенно вместе со вновь поступающими измерениями. При этом это делается с помощью одного ФК, а не двух, обрабатывающих независимо сохраненные и текущие измерения, как описано в [18].

В статье приведена постановка задачи и представлен алгоритм ее решения, приводятся результаты моделирования алгоритма по множеству случайных реализаций погрешностей измерений, результаты обработки натурных данных, а также сравнительные оценки быстродействия алгоритмов.

Постановка задачи навигации АНПА. Пусть для дискретных моментов времени t_i , $i = -N, \dots, 0, 1, 2, \dots$ на АНПА имеются беззапросные измерения дальности до гидроакустических маяков, шкалы времени которых синхронизированы со шкалой времени АНПА:

$$Y_i^j = \tilde{T}_i^j \hat{c}_0 = \sqrt{(x_i^j - x_i)^2 + (y_i^j - y_i)^2 + (z_i^j - z_i)^2} + \Delta c \tilde{T}_i^j + \delta_i + v_i^j, \quad (1)$$

где $j = \overline{1, n_i}$ — номер маяка; x_i, y_i — неизвестные горизонтальные координаты АНПА в локальной прямоугольной системе координат с географической ориентацией осей (априорная информация о них отсутствует); x_i^j, y_i^j — известные горизонтальные координаты маяков; z_i^j, z_i — известные глубины маяков и АНПА; $\hat{c}_0, \Delta c$ — априорная оценка скорости распространения звука в воде и ее ошибка — постоянная величина со среднеквадратическим отклонением (СКО) $\sigma_{\Delta c}$, T_i^j и $\tilde{T}_i^j$ — измеренное и расчетное время прохождения сигнала, δ_i — общая для всех маяков и v_i^j — некоррелированная для разных маяков ошибки, являющиеся белыми шумами, с СКО σ_δ, σ_v .

Предполагается, что на борту АНПА используется система счисления по измерениям продольной и поперечной составляющих скорости относительного лага с инструментальными ошибками в виде белого шума, СКО которых при осреднении на интервале в одну секунду обозначим как $\sigma_{\Delta V}$, и показаниям курсоуказателя, например магнитного компаса, с ошибкой ΔK , описываемой стационарным марковским процессом первого порядка с СКО $\sigma_{\Delta K}$ и интервалом корреляции $\tau_{\Delta K}$. При счислении используются значения географических составляющих скорости течения с ошибками $\Delta U^x, \Delta U^y$ в виде стационарных марковских процессов первого порядка с СКО $\sigma_{\Delta U}$ и интервалом корреляции $\tau_{\Delta U}$. Все указанные ошибки считаются гауссовыми центрированными величинами. Далее под номерами i дискретных моментов времени будем понимать сами моменты t_i .

Требуется определить горизонтальные координаты АНПА x_i, y_i для моментов $i \geq 0$ по всем доступным измерениям (1). Задача сводится к оцениванию вектора состояния $X_i = [x_i, y_i, \Delta c, \Delta K_i, \Delta U_i^x, \Delta U_i^y]^T$ по измерениям $Y_{-N}, \dots, Y_i$, где $Y_i = (Y_i^1, \dots, Y_i^{n_i})^T$ при $i \geq 0$ (при $i < 0$ Y_i — скалярные величины). Уравнения для координат имеют вид

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + (\tilde{V}_i^y \Delta K_i + \tilde{V}_i^x + \tilde{U}_i^x + \Delta U_i^x) \Delta t_i + w_i^x, \\ y_i &= y_{i-1} + (-\tilde{V}_i^x \Delta K_i + \tilde{V}_i^y + \tilde{U}_i^y + \Delta U_i^y) \Delta t_i + w_i^y, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$; $\tilde{V}_i^x = \tilde{V}_i^\xi \sin \tilde{K}_i + \tilde{V}_i^\eta \cos \tilde{K}_i$, $\tilde{V}_i^y = \tilde{V}_i^\xi \cos \tilde{K}_i - \tilde{V}_i^\eta \sin \tilde{K}_i$, $\tilde{V}_i^\xi, \tilde{V}_i^\eta$ — измеренные лагом значения продольной и поперечной (положительной в сторону правого борта) составляющих скорости; $\tilde{K}$ — измеренное значение курса; $\tilde{U}^x, \tilde{U}^y$ — приближенные географические составляющие скорости течения; w^x, w^y — порожденные шумами лага ошибки белого шума координат с СКО $\sigma_w = \sigma_{\Delta V} \Delta t_i$.

На рис. 1 представлена диаграмма числа одновременно используемых маяков. Предполагается, что для моментов $i < 0$ имеются измерения от не более чем одного маяка (не обязательно одного и того же для разных моментов), а для $i = 0$ — от двух маяков, т. е. $n_{-N} = 1$, $n_i \leq 1$ при $i < 0$, $n_0 \geq 2$. Количество используемых маяков для $i > 0$ не оговаривается.

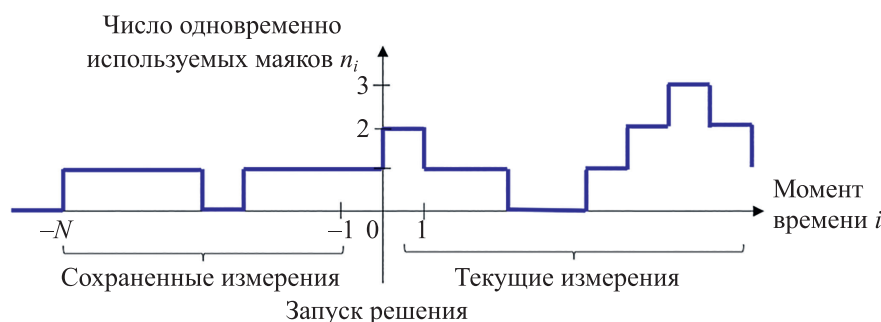


Рис. 1

Описание алгоритма при запуске решения ($i = 0$). Чтобы использовать для решения „экономичный“ алгоритм калмановского типа на основе линеаризации измерений, важно иметь начальную точку линеаризации, которая обеспечивает сходимость алгоритма. Так как информация о положении АНПА по условию задачи отсутствует, то получить такую точку можно только из самих измерений. Важным обстоятельством, с которым приходится сталкиваться при

решении данной задачи, является двужначность положения АНПА при использовании измерений дальности до двух маяков. На рис. 2 показаны типовые примеры с двумя и тремя маяками, когда положение АНПА по дальномерным измерениям определяется неоднозначно (а) и когда такая проблема отсутствует (б). Остановимся подробнее на первом случае. Случай однозначного решения рассматривался в [16, 17, 19].

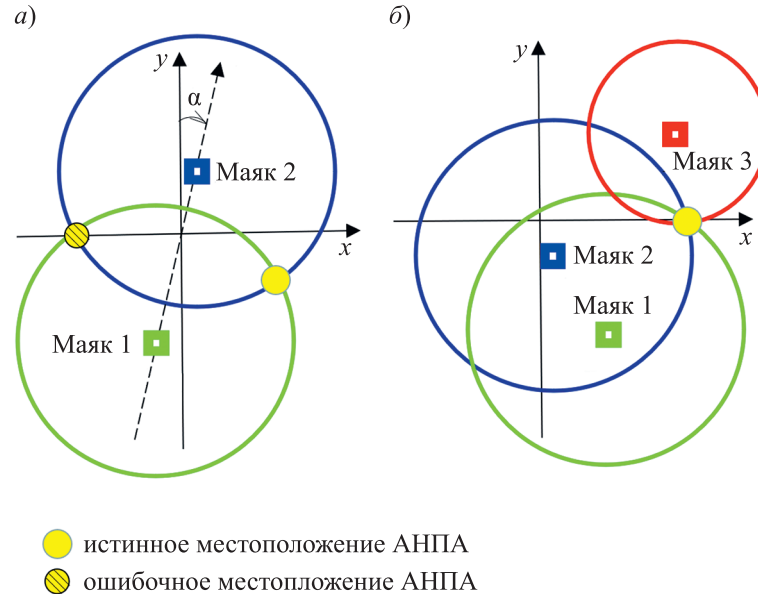


Рис. 2

Итак, предположим, что в момент запуска решения на АНПА принимаются сигналы от двух маяков (рис. 2, а), т. е. $n_0 = 2$. Измерения $Y_0^j, j = 1, n_0$ здесь позволяют получить две оценки возможного местоположения АНПА.

Для упрощения последующих выкладок от исходных горизонтальных координат x, y перейдем к

$$\mathbf{x} = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad \mathbf{y} = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad (3)$$

где $\sin \alpha \propto x_0^2 - x_0^1$, $\cos \alpha \propto y_0^2 - y_0^1$. При этом α представляет собой отсчитываемый по часовой стрелке угол между осью y и прямой линией, проходящей через проекции маяков на горизонтальную плоскость. Ось y оказывается параллельна этой линии, соответственно ось x перпендикулярна ей. Для координат АНПА и маяков в системе координат $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будем использовать обозначения, аналогичные тем, которые введены для системы координат (x, y) .

С помощью (3) определим координаты маяков по новым осям, причем по оси $\mathbf{x}$ все маяки имеют одну и ту же координату.

Получим предварительную оценку координаты $\mathbf{y}_0$ АНПА, используя в качестве измерения

$$\begin{aligned} \rho &= [(Y_0^2)^2 - (Y_0^1)^2 - (\mathbf{y}_0^2)^2 + (\mathbf{y}_0^1)^2 - (z_0^2 - z_0)^2 + (z_0^1 - z_0)^2] / 2 \approx \\ &\approx (\mathbf{y}_0^1 - \mathbf{y}_0^2) \mathbf{y}_0 + Y_0^1 (\Delta c \tilde{T}_0^1 + \delta + v_0^1) - Y_0^2 (\Delta c \tilde{T}_0^2 + \delta + v_0^2), \end{aligned} \quad (4)$$

которое получено с учетом (1) и равенств $\mathbf{x}_0^1 = \mathbf{x}_0^2$, $(x_0^j - x_0)^2 + (y_0^j - y_0)^2 = (\mathbf{x}_0^j - \mathbf{x}_0)^2 + (\mathbf{y}_0^j - \mathbf{y}_0)^2$, $j = 1, 2$. В (4) не учтены составляющие $(\Delta c \tilde{T}_0^k + \delta + v_0^k) / 2$, $k = 1, j + 1$. Оценка $\mathbf{y}_0$ определяется как

$$\tilde{\mathbf{y}}_0 = \rho / (\mathbf{y}_0^1 - \mathbf{y}_0^2).$$

Для координаты $\mathbf{x}_0$ сформируем набор предварительных оценок $\tilde{\mathbf{x}}_0^{(l)} = \tilde{\mathbf{x}}_0^{(1)} + \delta \mathbf{x} l$, $l = \overline{1, L}$, где $\delta \mathbf{x} = \Delta \tilde{\mathbf{x}} / (L - 1)$, $L = \lceil \Delta \tilde{\mathbf{x}} / \delta \mathbf{x} \rceil + 1$, $\delta \mathbf{x}$ — заданный параметр, $\Delta \mathbf{x}$ — длина интервала, охватывающего предварительные оценки. Значения $\tilde{\mathbf{x}}_0^{(1)}$, $\Delta \tilde{\mathbf{x}}$ задаются исходя из максимально возможной дальности $D_{\max}$ приема сигнала от маяков.

Используя линейаризованное представление вектора измерений Y_0 и итерационный алгоритм [14], для каждого $l = \overline{1, L}$ вычислим оценки $\tilde{\mathbf{x}}_0^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^{(l)}$. При этом в качестве априорных оценок и точек линейаризации измеряемых дальностей на первой итерации используются предварительные оценки $\tilde{\mathbf{x}}_0^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^{(l)}$. Их погрешности считаются неизвестными параметрами. Составляющие $\tilde{T}_0^j \Delta c$ относятся к погрешностям измерений.

Оценки $\tilde{\mathbf{x}}_0^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$ концентрируются вблизи точек истинного и ложного положения АНПА. Распределим точки $\tilde{\mathbf{x}}_0^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$ по двум группам. Для этого перенумеруем их так, чтобы при новой нумерации $\{l\}$ образовалась неубывающая последовательность $\tilde{\mathbf{x}}_0^{\{1\}} \leq \tilde{\mathbf{x}}_0^{\{2\}} \leq \dots \leq \tilde{\mathbf{x}}_0^{\{L\}}$. Точки $\tilde{\mathbf{x}}_0^{\{l\}}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^{\{l\}}$ с номерами $l = \overline{1, L^{[1]}}$, где $L^{[1]} = \arg \max_{l=1, L-1} (\tilde{\mathbf{x}}_0^{\{l+1\}} - \tilde{\mathbf{x}}_0^{\{l\}})$, отнесем к первой

группе, с номерами $l = \overline{L^{[1]} + 1, L}$ — ко второй. Определим координаты центров двух групп $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_0^{\{1\}} \\ \tilde{\mathbf{y}}_0^{\{1\}} \end{pmatrix} = \frac{1}{L^{[1]}} \sum_{l=1}^{L^{[1]}} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_0^{\{l\}} \\ \tilde{\mathbf{y}}_0^{\{l\}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_0^{\{2\}} \\ \tilde{\mathbf{y}}_0^{\{2\}} \end{pmatrix} = \frac{1}{L - L^{[1]}} \sum_{l=L^{[1]}+1}^L \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_0^{\{l\}} \\ \tilde{\mathbf{y}}_0^{\{l\}} \end{pmatrix}$, пересчитав их в исходную систему координат с помощью обратного по отношению к (3) преобразования, получим $\tilde{\mathbf{x}}_0^{[u]}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^{[u]}$, $u = 1, 2$.

Рис. 3 поясняет процедуру оценивания координат вплоть до этого этапа (без операций, связанных с получением $\tilde{\mathbf{x}}_0^{[u]}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^{[u]}$, $u = 1, 2$ из $\tilde{\mathbf{x}}_0^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$). Отметим, что предварительные оценки координат двух точек можно получить и аналитически без учета погрешностей измерений и Δc . Но такой подход представляется менее надежным.

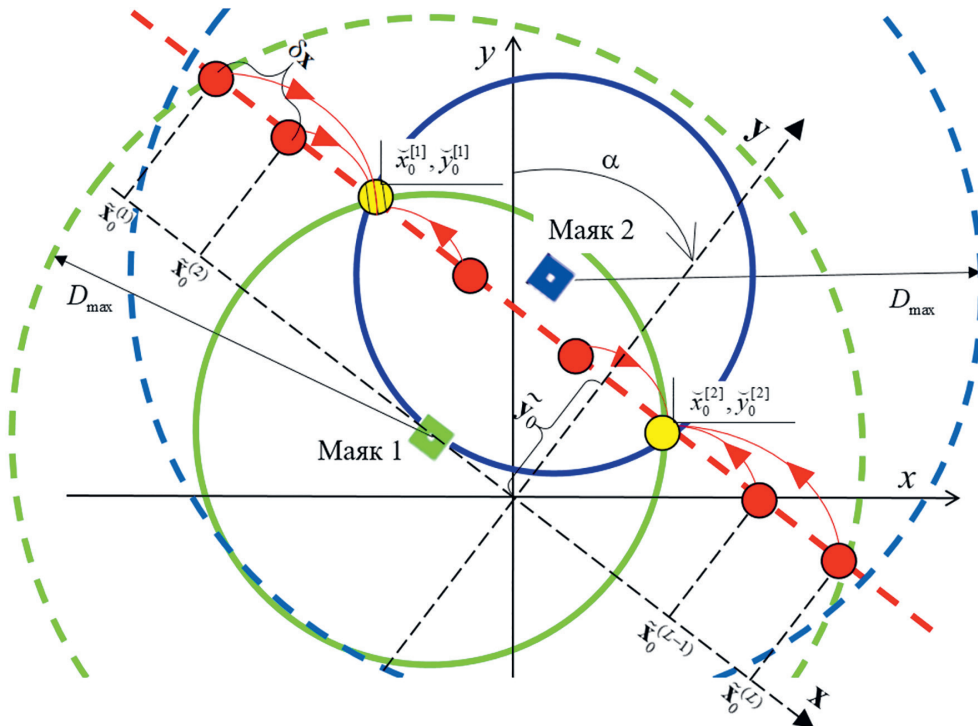


Рис. 3

Из вектора измерений Y_0 , где дальности линейаризуются в точках $\tilde{\mathbf{x}}_0^{[u]}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^{[u]}$, $u = 1, 2$, определяются оценки трехмерного вектора $\chi = (x_0, y_0, \Delta c)^T$ и ковариационные матрицы их погрешностей $\hat{\chi}^{[u]}$, $P_{\chi}^{[u]}$, $u = 1, 2$. В роли априорных оценок здесь выступают $\tilde{\chi}^{[u]}(\tilde{\mathbf{x}}_0^{[u]}, \tilde{\mathbf{y}}_0^{[u]}, 0)^T$. Обратная ко-

вариационная матрица $\tilde{P}_\chi^{-1}$ погрешностей оценок $\tilde{\chi}^{[u]}$ для обеих u имеет единственный ненулевой элемент $1/\sigma_{\Delta c}^2$ внизу диагонали. Отметим, что ковариационные матрицы $P_\chi^{[u]}$ передают взаимную корреляцию между неопениваемой в данном случае Δc и погрешностями оценивания x_0, y_0 .

Для дальнейшего решения формируются две оценки вектора состояния $\hat{\chi}_0^{[u]} = (\hat{\chi}_0^{[u]T}, 0, 0, 0)^T$ и блочно-диагональные ковариационные матрицы их погрешностей $P_0^{[u]}$, $u = 1, 2$ с диагональ-

ными блоками $\hat{\chi}_0^{[u]}$ и
$$\begin{bmatrix} \sigma_{\Delta K}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\Delta U}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\Delta U}^2 \end{bmatrix}.$$

Не вдаваясь в детали, отметим, что при $n_0 \geq 3$ и $\text{rank}(q^1 \dots q^{n_0}) = 2$, где $q^i = (x_0^i, y_0^i, 1)^T$, для получения $\tilde{y}_0$ используется вектор измерений, составленных по аналогии с (4). При $n_0 \geq 3$ и $\text{rank}(q^1 \dots q^{n_0}) = 3$ возможно благоприятное и неблагоприятное для точности определения координат АНПА расположение маяков. Во второй ситуации маяки находятся примерно на одной линии. Если большая полуось расчетного эллипса погрешностей превышает заданный порог, то, как и в рассмотренном ранее случае $n_0 = 2$, учитываются две гипотезы $u = 1, 2$ о возможном положении АНПА. В противном случае рассматривается единственная гипотеза $u = 1$.

Описание алгоритма после запуска решения. Для обработки измерений, поступивших после запуска решения $Y_1, \dots, Y_i$ и сохраненных до запуска $Y_{-N}, \dots, Y_{-1}$, применяются один или два — в зависимости от числа гипотез u — обобщенных ФК, которые оценивают расширенный вектор состояния

$$\mathbb{X}_{s,i} = (x_s, y_s, \Delta K_s, \Delta U_s^x, \Delta U_s^y, X_i^T)^T, \quad (5)$$

где s — момент до запуска решения, последовательно изменяющийся от -1 до $-N$, i — текущий момент времени. Увеличение i происходит каждый раз, когда s достигает $-\Delta N_0$ в случае $i = 0$ или разность $N - \Delta N_0$ становится кратной ΔN в случае $i \geq 1$. Значения $\Delta N_0 \geq 0$ и $\Delta N > \max(1, \Delta N_0)$ задаются исходя из возможностей бортового вычислителя и с учетом того, что обработка Y_0 (при запуске решения) требует больше затрат, чем обработка других измерений.

Для пояснения предложенного алгоритма на рис. 4 приведена схема преобразований гауссовских аппроксимаций апостериорных плотностей $\mathbf{f}$ (вектор состояния|измерения) в случае $0 < \Delta N_0 < N$. Эти преобразования отражают работу ФК для одной из гипотез u . В общем случае преобразования в выделенном блоке прерываются там, где индекс s в обозначении $\mathbb{X}_{s,i}$ достигает $-N$. Первый столбец преобразований в выделенном блоке задействован только при $\Delta N_0 > 0$, второй и последующий столбцы — только при $\Delta N_0 < N$. Сам выделенный блок актуален при условии $N > 0$.

По мере уменьшения s до $-N$ ФК для данной гипотезы u вырабатывает оценки расширенного вектора состояния $\hat{\mathbb{X}}_{s,i}^{[u]}$ и ковариационные матрицы их погрешностей $\mathbb{P}_{s,i}^{[u]}$. Начальные значения — $\hat{\mathbb{X}}_{0,0}^{[u]}$, $\mathbb{P}_{0,0}^{[u]}$ — формируются на основе $\hat{X}_0^{[u]}$, $P_0^{[u]}$, полученных при запуске решения.

При обновлении s и неизменном значении i исходя из $\hat{\mathbb{X}}_{s,i}^{[u]}$, $\mathbb{P}_{s+1,i}^{[u]}$, выполняется прогноз первых пяти компонент $\mathbb{X}_{s,i}$ для моментов времени, предшествующих первому навигационному решению (в обратном времени), — $x_s, y_s, \Delta K_s, \Delta U_s^x, \Delta U_s^y$ — и оценивание всего $\mathbb{X}_{s,i}$ по измерению Y_s . При одновременном обновлении s и i исходя из $\hat{\mathbb{X}}_{s+1,i}^{[u]}$, $\mathbb{P}_{s+1,i}^{[u]}$, выполняется прогноз всего вектора состояния $\mathbb{X}_{s,i}$ и его оценивание по измерениям Y_s и Y_i . Для прогноза координат x_i, y_i , $i \geq 1$ используются уравнения (2), а для прогноза x_s, y_s , $s \leq -1$:

$$\begin{aligned} x_s &= x_{s+1} - (\tilde{V}_{s+1}^y \Delta K_{s+1} + \tilde{V}_{s+1}^x + \tilde{U}_{s+1}^x + \Delta U_{s+1}^x) \Delta t_{s+1} + w_{s+1}^x, \\ y_s &= y_{s+1} - (-\tilde{V}_{s+1}^x \Delta K_{s+1} + \tilde{V}_{s+1}^y + \tilde{U}_{s+1}^y + \Delta U_{s+1}^y) \Delta t_{s+1} + w_{s+1}^y, \end{aligned}$$

Учитывая стационарный характер $\Delta K, \Delta U^x, \Delta U^y$ прогноз $\Delta K_s, \Delta U_s^x, \Delta U_s^y$ в обратном времени выполняется по тем же уравнениям, которые применяются для прогноза $\Delta K_i, \Delta U_i^x, \Delta U_i^y$ в прямом времени, с тем отличием, что в правой части уравнений для $\Delta K_s, \Delta U_s^x, \Delta U_s^y$ присутствует индекс $s + 1$.

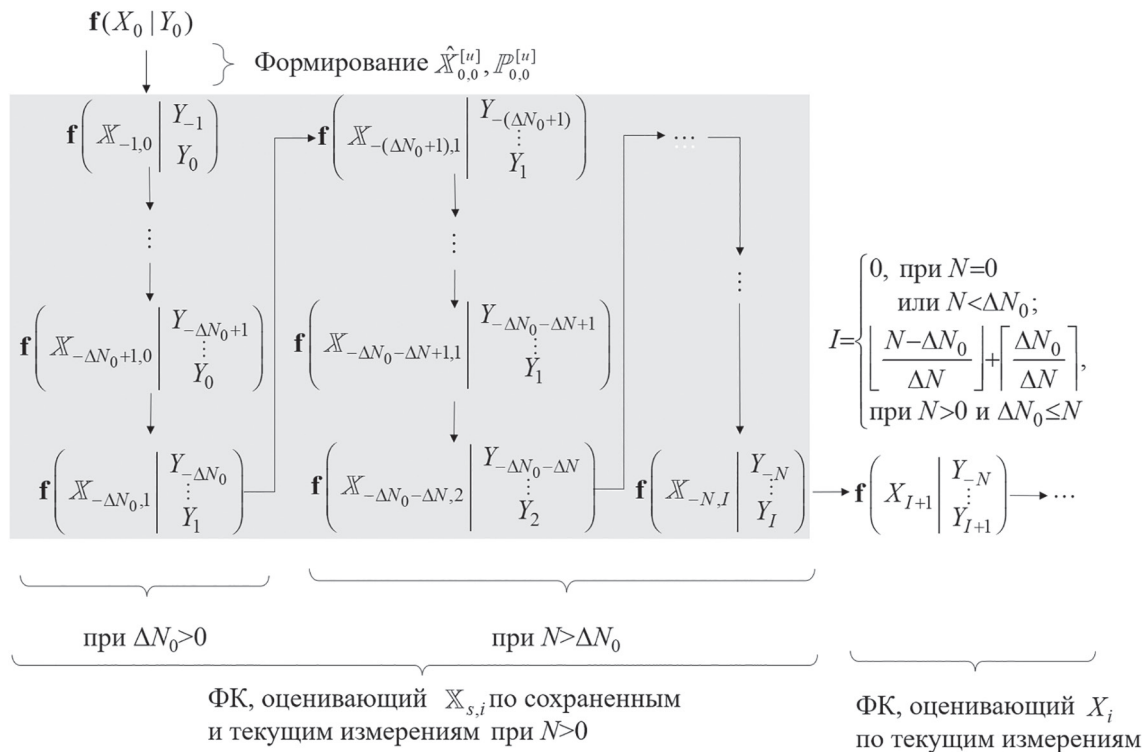


Рис. 4

По достижении s значения $-N$, т. е. после завершения обработки всех сохраненных измерений, расширенный вектор состояния $\mathbb{X}_{-N,I}$ заменяется исходным X_I . Далее ФК для данного i прогнозирует и оценивает X_i по текущим измерениям Y_i . Если $N = 0$, то такой ФК вступает в действие сразу после получения $\hat{X}_0^{[u]}$, $P_0^{[u]}$.

Представленный способ учета сохраненных до запуска решений измерений не является единственно возможным. В [16, 17] рассмотрен алгоритм обработки сохраненных измерений на основе известной процедуры сглаживания в фиксированной точке [15]. Здесь текущие измерения обрабатываются после обработки всех сохраненных измерений, что при их значительном количестве может вызвать задержку, т. е. помешать своевременной обработке текущих измерений. Другой вариант учета сохраненных измерений, рассмотренный в [18], предполагает их обработку (в обратном времени) и текущих измерений (в прямом времени) двумя ФК. Результаты работы двух фильтров комплексуются на основе метода фиктивных измерений [20]. Достоинством такого алгоритма является возможность повышения скорости расчетов за счет применения технологии параллельных вычислений. Но этот алгоритм несколько сложнее для программирования, по сравнению с предложенным.

Выбор однозначного решения. Из двух гипотез $u = 1, 2$ о возможном местоположении АНПА истинной считается та u^* , апостериорная вероятность которой превышает апостериорную вероятность альтернативной гипотезы в заданное число раз $\delta \bar{p}^{\max/\min} \gg 1$. Под апостериорной понимается условная по отношению к вектору $\mathbf{Y}_i$, включающему измерения $Y_{-m(i)}, \dots, Y_i$, где $m(i) = \min(\Delta N_0 + (i-1)\Delta N, N)$, вероятность $\mathbf{p}(u|\mathbf{Y}_i)$. Таким образом,

$$u^* = \begin{cases} 1, & \text{при } \delta p_i^{1/2} \geq \delta \bar{p}^{\max/\min}, \\ 2, & \text{при } \delta p_i^{1/2} \geq 1/\delta \bar{p}^{\max/\min}, \\ \text{не определена,} & \text{при } 1/\delta \bar{p}^{\max/\min} < \delta p_i^{1/2} < \delta \bar{p}^{\max/\min}, \end{cases} \quad (6)$$

где $\delta p_i^{1/2} = \mathbf{p}(u=1|\mathbf{Y}_i)/\mathbf{p}(u=2|\mathbf{Y}_i)$. Отношение $\delta p_i^{1/2}$ апостериорных вероятностей гипотез $u = 1, 2$ определяется в предположении об априорной равной вероятности рассматриваемых гипотез $\mathbf{p}(u=1) = \mathbf{p}(u=2)$. С учетом гауссовости случайных величин, участвующих в задаче, это отно-

шение имеет вид $\delta p_i^{1/2} = \sqrt{B_i^{[2]}/B_i^{[1]}} \exp[(A_i^{[2]} - A_i^{[1]})/2]$, где $A_i^{[u]}$, $B_i^{[u]}$, $u = 1, 2$ рассчитываются по невязкам измерений, которые обрабатываются ФК, и ковариационным матрицам невязок.

Если u^* определена, ФК для этой гипотезы продолжает работу, а ФК для альтернативной гипотезы больше не используется. Если u^* не определена, но точки местоположения АНПА для двух гипотез оказываются ниже установленного порога $\bar{r}$, т. е. $(\hat{x}_i^{[1]} - \hat{x}_i^{[2]})^2 + (\hat{y}_i^{[1]} - \hat{y}_i^{[2]})^2 < \bar{r}^2$, формируется средневзвешенная оценка вектора состояния $\mathbf{X}_{-m(i),i}$ при $m(i) < N$ или X_i при $N \leq m(i)$ и соответствующая ковариационная матрица $\mathbf{P}_{-m(i),i}$ или P_i . При этом в качестве весовых коэффициентов выступают апостериорные вероятности гипотез $\mathbf{p}(u=1|\mathbf{Y}_i) = \delta p_i^{1/2}/(1 + \delta p_i^{1/2})$, $\mathbf{p}(u=2|\mathbf{Y}_i) = 1/(1 + \delta p_i^{1/2})$. Для последующих i в этом случае применяется единственный ФК.

Результаты моделирования. С целью подтверждения эффективности представленного алгоритма выполнено его моделирование для движения АНПА со скоростью 5 м/с вблизи двух маяков (рис. 5, а, радиусы окружностей равны горизонтальным дальностям до маяков в момент запуска решения). Моделирование проведено с использованием 1500 реализаций случайных погрешностей гидроакустических измерений дальности, показаний курса и лага, а также погрешностей знания скорости течения. Параметры погрешностей: $\sigma_\delta = 5$ м, $\sigma_v = 10$ м, $\sigma_{\Delta c} = 3$ м/с, $\sigma_{\Delta V} = 0,1$ м/с, $\sigma_{\Delta K} = 5^\circ$, $\sigma_{\Delta U} = 0,25$ м/с, $\tau_{\Delta U} = \tau_{\Delta K} = 3600$ с. Дискретность поступления измерений $\Delta t_i = 1$ с. Дальность, на которой от маяков фактически поступают измерения, принята равной 1 км. До запуска алгоритма измерения от одного наблюдаемого маяка сохранялись на протяжении 360 с, т. е. $N = 360$. Остальные параметры алгоритма: $D_{\max} = 1,5$ км, $\delta \bar{x} = 300$ м, $\Delta N_0 = 0$, $\Delta N = 10$, $\delta \bar{p}_{\max/\min} = 10^4$.

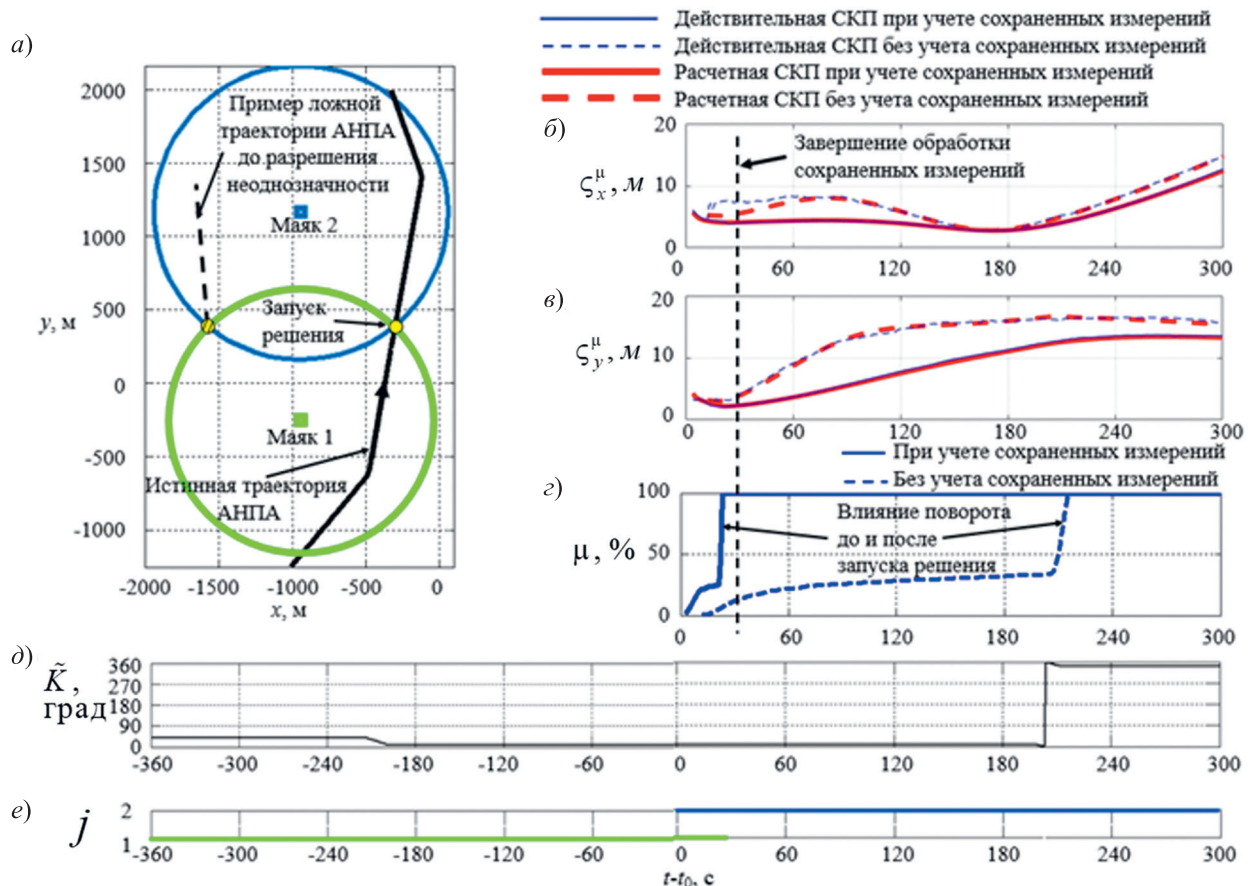


Рис. 5

Результаты моделирования алгоритма приведены на рис. 5, б–г. На рис. 5, б и в показаны действительные (полученные по реализациям погрешностей оценок) и расчетные (вычисленные из вырабатываемых ФК ковариационных матриц) ζ_x^μ и ζ_y^μ среднеквадратические погрешности

(СКП) [21] оценок координат, полученных с помощью предложенного алгоритма с учетом и без учета сохраненных до запуска решения измерений. Эти СКП только для однозначных решений, т. е. для той части решений, в которых на данный момент времени из двух гипотез $u = 1, 2$ о возможном местоположении АНПА с помощью (6) была выбрана верная гипотеза. По этой причине графики СКП начинаются не с $i = 0$, когда число однозначных решений мало. На рис. 5, *г* показана доля однозначных решений (μ) из всех 1500 промоделированных. На рис. 5, *д* и *е* приведены график курса АНПА и диаграмма использованных маяков. На рис. 5, *а* помимо истинной траектории показан пример траектории для ложной гипотезы о местоположении АНПА, рассматриваемой до разрешения неоднозначности.

Из рис. 5, *б* и *в* видно, что расчетная СКП близка к действительной. В процессе моделирования не было выбрано ложной гипотезы о местоположении АНПА. Из рис. 5, *г* и *д* видно, что разрешению неоднозначности способствуют развороты АНПА. В частности, разворот до запуска решения позволил резко увеличить число однозначных решений при учете в алгоритме сохраненных измерений. Таким образом, обработка сохраненных измерений позволяет повысить долю однозначных решений. Если сравнивать СКП координат среди однозначных решений, то и здесь алгоритм с учетом сохраненных измерений имеет преимущество. С течением времени это преимущество снижается, но остается заметным.

Заметим, что при прямолинейном движении АНПА доля однозначных решений зависит от угла между направлением АНПА и линией маяков. В данном случае этот угол составляет 10° . При движении АНПА вдоль линии маяков неоднозначность не разрешается, при движении в поперечном к линии маяков направлении разрешение неоднозначности происходит максимально быстро.

Вместе с тем установлено, что найденная с помощью предложенного алгоритма СКП координат однозначных решений практически не отличается от СКП алгоритма, в котором до этапа обработки текущих измерений $Y_1, Y_2, \dots$ обрабатываются все сохраненные измерения $Y_{-1}, \dots, Y_{-N}$ с помощью процедуры сглаживания в фиксированной точке [16, 17]. Также не выявлено каких-либо существенных различий в результатах предложенного алгоритма и алгоритма, применяющего два ФК для раздельной обработки текущих и сохраненных измерений, а их комплексирование выполняется методом фиктивных измерений [18, 20].

Результаты обработки натуральных данных. При проведении натуральных испытаний был использован катер с приемником спутниковых навигационных систем (СНС) и буксируемый подводный аппарат с гидроакустической системой, имитирующий АНПА. Для примера в статье рассмотрена ситуация (рис. 6, *а*) с участием измерений от двух маяков, когда сначала имеются измерения только от маяка 1. Как и при моделировании, рассматривались решения с учетом сохраненных измерений и без учета. В отличие от моделирования, в натурном эксперименте аппарат не совершал разворотов на большие углы, но небольшие изменения курса имели место. Путевая скорость аппарата составляла около 4 м/с. Эталонные координаты буксируемого аппарата рассчитаны на основе координат от СНС-приемника и известной длины кабель-троса. Для счисления использованы скорости от СНС-приемника, поэтому погрешности курса и течений отсутствуют и в задаче не оцениваются. Эксперимент проводился при $N = 97$. Прочие параметры алгоритма — $D_{\max} = 1,5$ км, $\delta\bar{x} = 300$ м, $\Delta N_0 = 0$, $\Delta N = 10$, $\delta\bar{r}^{\max/\min} = 10^4$, $\sigma_\delta = 5$ м, $\sigma_v = 10$ м, $\sigma_{\Delta c} = 3$ м/с, $\sigma_{\Delta V} = 0,1$ м/с — те же, что при моделировании.

Из графиков погрешностей оценок координат Δ_x и Δ_y , представленных на рис. 6, *б* и *в*, видно, что при учете сохраненных измерений неоднозначность устраняется через 4 с после запуска решения, а без учета — через 16 с. Это объясняется тем, что после запуска решения аппарат двигался практически прямолинейно, тогда как непосредственно перед запуском — с рысканьем, особенно на 10-й секунде до запуска (см. график курса на рис. 6, *г*). Погрешности однозначных решений с учетом и без учета сохраненных измерений различаются незначительно. Расчетная СКП предложенного алгоритма, как и при моделировании, адекватно передает реальный уровень погрешности. Обращаем внимание, что угол между направлением траектории АНПА и линией маяков в натурном эксперименте составляет 35° , это больше, чем при моделировании. Это способствовало более быстрому получению однозначного решения.

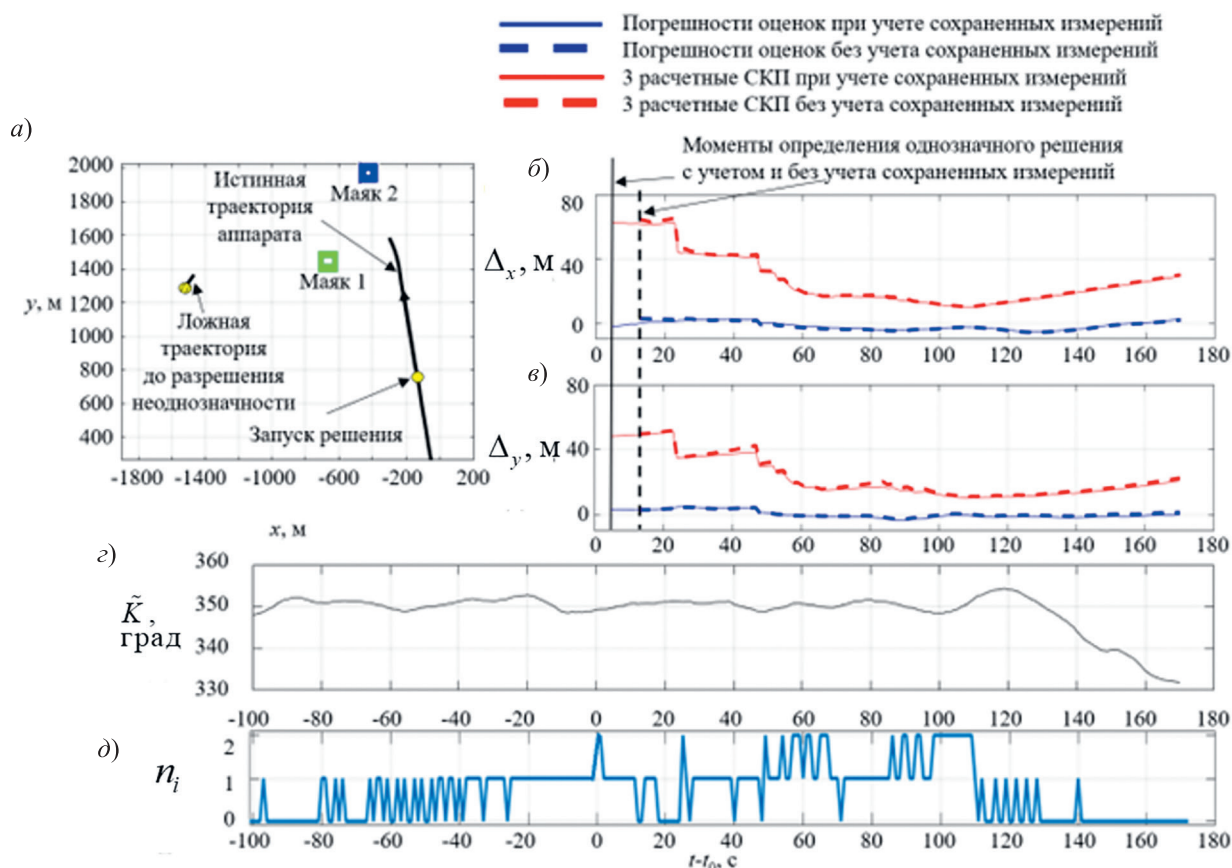


Рис. 6

Оценка быстродействия. Проведено сравнение времени выполнения предложенного алгоритма и других алгоритмов, также предусматривающих постепенную обработку сохраненных измерений, на одном нена начальном шаге их работы, т. е. $i > 0$. Предполагалось, что $n_s = 1$ для всех $s < 0$, а для текущего момента $n_i = 2$. Вычисления, связанные с определением отношения апостериорных вероятностей гипотез $\delta p_i^{1/2}$, в данном сравнении не учитывались.

Для сравнения взят уже упомянутый алгоритм с двумя ФК, обрабатывающими текущие (в прямом времени) и сохраненные (в обратном времени) измерения, и комплексирующий результаты двух фильтров с помощью метода фиктивных измерений [18, 20]. Также в сравнении участвовал аналогичный алгоритм, в котором обработка сохраненных измерений выполняется не с помощью ФК, а путем сглаживания в фиксированной точке (СФТ) [15]. Рассмотрены варианты, когда два ФК или СФТ и ФК задействованы поочередно — обозначим эти алгоритмы как $\overleftarrow{\text{ФК}} + \overrightarrow{\text{ФК}}$, $\overleftarrow{\text{СФТ}} + \overrightarrow{\text{ФК}}$, и когда они реализуются параллельно — $\overleftarrow{\text{ФК}} \parallel \overrightarrow{\text{ФК}}$, $\overleftarrow{\text{СФТ}} \parallel \overrightarrow{\text{ФК}}$. Быстродействие алгоритмов оценивалось при разном числе сохраненных измерений, обрабатываемых за один шаг алгоритма.

В таблице приведено отношение времени выполнения указанных алгоритмов и предложенного алгоритма $\overleftarrow{\text{ФК}}$. Следует иметь в виду, что время выполнения алгоритмов зависит от вычислительной техники и среды программирования. При другой размерности вектора состояния оценки быстродействия также могут измениться. Поэтому приведенные данные нельзя распространять на „бортовые“ версии алгоритмов. Но они дают примерное представление о сравнительном быстродействии алгоритмов.

В целом можно сказать, что быстродействие рассмотренных алгоритмов кардинально не различается. Предложенный алгоритм обладает определенными преимуществами перед альтернативными алгоритмами, которые реализуются без применения параллельных вычислений. У $\overleftarrow{\text{ФК}} + \overrightarrow{\text{ФК}}$ он выигрывает 30–60 % для разных ΔN , а у $\overleftarrow{\text{СФТ}} + \overrightarrow{\text{ФК}}$ — 30–50 %, но только для

$\Delta N = 1-3$. Алгоритмы $\overleftarrow{\Phi K} \parallel \overrightarrow{\Phi K}$, $\overleftarrow{СФТ} \parallel \overrightarrow{\Phi K}$, реализуемые с применением технологии параллельных вычислений, имеют преимущество в быстройдействии в пределах 50 % перед предложенным алгоритмом, но лишь при небольших ΔN .

Отношение времени выполнения алгоритмов	ΔN						
	1	2	3	5	10	30	100
$(\overleftarrow{\Phi K} + \overrightarrow{\Phi K}) / \overrightarrow{\Phi K}, \%$	157	145	138	130	131	134	133
$(\overleftarrow{\Phi K} \parallel \overrightarrow{\Phi K}) / \overrightarrow{\Phi K}, \%$	69	82	85	92	107	124	130
$(\overleftarrow{СФТ} + \overrightarrow{\Phi K}) / \overrightarrow{\Phi K}, \%$	153	136	131	116	107	98	97
$(\overleftarrow{СФТ} \parallel \overrightarrow{\Phi K}) / \overrightarrow{\Phi K}, \%$	56	68	76	76	81	88	93

В завершение отметим, что время, затрачиваемое на запуск решения в момент $i = 0$ при $n_0 = 2$, $L = 12$ и применении пяти итераций для получения $\tilde{\mathbf{x}}_0^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^{(l)}$ из $\tilde{\mathbf{x}}_0$, $\tilde{\mathbf{y}}_0$ для каждого $l = \overline{1, L}$, оказывается меньше времени выполнения рассмотренных алгоритмов на неначальном шаге с $\Delta N = 100$, но сопоставимо с ним, если вычислять $\tilde{\mathbf{x}}_0^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^{(l)}$ поочередно. В случае параллельного вычисления $\tilde{\mathbf{x}}_0^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^{(l)}$ это время существенно сокращается. Время, которое требуется для вычисления отношения апостериорных вероятностей гипотез $\delta p_i^{1/2}$, кратно меньше общего времени выполнения алгоритмов в случае $\Delta N = 1$.

Заключение. Разработан пригодный для реализации в режиме реального времени рекуррентный алгоритм решения задачи определения координат движущегося АНПА с использованием измерений дальностей до гидроакустических маяков, относительного лага и курсоуказателя, который не требует знания априорных координат АНПА и определенного количества одновременно используемых маяков, за исключением момента запуска. Для запуска алгоритма достаточно одномоментных измерений от двух маяков. Текущие и сохраненные до запуска алгоритма измерения обрабатываются с помощью единого обобщенного ФК. При этом реализация сохраненных измерений обрабатывается постепенно в обратном времени. Количество сохраненных измерений, которые обрабатываются в интервале между моментами поступления текущих измерений, зависит от возможностей вычислителя. Алгоритм предусматривает разрешение неоднозначности между двумя гипотезами о местоположении АНПА с применением для каждой из них своего ФК и вычислением отношения апостериорных вероятностей гипотез. Предложенный алгоритм апробирован при моделировании множества случайных реализаций погрешностей измерений и при камеральной обработке натурных данных. Показано преимущество предложенного алгоритма с точки зрения времени получения однозначного решения и точности определения координат по сравнению с алгоритмом, не использующим сохраненные измерения. Установлено преимущество предложенного алгоритма перед другими алгоритмами, не использующими параллельные вычисления, в быстройдействии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Paull L., Saeedi S., Seto M., Li H. AUV Navigation and Localization: A Review // IEEE Journal of Oceanic Engineering. 2014. Vol. 39, N 1. P. 131–149. DOI 10.1109/JOE.2013.2278891.
2. Кеббал К. Г., Машошин А. И. Гидроакустические методы позиционирования автономных необитаемых подводных аппаратов // Гирокоспия и навигация. 2016. № 3. С. 115–130. DOI 10.17285/0869-7035.2016.24.3.115-130.
3. Матвиенко Ю. В., Инзарцев А. В., Киселев Л. В., Щербатюк А. Ф. Перспективы повышения эффективности автономных подводных роботов // Изв. ЮФУ. Технические науки. 2016. № 1(174). С. 123–141.
4. Степанов О. А. Методы обработки навигационной измерительной информации. СПб: Университет ИТМО, 2017. 196 с.
5. Sigiel N. Methods of autonomous underwater vehicles positioning // Scientific Journal of Polish Naval Academy. 2019. Vol. 1. P. 31–43. DOI 10.2478/sjpna-2019-0003.

6. González-García J., Gómez-Espinosa A., Cuan-Urquiza E., García-Valdovinos L. G., Salgado-Jiménez T., and Cabello J. A. E. Autonomous Underwater Vehicles: Localization, Navigation, and Communication for Collaborative Missions // *Applied science*. 2020. Vol. 10, N 4. P. 1256. DOI 10.3390/app10041256.
7. Кошаев Д. А. Многоальтернативный алгоритм однопаяковой навигации автономного необитаемого подводного аппарата без априорных данных о его местоположении. Ч. 1. Математическое описание // *Гироскопия и навигация*. 2020. Т. 28, № 2(109). С. 109–130. DOI 10.17285/0869-7035.0035.
8. Щербатюк Д. А. Алгоритм навигационного обеспечения работы группы АНПА на основе фильтра частиц и разностно-дальномерной гидроакустической системы // *Подводные исследования и робототехника*. 2021. № 4(38). С. 50–57. DOI: 10.37102/1992-4429_2021_38_04_05.
9. Кошаев Д. А. Относительное позиционирование и определение ориентации автономного необитаемого подводного аппарата по данным от гидроакустических маяков // *Гироскопия и навигация*. 2022. № 4. С. 122–141. DOI 10.17285/0869-7035.00107.
10. Машошин А. И., Пашкевич И. В. Алгоритмы позиционирования автономного необитаемого подводного аппарата в процессе приведения и причаливания к подводному причальному устройству // *Гироскопия и навигация*. 2023. Т. 31, № 1(120). С. 103–119.
11. Грузликов А. М., Караулов В. Г., Мухин Д. А., Шалаев Н. А. Результаты апробации алгоритма позиционирования и определения ориентации подводного аппарата по данным от гидроакустических маяков // *Изв. ЮФУ. Технические науки*. 2023. № 1. С. 265–274. DOI 10.18522/2311-3103-2023-1-265-274.
12. Пашкевич И. В., Мартынова Л. А. Метод уменьшения погрешности определения местоположения АНПА при посадке на подводное причальное устройство // *Сб. матер. XVIII Всерос. науч.-практ. конф. „Перспективные системы и задачи управления“*. 2023. С. 334–343.
13. Дмитриев В. И., Рассукованый Л. С. Навигация и лоция, навигационная гидрометеорология, электронная картография. М.: Моркнига, 2016. 457 с.
14. Богомолов В. В. Анализ эффективности нелинейных решений задачи навигации подводных аппаратов // *Матер. XXIII конф. молодых ученых с международным участием*. СПб, 2021. С. 223–227.
15. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1977. 440 с.
16. Богомолов В. В. Оценка эффективности нелинейных навигационных решений по разномоментным измерениям дальности до гидроакустических маяков // *Матер. XXIV конф. молодых ученых с международным участием*. СПб, 2022. С. 120–123.
17. Богомолов В. В., Кошаев Д. А. Алгоритм позиционирования подводного аппарата по измерениям дальности до маяков при их недостаточном для одномоментного навигационного решения количестве // *Матер. XXXIII конф. памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова*. СПб, 2022. С. 66–69.
18. Богомолов В. В. Позиционирование автономного необитаемого подводного аппарата с одновременной обработкой текущих и сохраненных измерений дальностей от менее чем трех гидроакустических маяков // *Подводные исследования и робототехника*. 2024. № 2(48). С. 58–67. DOI: 10.37102/1992-4429_2024_48_02_07. EDN: TGEGR.
19. Bogomolov V. AUV Positioning By The Ranges to Less than Three Acoustic Beacons Based on Recursive Bayesian Estimation // *Proc. of the 2023 Intern. Conf. on Ocean Studies (ICOS)*. Vladivostok, Russian Federation, 2023. P. 037–040. DOI 10.1109/ICOS60708.2023.10425637.
20. Кошаев Д. А. Метод фиктивных измерений для многоальтернативного оценивания процессов в линейной стохастической системе // *Автоматика и телемеханика*. 2016. № 6. С. 81–108. DOI 10.1134/S0005117916060060.
21. Степанов О. А., Исаев А. М. Методика сравнительного анализа рекуррентных алгоритмов нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации на основе предсказательного моделирования // *Гироскопия и навигация*. 2023. Т. 31, № 3(122). С. 48–65.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Дмитрий Анатольевич Кошаев

— докт. техн. наук; ЦНИИ „Электроприбор“; вед. науч. сотр.;
E-mail: dkoshaev@yandex.ru

Владимир Валентинович Богомолов

— ЦНИИ „Электроприбор“; начальник сектора;
E-mail: bogomolov.v.v@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.07.24; одобрена после рецензирования 03.09.24; принята к публикации 22.10.24.

REFERENCES

1. Paull L., Saeedi S., Seto M., Li H. *AUV Navigation and Localization: A Review*, *IEEE Journal of oceanic engineering*, 2014, vol. 39, no. 1, pp. 131–149, DOI 10.1109/JOE.2013.2278891.
2. Kebkal K.G., Mashoshin A.I. *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2016, no. 3, pp. 115–130, DOI 10.17285/0869-7035.2016.24.3.115-130.
3. Matvienko Yu.V., Inzartsev A.V., Kiselev L.V., Shcherbatyuk A.F. *Izvestiya SFEDU. Engineering Sciences*, 2016, no. 1(174), pp. 123–141. (in Russ.)
4. Stepanov O.A. *Metody obrabotki navigatsionnoy izmeritel'noy informatsii* (Methods of Processing Navigational Measurement Information), St. Petersburg, 2017, 196 p.
5. Sigiel N. *Scientific Journal of Polish Naval Academy*, 2019, vol. 1, pp. 31–43, DOI 10.2478/sjpna-2019-0003.
6. González-García J., Gómez-Espinosa A., Cuan-Urquiza E., García-Valdovinos L.G., Salgado-Jiménez T. and Cabello J.A.E. *Applied Science*, 2020, no. 4(10), pp. 1256, DOI 10.3390/app10041256.
7. Koshaev D.A. *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2020, no. 2(28), pp. 109–130. (in Russ.)
8. Shcherbatyuk D.A. *Underwater Investigations and Robotics*, 2021, no. 4(38), pp. 50–57, DOI: 10.37102/1992-4429_2021_38_04_05. (in Russ.)
9. Koshaev D.A. *Gyroscopy and Navigation*, 2022, no. 4(13), pp. 262–275.
10. Mashoshin A.I., Pashkevich I.V. *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2023, no. 1(31), pp. 103–119. (in Russ.)
11. Gruzlikov A.M., Karaulov V.G., Mukhin D.A., Shalaev N.A. *Izvestiya SFEDU. Engineering Sciences*, 2023, no. 1, pp. 265–274, DOI 10.18522/2311-3103-2023-1-265-274.
12. Pashkevich I.V., Martynova L.A. *Perspektivnyye sistemy i zadachi upravleniya* (Advanced Systems and Control Problems), Collection of Materials of the XVIII All-Russian Scientific and Practical Conference, 2023, pp. 334–343. (in Russ.)
13. Dmitriev V.I., Rassukovany L.S. *Navigatsiya i lotsiya, navigatsionnaya gidrometeorologiya, elektronnyaya kartografiya* (Navigation and Pilotage, Navigational Hydrometeorology, Electronic Cartography), Moscow, 2016, 457 p. (in Russ.)
14. Bogomolov V.V. *Materialy XXIV konferentsii molodykh uchenykh s mezhdunarodnym uchastiyem* (Proc. of the XXIV Conf. of Young Scientists with International Participation), St. Petersburg, 2021, pp. 223–227. (in Russ.)
15. Meditch J.S. *Stochastic optimal linear estimation and control*, NY, Mc. Graw Hill., 1969, 394 p.
16. Bogomolov V.V. *Materialy XXIV konferentsii molodykh uchenykh s mezhdunarodnym uchastiyem* (Proc. of the XXIV Conf. of Young Scientists with International Participation), St. Petersburg, 2022, pp. 120–123. (in Russ.)
17. Bogomolov V.V., Koshaev D.A. *Materialy XXXIII konferentsii pamyati vydayushchegosya konstruktora giroskopicheskikh priborov N.N. Ostryakova* (Proc. of the XXXIII Conf. in Memory of the Outstanding Designer of Gyroscopic Devices N.N. Ostryakov), St. Petersburg, 2022, pp. 66–69. (in Russ.)
18. Bogomolov V.V. *Underwater Investigations and Robotics*, 2024, no. 2(48), pp. 58–67, DOI: 10.37102/1992-4429_2024_48_02_07. (in Russ.)
19. Bogomolov V. *Proc. of the 2023 International Conference on Ocean Studies (ICOS)*, Vladivostok, 2023, pp. 037–040, DOI 10.1109/ICOS60708.2023.10425637.
20. Koshaev D.A. *Automation and Remote Control*, 2016, no. 6(77), pp. 1009–1030.
21. Stepanov O.A., Isaev A.M. *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2023, no. 3(31), pp. 48–65. (in Russ.)

DATA ON AUTHORS

Dmitry A. Koshaev— Dr. Sci.; Concern CSRI Elektropribor, JSC; Leading Researcher;
E-mail: dkoshaev@yandex.ru**Vladimir V. Bogomolov**— Concern CSRI Elektropribor, JSC; Head of a Sector; ITMO University;
E-mail: bogomolov.v.v@yandex.ru

Received 10.07.24; approved after reviewing 03.09.24; accepted for publication 22.10.24.