

**ОСОБЕННОСТИ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА
ДИНАМИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ РЕГРЕССОРА И СМЕШИВАНИЯ
С ЖЕЛАЕМЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ КАЧЕСТВА ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ**

Н. В. Михальков*, А. А. Пыркин

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

** mikh.nv@yandex.ru*

Аннотация. Проанализированы особенности работы метода динамического расширения регрессора и смешивания и его модификаций, применяемых в задачах оценивания параметров линейного регрессионного уравнения для систем с различными свойствами. Цели исследования заключаются в определении ключевых аспектов практического применения метода динамического расширения регрессора и смешивания, сравнении паттернов применения его модификаций и в выборе наиболее эффективных решений. С помощью численного моделирования сравниваются различные модификации оригинального алгоритма, направленные на преодоление следующих проблем: относительно большое количество настраиваемых параметров, слабое возбуждение регрессора, необходимость подбора коэффициентов градиентного спуска для обеспечения сходимости по каждому из параметров за сопоставимое время, а также наличие выбросов в оценке при кусочно-постоянно заданных параметрах. Показано, что использование схем расширения позволяет сократить количество настраиваемых параметров, добавление регуляризующей матрицы к расширенному регрессору обеспечивает оценку для случаев со слабым возбуждением, нормализация возбуждения регрессора обеспечивает согласование времени сходимости оценки при различной степени возбуждении регрессора, а против выбросов в оценке параметров в случае их кусочно-постоянного задания эффективен интервальный интегральный фильтр со сбрасыванием.

Ключевые слова: метод динамического расширения регрессора, идентификация параметров, линейная регрессия

Благодарности: статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № FSER-2025-0002.

Ссылка для цитирования: Михальков Н. В., Пыркин А. А. Особенности практического применения метода динамического расширения регрессора и смешивания с желаемыми показателями качества оценивания параметров // Изв. вузов. Приборостроение. 2025. Т. 68, № 1. С. 23–35. DOI: 10.17586/0021-3454-2025-68-1-23-35.

**FEATURES OF PRACTICAL APPLICATION OF THE METHOD OF REGRESSOR DYNAMIC EXPANSION
AND MIXING WITH DESIRED INDICATORS OF PARAMETERS ESTIMATION QUALITY**

N. V. Mikhalkov*, A. A. Pyrkin

ITMO University, St. Petersburg, Russia

** mikh.nv@yandex.ru*

Abstract. The features of the dynamic regressor expansion and mixing method and its modifications used in estimating the parameters of a linear regression equation for systems with different properties are analyzed. The objectives of the study are to identify key aspects of the practical application of the dynamic regressor expansion and mixing method, compare the patterns of application of its modifications, and select the most effective solutions. Numerical modeling is used to compare various modifications of the original algorithm aimed at overcoming the following problems: a relatively large number of adjustable parameters, weak excitation of the regressor, the need to select gradient descent coefficients to ensure convergence for each parameter in a comparable time, and the presence of outliers in the estimate for piecewise constant parameters. It is shown that the use of expansion schemes allows to reduce the number of adjustable parameters, adding a regularizing matrix to the expanded regressor provides an estimate for cases with weak excitation, normalization of the excitation of the regressor ensures the agreement of the convergence time of the estimate for different degrees of excitation of the regressor, and an interval integral filter with resetting is effective against outliers in the parameter estimate in the case of their piecewise constant assignment.

Keywords: dynamic regressor extension and mixing method, parameters identification, linear regression

Acknowledgments: The article was prepared with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project No. FSER-2025-0002.

For citation: Mikhalkov N. V., Pyrkin A. A. Features of practical application of the method of regressor dynamic expansion and mixing with desired indicators of parameters estimation quality. *Journal of Instrument Engineering*. 2025. Vol. 68, N 1. P. 23–35 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2025-68-1-23-35.

Введение. Решение задач оценивания неизвестных параметров является неотъемлемой частью многих современных систем управления и алгоритмов идентификации систем. Одни из наиболее изученных — задачи, представимые в виде линейных регрессионных уравнений. Методы их решения разнообразны, но большая часть из них накладывает требование реализуемости, формулируемое как условие постоянного возбуждения регрессора [1].

Одной из возможных альтернатив стандартным подходам к решению подобных задач (таких как градиентный алгоритм оценивания или метод наименьших квадратов [2]) является метод динамического расширения и смешивания регрессора (dynamic regressor extension and mixing, DREM) [3].

В рамках метода уравнение линейной регрессии декомпозируется к скалярным регрессионным уравнениям, за счет чего возможно регулирование скорости сходимости ошибки по каждому из параметров независимым образом. В то же время этот подход ослабляет требование постоянного возбуждения регрессора до требования конечного возбуждения регрессора [4].

Тем не менее разнообразие прикладных задач со своими особенностями приводит к необходимости адаптации стандартного варианта реализации метода с помощью модификаций, однако выбор конкретной модификации не всегда очевиден. Рассмотрению вопроса о выборе конкретной модификации для разных случаев и посвящена настоящая работа.

Метод динамического расширения и смешивания. Задача оценивания параметров в линейном регрессионном уравнении формулируется как:

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta} + \mathbf{v}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$ — измеримый сигнал с шумом измерения $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^l$, $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ — регрессор, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных параметров; $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ ограничены $\forall t > 0$. Без ограничения общности в настоящей работе рассматриваются уравнения при $l = 1$.

Первым шагом рассматриваемого метода является построение расширенного регрессора $\boldsymbol{\Phi}(t) \equiv \boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с помощью поочередного применения к регрессионному уравнению линейных устойчивых операторов $H_m[\cdot]: \mathcal{L}_\infty \rightarrow \mathcal{L}_\infty$, $m = 1, \dots, n$, в качестве которых можно использовать операторы задержки или линейно-инвариантные фильтры. В результате формируются n уравнений регрессии, объединяемых в матричное уравнение:

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}, \quad (2)$$

где $\mathbf{Y} := [H_1[y(t)], H_2[y(t)], \dots, H_n[y(t)]]^T$, $\boldsymbol{\Phi} := [H_1[\boldsymbol{\varphi}(t)], H_2[\boldsymbol{\varphi}(t)], \dots, H_n[\boldsymbol{\varphi}(t)]]^T$ — расширенный регрессор.

Умножив обе части уравнения (2) на союзную матрицу расширенного регрессора $\text{adj}(\boldsymbol{\Phi})$ и используя ее свойство:

$$\text{adj}(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{\Phi} = |\boldsymbol{\Phi}|\mathbf{I}_n, \quad (3)$$

получим новое регрессионное уравнение:

$$\mathbf{Y}_e = \Delta\boldsymbol{\theta} \Leftrightarrow y_{ei} = \Delta\theta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где $\Delta := |\boldsymbol{\Phi}|$, $\mathbf{Y}_e := \text{adj}(\boldsymbol{\Phi}) \cdot \mathbf{Y} = [y_{e1}, \dots, y_{el}]^T$. Для оценивания каждого элемента $\hat{\theta}_i$ вектора параметров исходной регрессии из полученных n скалярных регрессионных уравнений в базовом варианте DREM применяется метод градиентного спуска:

$$\dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i \Delta (\Delta\hat{\theta}_i - y_{ei}), \quad (5)$$

где $\gamma_i \in \mathbb{R}^+$ — настроочный коэффициент.

На рис. 1 представлена описанная последовательность шагов метода.

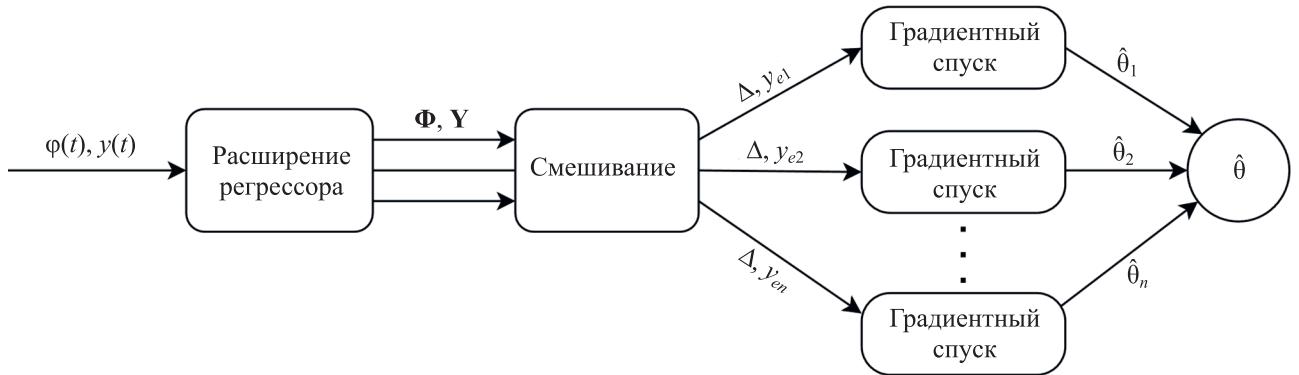


Рис. 1

Работу метода продемонстрируем на регрессионном уравнении вида (1) при:

$$\begin{aligned}
 \Phi(t) &= [1 \quad \sin t \quad \sin(t+s)]^T, \\
 H_i[\cdot] &= \frac{\omega_i}{p + \omega_i}, \quad i = 1, \dots, 3, \\
 \theta &= [2 \quad 3 \quad 6]^T, \\
 |v(t)| &< 0,5,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $p = \frac{d}{dt}$, $v(t)$ — равномерно распределенная случайная величина, s — разница фаз тригонометрических компонент регрессора, ω_i — характеристические частоты среза применяемых фильтров.

Определим $s = \frac{\pi}{2}$, $[\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3]^T = [100 \quad 100 \quad 100]^T$,

$[\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3]^T = [1 \quad 10 \quad 50]$. На рис. 2 представлена динамика оценки для каждого из параметров $\hat{\theta}_i$ оригинального алгоритма DREM. В дальнейшем будем использовать регрессионное уравнение (6) в качестве примера, при необходимости модифицируя его.

Препятствиями для использования DREM в качестве метода выбора для широкого класса задач идентификации служат:

- относительно большое количество настраиваемых параметров;
- реакция метода на отсутствие возбуждения регрессора или его слабость;
- недостатки градиентного спуска для получения финальных значений параметров;
- особенности сходимости относительно нестационарных параметров.

Далее рассмотрим каждый из этих аспектов.

Альтернативные схемы расширения. Оригинальный алгоритм имеет не менее $(2n - 1)$ настраиваемых коэффициентов, что может показаться неоправданно большим для ручной настройки. Альтернативные схемы преобразования регрессора в матричную форму позволяют сократить количество настроек коэффициентов на первом шаге метода, при этом сохраняя возбуждение регрессора.

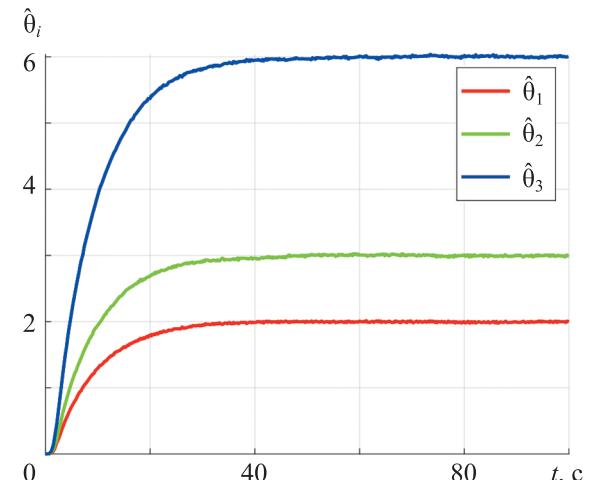


Рис. 2

Одной из таких схем является фильтрация (или схема расширения) Крейсельмейера (Kresselmeier Regressor Extension, KRE) [5]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Y}}(t) &= -l\mathbf{Y}(t) + \boldsymbol{\varphi}(t)y(t), \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{0}_n, \\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) &= -l\boldsymbol{\Phi}(t) + \boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^T(t), \boldsymbol{\Phi}(t_0) = \mathbf{0}_{n \times n},\end{aligned}\quad (7)$$

где $l \in \mathbb{R}^+$. Использование этой схемы позволяет существенно сократить количество настраиваемых коэффициентов для шага расширения: $(n - 1) \rightarrow 1$. Динамика оценки параметров в задаче (6) представлена на рис. 3 для $l = 1$ (a) и $l = 1/2$ (б).

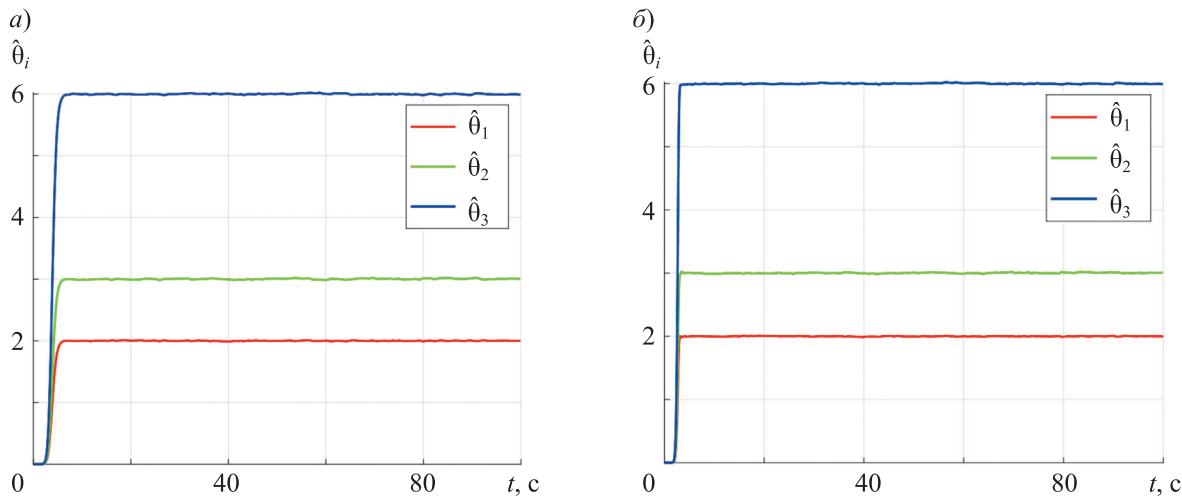


Рис. 3

Еще одним вариантом, позволяющим сократить количество настраиваемых параметров, является расширение регрессора по схеме с адаптивной коррекцией [6]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Y}}(t) &= -\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^T(t)\mathbf{Y}(t) + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}(t)y(t), \\ \dot{\boldsymbol{\Sigma}}(t) &= -\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\Sigma}(t), \boldsymbol{\Sigma}(t_0) = \mathbf{I}_n, \\ \boldsymbol{\Phi}(t) &= \mathbf{I}_n - \boldsymbol{\Sigma}(t),\end{aligned}\quad (8)$$

где $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^T > \mathbf{0}_{n \times n}$ — матрица адаптивных коэффициентов, $\boldsymbol{\Sigma}(t)$ — матрица ковариации. На рис. 4 представлена динамика оценки параметров для расширения регрессора по схеме с адаптивной коррекцией (8) при $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{I}_n$.

Благодаря быстрой сходимости оценки (см. рис. 3), алгоритмической простоте, фильтрационным качествам, а также единственному скалярному настраиваемому параметру использование схемы расширения Крейсельмейера является оптимальным приемом для упрощения настройки алгоритма DREM.

Проблемы слабого возбуждения регрессора. В работе [4] было показано, что условием реализуемости алгоритма DREM является конечное возбуждение регрессора на интервале $[t_r; t_e]$, математически выражаемое как:

$$t_r, t_e, \alpha \in \mathbb{R}^+ : t_e \geq t_r > 0 \text{ и } \int_{t_r}^{t_e} \boldsymbol{\varphi}(\tau)\boldsymbol{\varphi}(\tau)^T d\tau \geq \alpha \mathbf{I}, \quad (9)$$

где α — степень возбуждения регрессора, τ — время, \mathbf{I} — единичная матрица. С практической точки

зрения, условие (9) не выполняется при наличии линейной зависимости элементов регрессора [6, 7] либо равенства нулю одного из них. На примере (6) при $s = 0,1$ проблема продемонстрирована на рис. 5 (a — динамика оценки при $\gamma_i = 100$, b — при $\gamma_i = 10^5, i = 1, \dots, n$). Радикальное увеличение коэффициентов γ_i градиентных идентификаторов на финальном шаге DREM восстанавливает скорость сходимости к истинным значениям параметров, но это происходит за счет повышения чувствительности к шумам, что негативно скажется на процессе оценивания при восстановлении возбуждения регрессора.

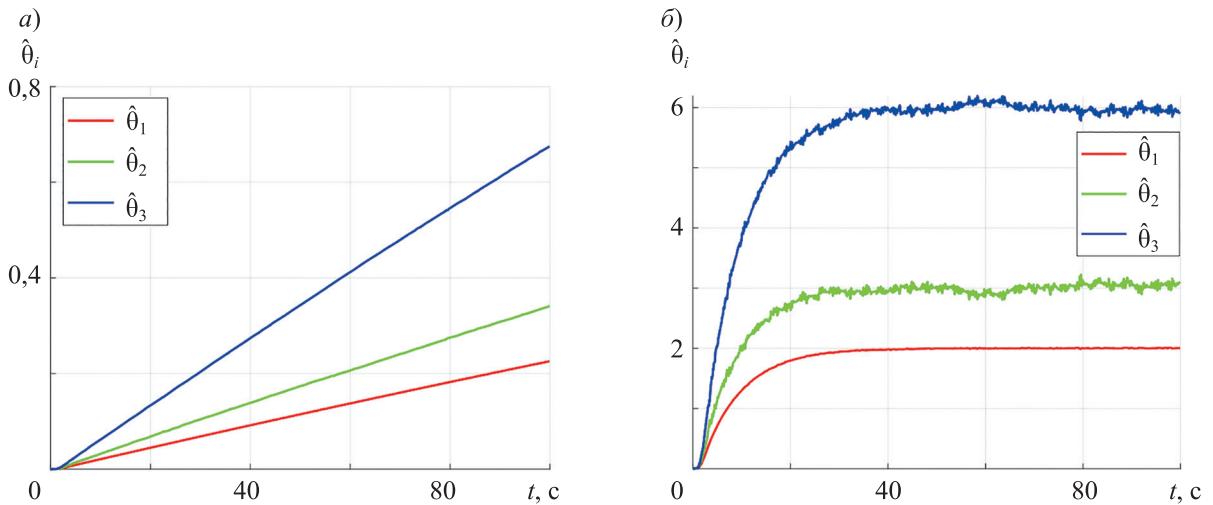


Рис. 5

В случае нарушения этого требования возможным решением может быть регуляризация матрицы расширенного регрессора путем модификации ее собственных чисел [8]. В рамках предложенного подхода выполняется спектральное разложение матрицы расширенного регрессора:

$$\Phi(t) = Q^T(t) \Lambda_\Phi(t) Q(t), \quad (10)$$

где $Q(t)$ — матрица, составленная из собственных векторов; $\Lambda_\Phi(t) = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — матрица собственных значений. Собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ модифицируются по правилу:

$$\tilde{\lambda}_i := \begin{cases} \lambda_i, & \text{если } \lambda_i > \bar{\varepsilon}, \\ \varepsilon, & \text{если } \lambda_i \leq \bar{\varepsilon}, \end{cases} \quad \bar{\varepsilon} > 0 \quad (11)$$

с последующим восстановлением расширенного регрессора:

$$\tilde{\Phi}(t) = Q^T(t) \tilde{\Lambda}_\Phi(t) Q(t), \quad (12)$$

где $\tilde{\Lambda} := \text{diag}\{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n\}$ — регуляризованная матрица собственных значений, $i = 1, \dots, n$, $\tilde{\Phi}(t)$ — подмененный расширенный регрессор. Параметр $\bar{\varepsilon}$ определяет амплитуду собственных значений $\Phi(t)$, считающихся эквивалентными нулю; задаваемый коэффициент ε определяет минимальную величину виртуальных собственных значений $\tilde{\lambda}_i$. На рис. 6 представлена работа алгоритма оценивания в случае слабого возбуждения регрессора с использованием расширенного регрессора с виртуальными собственными числами (10)–(12) при $\bar{\varepsilon} = \varepsilon = 0,005$.

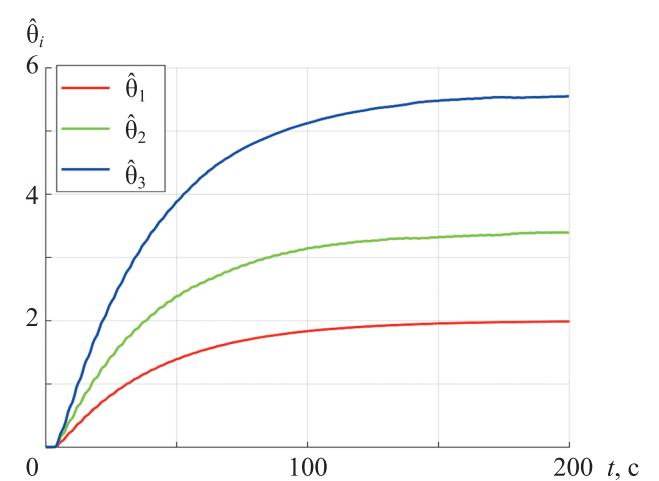


Рис. 6

Можно отметить, что асимптотическая сходимость оценки не наблюдается, однако во многих практических случаях наличие неточной оценки предпочтительнее, чем ее полное отсутствие.

Схожий метод, позволяющий получить практически применимую оценку в случае слабого возбуждения регрессора, представлен в [9]. В нем формируется регуляризующая матрица $\mathbf{H}(t) := \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, для которой модифицированный расширенный регрессор $\tilde{\Phi}(t) := \Phi(t) + \mathbf{H}(t)$ будет иметь достаточное возбуждение в целом, не оказывая при этом влияния на направления регрессора с достаточным уровнем возбуждения. Диагональные элементы σ_i регуляризующей матрицы $\mathbf{H}(t)$ определяются исходя из собственных значений λ_i матрицы расширенного регрессора:

$$\sigma_i := \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_i > \bar{\varepsilon}, \\ \bar{\sigma}, & \text{если } \lambda_i \leq \bar{\varepsilon}, \end{cases} \quad (13)$$

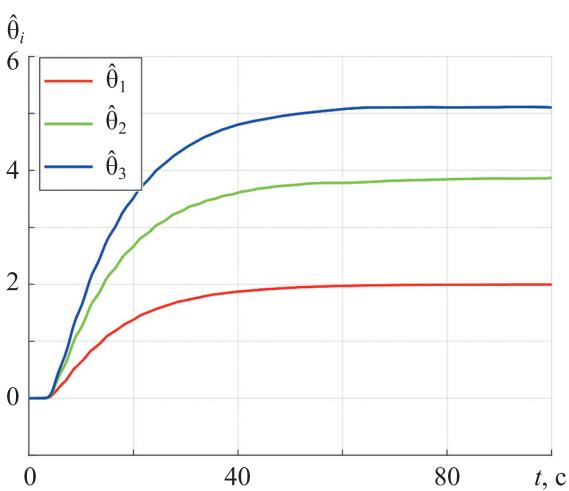


Рис. 7

Значение $\bar{\sigma}$ выбирается на основе анализа величины шумов $v(t)$ в системе таким образом, чтобы ошибка оценки, индуцированная регуляризацией, не превышала ошибки, вызванной шумами.

Динамика оценки параметров задачи (6) в случае слабого возбуждения регрессора ($s = 0, 1$) с использованием регуляризующей матрицы для расширенного регрессора вида $\mathbf{H}(t) := \bar{\sigma} \cdot \text{diag}\{0, 1, 1\}$, $\bar{\sigma} = 0,005$ представлена на рис. 7.

Такой подход во многом схож с методом модификации собственных чисел, описанным выше как процедурно, так и по результатам на модельном примере, однако предполагает меньшее количество операций.

Другим возможным вариантом решения проблемы является редуцирование линейно зависимых частей регрессора модифицированным методом ортогонализации Грамма–Шмидта [10]. Для этого столбцы Φ_i расширенного регрессора $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_n]$ используются для построения новой матрицы расширенного регрессора $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n]$, ранг которой будет минимален. Для этого реализуется следующий алгоритм:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \Phi_1, \\ \mathbf{b}_2 &= \Phi_2 - \text{proj}_{\mathbf{b}_1}\{\Phi_2\}, \\ \mathbf{b}_3 &= \Phi_3 - \text{proj}_{\mathbf{b}_1}\{\Phi_3\} - \text{proj}_{\mathbf{b}_2}\{\Phi_3\}, \\ &\dots \\ \mathbf{b}_n &= \Phi_n - \sum_{i=1}^{n-1} \text{proj}_{\mathbf{b}_i}\{\Phi_n\}, \\ \text{proj}_{\mathbf{b}}(\Phi) &= \begin{cases} \frac{\mathbf{b}^T \Phi}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}}, & \mathbf{b} \neq 0, \\ 0, & \mathbf{b} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Путем сокращения матрицы \mathbf{B} до полного ранга по критерию $\|\mathbf{b}_i\| < \varepsilon$ возможно перейти к новому расширенному регрессионному уравнению:

$$\mathbf{Y} = \Phi \theta \Rightarrow \mathbf{Y} = \Phi_{\text{red}} \mathbf{K} \theta.$$

Итого формируется новое регрессионное уравнение:

$$\mathbf{Y} = \Phi_{\text{red}} \mathbf{K} \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\text{red}}, \quad (14)$$

где $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{(n-g) \times n}$ — матрица преобразования, $\Phi_{\text{red}} \in \mathbb{R}^{n \times (n-g)}$ — редуцированный регрессор, g — число отброшенных столбцов. Посредством замены переменной возможен переход к новому уравнению регрессии с другим вектором неизвестных параметров $\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\text{red}} = \mathbf{K} \underline{\boldsymbol{\theta}}$. В таком случае, с использованием рекурсивного подхода и метода наименьших квадратов, рассчитывается матрица \mathbf{K} . Далее из этого уравнения можно получить оценку параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{red}}$ стандартными методами. Если априорно известно, что вектор неизвестных параметров $\boldsymbol{\theta}$ исходной регрессии избыточно параметризован, т. е. зависит от вектора параметров $\boldsymbol{\eta}$ (причем $(\dim\{\boldsymbol{\theta}\} - \dim\{\boldsymbol{\eta}\}) > g$), то оценка параметров исходной регрессии восстановима.

В частности, для примера (6) возможно ввести вектор параметров $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$, компоненты которого связаны с компонентами вектора $\boldsymbol{\theta}$ как $\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_1 \eta_2 \end{bmatrix}$, т. е. посредством этого метода возможно полное восстановление вектора оценки $\boldsymbol{\theta}$, если доступна оценка $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{red}}$. На рис. 8 представлены графики оценки параметров в задаче (6) при $s = 0,5e^{-t}$ при использовании: а) базового метода DREM, б) алгоритма оценивания параметров новой регрессии, полученной путем редуцирования расширенного регрессора. Матрица \mathbf{K} в данном примере приобретает вид $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k_{1,3} \\ 0 & 1 & k_{2,3} \end{bmatrix}$, $k_{1,3} = 0$, $k_{2,3} = 1$ т. е.

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{\text{red}1} = \hat{\theta}_1 + k_{1,3} \hat{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_{\text{red}2} = \hat{\theta}_2 + k_{2,3} \hat{\theta}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta}_{\text{red}1} = \hat{\theta}_1, \\ \hat{\theta}_{\text{red}2} = \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3. \end{cases} \quad (15)$$

Система уравнений (15) разрешима только при наличии избыточной параметризации вектора $\boldsymbol{\theta}$.

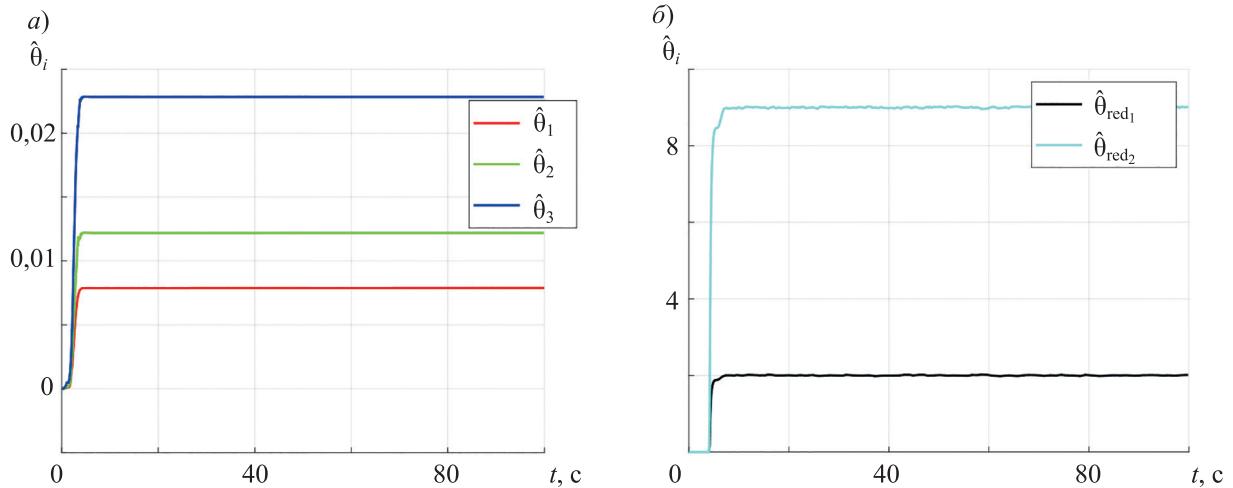


Рис. 8

Возможность практического применения такого похода продемонстрирована авторами [10] в задаче о наблюдателе величины магнитного потока в магнитном подвесе.

Согласно выполненному анализу, при слабом возбуждении регрессора метод регуляризации путем формирования регуляризующей матрицы (13) обеспечивает точность оценки, сопоставимую с точностью метода модификации собственных значений расширенного регрессора (10)–(12), при этом имеет меньшую алгоритмическую сложность, так как в рамках данного подхода нет операции, аналогичной восстановлению расширенного регрессора (12).

Особенности применения градиентного спуска. Естественным недостатком градиентного спуска, используемого в базовой версии DREM, является необходимость подбора коэф-

фициентов γ_i для каждой скалярной регрессии, при этом необходима априорная информация о свойствах системы. На рис. 9 продемонстрирована динамика оценки для задачи (6) с $s = 0,15$ (a) и $s = \frac{\pi}{2}$ (б) соответственно при $\gamma_i = 1000$, $i = 1, \dots, n$. Из результатов моделирования видно, что от возбуждения регрессора зависит время сходимости оценки.

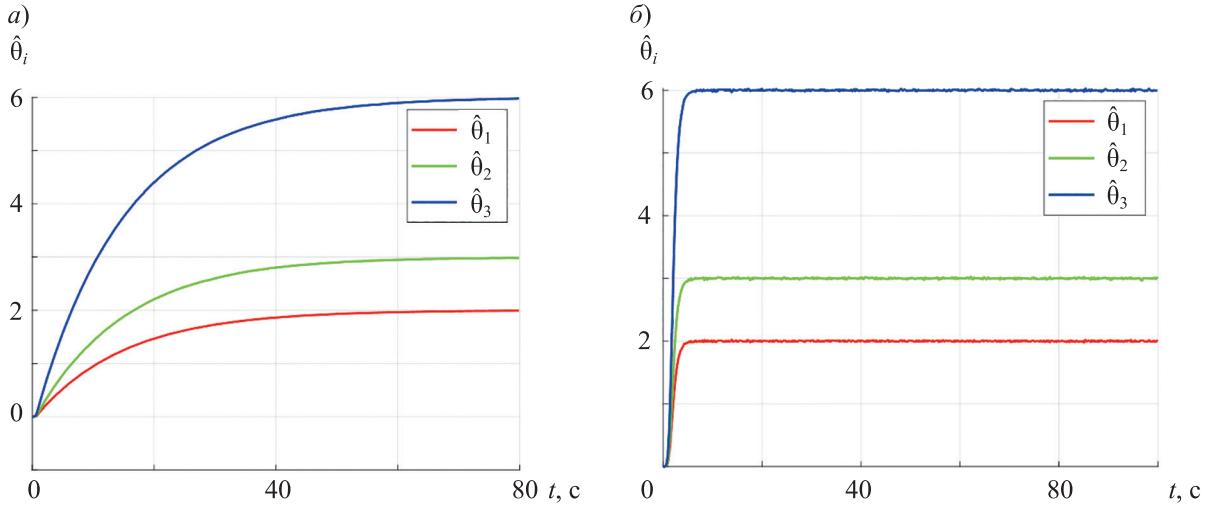


Рис. 9

В качестве альтернативы возможно использовать рекурсивный метод наименьших квадратов (РМНК) [11]:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}_i &= \kappa_i \Delta p_i (y_{ei} - \Delta \hat{\theta}_i), \\ \dot{p}_i &= \kappa_i (\lambda_i p_i - p_i^2 \Delta^2).\end{aligned}\quad (16)$$

Здесь Δ — общий скалярный регрессор; p_i — коэффициент усиления, $p_i(0) > 0$; $\kappa_i > 0$ — коэффициент пропорциональности; $\lambda_i \in [0; 1]$ — фактор забывания. Настройка коэффициентов κ_i и λ_i позволяет регулировать скорость изменения соответствующих коэффициентов усиления p_i и чувствительность алгоритма к изменению параметров в целом. Динамика оценки параметров с использованием алгоритма DREM с РМНК (15) для уравнения регрессии (6) при $s = \frac{\pi}{2}$ представлена на рис. 10, а; на рис. 10, б — динамика коэффициентов усиления. Коэффициенты взяты как $[\kappa_1 \ \kappa_2 \ \kappa_3] = [1 \ 10 \ 100]$, $[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3] = [0,9 \ 0,9 \ 0,9]$.

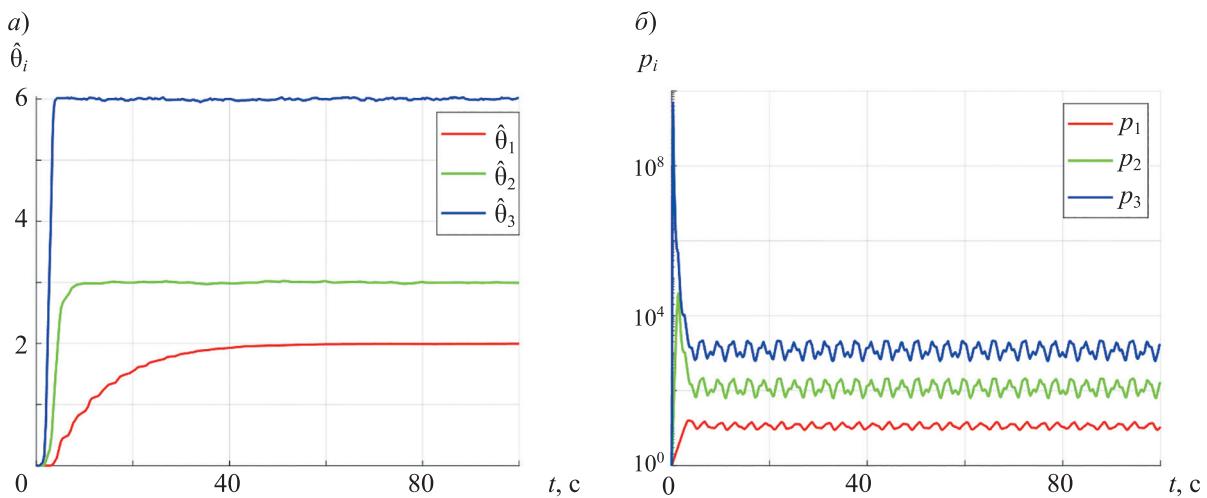


Рис. 10

Использование РМНК на финальном шаге DREM может приводить к некачественной оценке в случае временного ослабления возбуждения скалярного регрессора. В такой ситуации значение коэффициента усиления может стать избыточным, что, в свою очередь, может привести к дестабилизации оценки. Для того чтобы предотвратить подобное развитие событий, возможно ограничить максимальное значение коэффициента усиления либо приостановить его изменение ($p_i \equiv 0$) в случае пропадания возбуждения регрессора (факт которого можно оценить, например, из величины p_i [12]).

Другим недостатком применения градиентного спуска является зависимость скорости сходимости по каждому параметру от произведения степени возбуждения регрессора и настроичного коэффициента $\alpha\gamma$ [13]. Прямолинейное решение проблемы — одновременная оценка с помощью градиентных спусков с разными настроичными коэффициентами. Более продуманный подход подразумевает изменение настроичного коэффициента за счет оценки степени возбуждения, например, неявными методами [14]. С другой стороны, можно провести нормализацию возбуждения регрессора. Так, в работе [15] используется следующее преобразование скалярных регрессионных уравнений (4):

$$y_{ei} = \Delta\theta_i \Rightarrow z_i = \varphi\theta_i, \quad (17)$$

где Δ — общий скалярный регрессор, $z_i = \frac{y_{ei}}{f(\Delta)}$, $\varphi = \frac{\Delta}{f(\Delta)}$, $f(\Delta) = \begin{cases} \text{sign}(\Delta)\Delta_{\min}, |\Delta| < \Delta_{\min} \\ \Delta, \text{ иначе} \end{cases}$, Δ_{\min} — параметр, подбираемый исходя из априорной информации о минимальном значении регрессора и характеристиках шума.

Применяя далее градиентный скалярный идентификатор, получим выражение для оценки применительно к новым регрессионным уравнениям:

$$\dot{\hat{\theta}}_{\text{norm}_i} = -\gamma_i \psi(\psi\hat{\theta}_{\text{norm}_i} - z_i). \quad (18)$$

Оценка параметров в случае нормализации регрессора применительно к задаче (6) при $s = 0,15$ и $s = \frac{\pi}{2}$ представлена на рис. 11, *а* и *б* соответственно. В этом примере $\Delta_{\min} = 0,1$, $\gamma_i = 100$, $i = 1, \dots, l$.

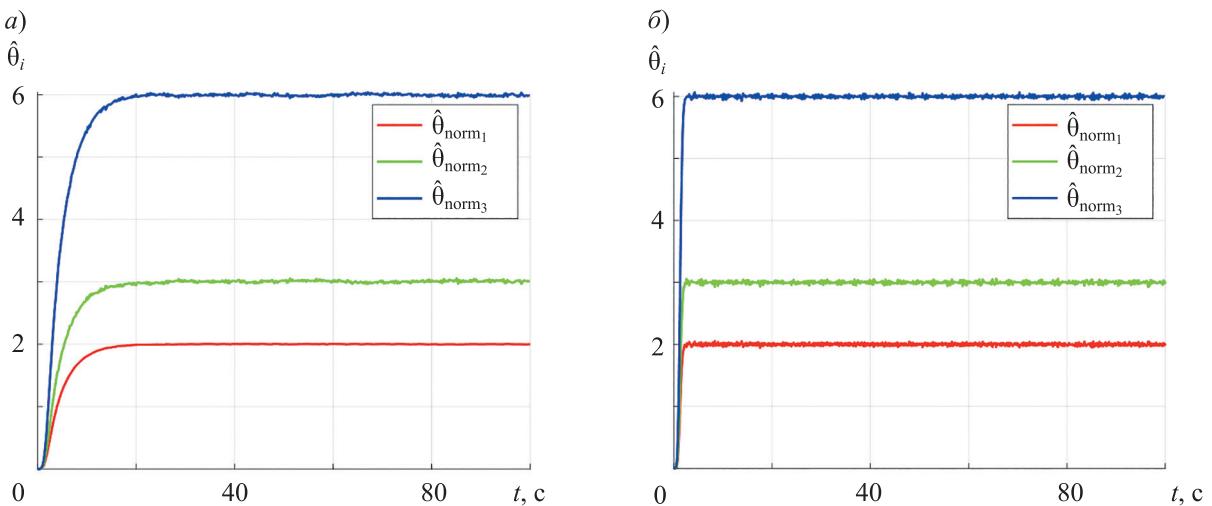


Рис. 11

Попарно сравнивая динамику оценок, представленных на рис. 9 (без нормализации регрессора) и рис. 11, можно заметить, что при разном возбуждении регрессора (связанном с величиной параметра s в задаче (6)) разница в скорости сходимости оценки сокращается при использовании нормализации регрессора.

Несмотря на преимущества РМНК как метода получения финальной оценки параметров, связанных с адаптивностью коэффициента усиления, необходимость превентивной отработки ситуаций дестабилизации оценки из-за чрезмерно большого коэффициента усиления делает метод нормализации регрессора методом выбора для упрощения подбора коэффициентов градиентного спуска.

Быстрая динамика параметров. Несмотря на то что DREM применим для уравнений с медленно изменяющимися параметрами, существуют модификации, обеспечивающие идентификацию за конечное время, в том числе для случаев кусочно-постоянных параметров [16, 17]. В этих подходах используются различные варианты модификации скалярного градиентного спуска. Тем не менее, при их использовании могут возникать выбросы в оценке вектора параметров. На рис. 12 с использованием примера (6) при $s = \frac{\pi}{2}$ продемонстрирована динамика оценки параметров:

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} H[t - t_0], \quad (19)$$

где $H[t - t_0]$ — функция Хевисайда, $t_0 = 30$ с. Стрелками на рис. 12 обозначены выбросы в оценке, не связанные напрямую с изменением оцениваемого параметра, что для некоторых практических задач может быть недопустимо. Динамика параметров в соответствии с (19) представлена на рис. 13, а.

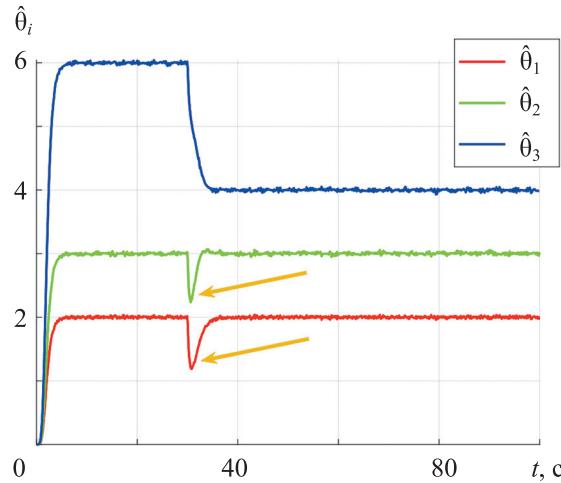


Рис. 12

Возможным решением этой проблемы может быть применение интервального интегрального фильтра со сбросом для построения расширенного регрессора [7]:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_{t_k}^t e^{\frac{-\int_{\tau}^t \sigma ds}{\sigma}} \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau, \Phi(t_k) = \mathbf{0}_{n \times n}, \\ \mathbf{Y}(t) &= \int_{t_k}^t e^{\frac{-\int_{\tau}^t \sigma ds}{\sigma}} \Phi(\tau) y(\tau) d\tau, \mathbf{Y}(t_k) = \mathbf{0}_n, \end{aligned} \quad (20)$$

где $t_k = T \cdot \text{floor}\{t/T\}$, $\text{floor}\{\cdot\}$ — функция целочисленного округления, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ — фактор памяти, определяющий временной промежуток чувствительности алгоритма оценивания к новым данным внутри окна фильтрации шириной $T \in \mathbb{R}^+$, величина которого подбирается исходя из априорно известного минимально возможного промежутка времени между последовательными изменениями параметров. Для примера (6) с $s = \frac{\pi}{2}$ при $T = 0,3$ с, $\sigma = 0,01$ график оценки параметров представлен на рис. 13, б. Как видно из графика, возмущения оценки отсутствуют.

Поведение скалярного регрессора, получающееся при использовании интегрального фильтра, представлено на рис. 14.

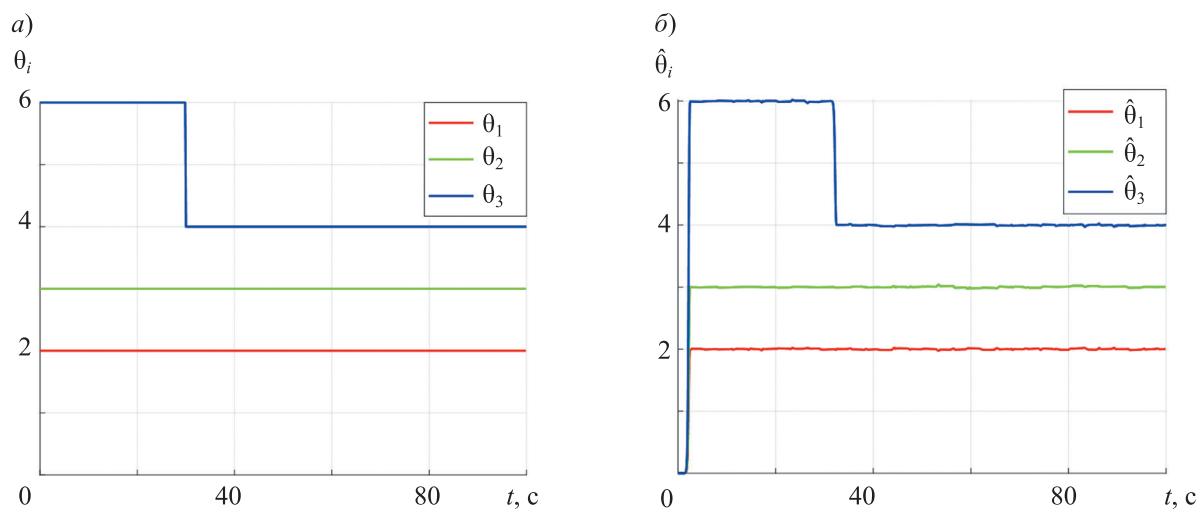


Рис. 13

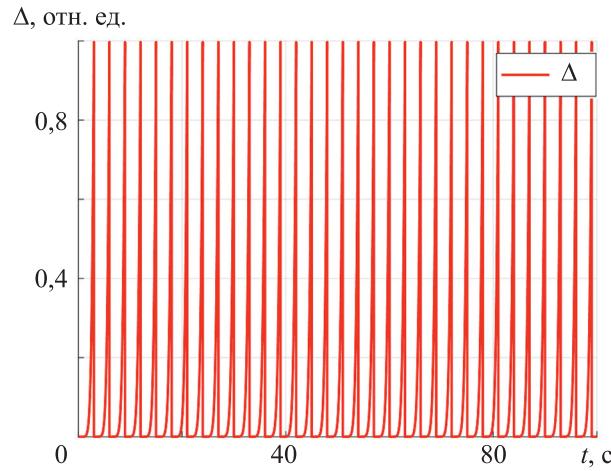


Рис. 14

Таким образом, применение интервально-интегрального фильтра эффективно расширяет возможности метода DREM на случай кусочно-постоянных параметров.

Заключение. Проведенный качественный анализ позволяет выработать заключительные рекомендации по эффективному использованию метода DREM в зависимости от свойств системы:

- для сокращения числа настраиваемых параметров — использовать схему KRE (7) с целью расширения регрессора;
- для случаев недостатка возбуждения регрессора — использовать регуляризацию методом прямой модификации матрицы расширенного регрессора (13);
- для упрощения настройки финальной идентификации параметров — использовать нормализацию возбуждения скалярного регрессора (17);
- в случае кусочно-постоянных параметров — использовать интервальную интегральную фильтрацию для шага расширения регрессора (20).

Проведенный анализ недостатков DREM как инструмента оценки параметров линейной регрессии совместно с предложенными модификациями для их устранения позволяет осознанно делать выбор в его пользу, в том числе для сложных случаев регрессии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ioannou P. A., and Jing Sun. Robust adaptive control. Upper Saddle River, NJ: PTR Prentice-Hall, 1996.
2. Ljung L. System Identification — Theory for the User. NJ: PTR Prentice Hall, 1999.
3. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing // IEEE Transactions on Automatic Control. 2016. Vol. 62, N 7. P. 3546–3550.
4. Bowen Y., Ortega R. Conditions for convergence of dynamic regressor extension and mixing parameter estimators using LTI filters // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. Vol. 68, N 2. P. 1253–1258.
5. Korotina M., Aranovskiy S., Ushirobira R., Vedyakov A. On parameter tuning and convergence properties of the DREM procedure // European Control Conf. (ECC). St. Petersburg, 12–15 May 2020. P. 53–58. DOI: 10.23919/ECC51009.2020.9143808.
6. Wang L., Ortega R., Bobtsov A., Romero J. G., Yi B. Identifiability implies robust, globally exponentially convergent on-line parameter estimation // Intern. J. of Control. 2023. P. 1–17. DOI: 10.1080/00207179.2023.2246595.
7. Глуценко А. И., Петров В. А., Ласточкин К. А. Проблема применения процедуры DREM в задаче идентификации интервально заданных параметров // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2021. Т. 21, № 4. С. 449–456.
8. Глуценко А. И., Ласточкин К. А. Ослабление условия реализуемости процедуры динамического расширения и смешивания // Автоматика и телемеханика. 2023. Т. 84, № 1. С. 23–62.
9. Aranovskiy S., Ushirobira R., Efimov D. On DREM regularization and unexcited linear regression estimation // 62nd IEEE Conf. on Decision and Control. 2023. P. 2515–2520.
10. Ovcharov A., Vedyakov A., Kazak S., Pyrkin A. Overparameterized model parameter recovering with finite-time convergence // Intern. J. of Adaptive Control and Signal Processing. 2023. Vol. 36, N 6. P. 1305–1325.
11. Palmisano M., Reichhartinger M. A Finite Time Convergent Least-Squares Modification of the Dynamic Regressor Extension and Mixing Algorithm // IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53, N 2. P. 5105–5110.
12. Hu Y., Wu J., Zeng C. Robust Adaptive Identification of Linear Time-Varying Systems under Relaxed Excitation Conditions // IEEE Access. 2020. Vol. 8. P. 8268–8274.
13. Sastry S., Bodson M. Adaptive Control—Stability, Convergence, and Robustness. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
14. Schatz S. P., Yucelen T., Gruenwald B. C., Holzapfel F. Application of a novel scalability notion in adaptive control to various adaptive control frameworks // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf. 2015. P. 0608.
15. Глуценко А. И., Ласточкин К. А., Петров В. А. Нормализация возбуждения регрессора в процедуре динамического расширения и смешивания // Автоматика и телемеханика. 2022. № 1. С. 22–39.
16. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A., Astolfi A., Bobtsov A. New results on parameter estimation via dynamic regressor extension and mixing: Continuous and discrete-time cases // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 66, N. 5. P. 2265–2272.
17. Ortega R., Gerasimov D. N., Barabanov N. E., Nikiforov V. O. Adaptive control of linear multivariable systems using dynamic regressor extension and mixing estimators: Removing the high-frequency gain assumptions // Automatica. 2019. Vol. 110. P. 108589.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Никита Владимирович Михальков

— аспирант; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: nvmikhalkov@itmo.ru

Антон Александрович Пыркин

— д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; декан, профессор, вед. науч. сотр.; E-mail: pyrkin@itmo.ru

Поступила в редакцию 10.07.24; одобрена после рецензирования 09.09.24; принята к публикации 21.11.24.

REFERENCES

1. Ioannou P.A., and Jing Sun, *Robust adaptive control*. Upper Saddle River, NJ, PTR Prentice-Hall, 1996.
2. Ljung L. *System Identification — Theory for the User*, NJ, PTR Prentice Hall, 1999.
3. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, no. 7(62), pp. 3546–3550.
4. Bowen Y., Ortega R. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, no. 2(68), pp. 1253–1258.

5. Korotina M., Aranovskiy S., Ushirobira R., Vedyakov A. *European Control Conference (ECC)*, St. Petersburg, May 12–15, 2020, pp. 53–58. DOI: 10.23919/ECC51009.2020.9143808.
6. Wang L., Ortega R., Bobtsov A., Romero J.G., Yi B. *International Journal of Control*, 2023, pp. 1–17, DOI: 10.1080/00207179.2023.2246595.
7. Glushchenko A.I., Petrov V.A., Lastochkin K.A. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2021, no. 4(21), pp. 449–456. (in Russ.)
8. Glushchenko A.I., Lastochkin K.A. *Automation and Remote Control*, 2023, no. 1(84), pp. 14–41.
9. Aranovskiy S., Ushirobira R., Efimov D. *62nd IEEE Conference on Decision and Control*, 2023, pp. 2515–2520.
10. Ovcharov A., Vedyakov A., Kazak S., Pyrkin A. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2023, no. 6(36), pp. 1305–1325.
11. Palmisano M., Reichhartinger M. *IFAC-PapersOnLine*, 2020, no. 2(53), pp. 5105–5110.
12. Hu Y., Wu J., Zeng C. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 8268–8274.
13. Sastry S., Bodson M. *Adaptive Control—Stability, Convergence, and Robustness*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1989.
14. Schatz S. P., Yucelen T., Gruenwald B. C., Holzapfel F. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2015, p. 0608.
15. Glushchenko A.I., Lastochkin K.A., Petrov V.A. *Automation and Remote Control*, 2022, no. 1(83), pp. 17–31.
16. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A., Astolfi A., Bobtsov A. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, no. 5(66), pp. 2265–2272.
17. Ortega R., Gerasimov D.N., Barabanov N.E., Nikiforov V.O. *Automatica*, 2019, vol. 110, p. 108589.

DATA ON AUTHORS

Nikita V. Mikhalkov

— Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: nvmikhalkov@itmo.ru

Anton A. Pyrkin

— Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Dean of the Faculty; E-mail: pyrkin@itmo.ru

Received 10.07.24; approved after reviewing 09.09.24; accepted for publication 21.11.24.