УДК 681.51
DOI: 10.17586/0021-3454-2025-68-5-397-405

СИНТЕЗ АДАПТИВНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ КЛАССА НЕСТАЦИОНАРНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

О. А. Козачёк*, А. А. Бобцов

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
** oakozachek@itmo.ru*

Аннотация. Предложен адаптивный наблюдатель для билинейной нестационарной динамической системы в условиях частичной параметрической неопределенности. Задача решается в предположении, что неизвестные параметры содержатся в матрице/векторе при сигнале управления. Ключевая идея предложенного алгоритма состоит в новой параметризации объекта, которая основана на двух функциях, одну из которых можно найти аналитически, используя известные и измеряемые сигналы системы. Применение линейных фильтров позволяет привести систему к виду линейной статической регрессионной модели, содержащей неизвестные постоянные параметры; на следующем этапе неизвестные параметры оцениваются с помощью градиентного алгоритма. Так как неизвестные постоянные параметры математически связаны с неизвестными начальными условиями вектора состояния и неизвестными переменными параметрами в матрице/векторе управления, то на основе полученных оценок выведены оценки неизвестных компонент вектора состояния и оценка неизвестного параметра. Показано преимущество предложенного метода, состоящее в возможности его применения к достаточно широкому классу билинейных систем, к которым, в частности, могут быть сведены системы Эйлера — Лагранжа, описывающие множество реальных технических объектов и робототехнических систем.

Ключевые слова: *билинейная система, нестационарная система, адаптивный наблюдатель, идентификация параметров, линейная регрессионная модель*

Благодарности: исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № FSER-2025-0002.

Ссылка для цитирования: *Козачёк О. А., Бобцов А. А.* Синтез адаптивного наблюдателя состояния для класса нестационарных билинейных систем в условиях частичной параметрической неопределенности// Изв. вузов. Приборостроение. 2025. Т. 68, № 5. С. 397–405. DOI: 10.17586/0021-3454-2025-68-5-397-405.

ADAPTIVE STATE OBSERVER SYNTHESIS FOR A CLASS OF NONSTATIONARY BILINEAR SYSTEMS UNDER CONDITIONS OF PARTIAL PARAMETRIC UNCERTAINTY

O. A. Kozachek*, A. A. Bobtsov

ITMO University, St. Petersburg, Russia
** oakozachek@itmo.ru*

Abstract: An adaptive observer for a bilinear nonstationary dynamic system under partial parametric uncertainty is proposed. The problem is solved under the assumption that the unknown parameters are contained in the matrix/vector at the control signal. The key idea of the proposed algorithm is a new parameterization of the object based on two functions, one of which can be found analytically using the known and measured signals of the system. The use of linear filters allows us to reduce the system to the form of a linear static regression model containing unknown constant parameters; at the next stage, the unknown parameters are estimated using a gradient algorithm. Since the unknown constant parameters are mathematically related to the unknown initial conditions of the state vector and the unknown variable parameters in the matrix/vector of control, the estimates of the unknown components of the state vector and the estimate of the unknown parameter are derived based on the estimates obtained. It is shown that the proposed method advantage consists in the possibility of application to a sufficiently wide class of bilinear systems, to which, in particular, Euler-Lagrange systems describing many real technical objects and robotic systems can be reduced.

Keywords: bilinear system, time-varying system, adaptive observer, parameters identification, linear regression model

Acknowledgements: the study was carried out with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FSER-2025-0002).

For citation: Kozachek O. A., Bobtsov A. A. Adaptive state observer synthesis for a class of nonstationary bilinear systems under conditions of partial parametric uncertainty. *Journal of Instrument Engineering*. 2025. Vol. 68, N 5. P. 397–405 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2025-68-5-397-405.

Введение. При решении задач управления динамическими системами важным этапом является получение информации об их состоянии, для чего используются первичные измерительные преобразователи (датчики). Однако не во всех случаях полный вектор состояния возможно измерить. Более того, наличие дополнительных датчиков в системе может увеличивать ее стоимость, а также снижать надежность системы и вносить дополнительные помехи, вызванные самими датчиками. В случаях когда невозможно или нецелесообразно размещать набор измерительных средств, позволяющий измерять полный вектор состояния, для оценки неизвестных переменных состояния применяются наблюдатели.

Для линейных стационарных систем известно множество эффективных методов синтеза наблюдателей (см., например, [1, 2]). Наряду с этим интерес к проблеме синтеза наблюдателей для нестационарных систем не угасает, в изданиях, посвященных анализу и синтезу систем автоматического управления, активно публикуются новые исследования. В [2] был рассмотрен синтез эллипсоидных наблюдателей и алгоритмов, позволяющих обеспечить оптимальные эллипсоидные оценки переменных состояния системы и ее неизвестных параметров.

Проблема разработки наблюдателей состояния для нелинейных систем на данный момент изучена меньше, что вызвано сложностью этого класса систем и большим разнообразием математических моделей. В связи с этим в научном сообществе привлечено особое внимание к развитию исследований в области синтеза наблюдателей для нелинейных систем (см., например, [3, 4]).

Важным аспектом, усложняющим разработку новых алгоритмов, является тот факт, что система не всегда может быть описана математической моделью с постоянными параметрами. В некоторых случаях параметры системы могут изменяться со временем под влиянием как внутренних, так и внешних факторов, например, таких, как старение элементов системы, воздействие экстремально высоких или низких температур, изменение массогабаритных параметров в процессе эксплуатации. Таким образом, поведение сложных динамических систем наиболее точно описывается с помощью математических моделей, содержащих переменные параметры. Этим обусловлена актуальность исследований, посвященных синтезу наблюдателей для нестационарных систем.

Наблюдатели состояния (в том числе, состояния нелинейных нестационарных систем) находят применение не только при синтезе законов управления. Их использование имеет также самостоятельное значение, например при разработке средств контроля технического состояния [5, 6].

Заслуживает отдельного внимания такой подкласс нелинейных систем, как билинейные системы. Билинейными называются системы, линейные по каждому из аргументов. Они распространены в различных прикладных задачах. В частности, к форме билинейной динамической системы могут быть сведены системы, описываемые уравнением Эйлера — Лагранжа [7], т. е. широкий круг реальных технических объектов, таких как роботы-манипуляторы, мобильные роботы и т. д.

Существуют некоторые наиболее распространенные подходы, применяемые при построении наблюдателей. Одним из таких подходов является приведение исходной математической динамической модели системы к виду регрессионного статического уравнения (см., например, [8, 9]) с последующей идентификацией неизвестных параметров и восстановлением неизвестного вектора состояния на основе полученных оценок.

В настоящей статье рассматривается задача разработки адаптивного наблюдателя состояния для системы, относящейся к классу билинейных и содержащей неизвестные переменные параметры. Задача решена с применением описанного выше подхода, т. е. путем сведения исходной модели к виду линейной регрессии.

Постановка задачи. Рассматривается нелинейная нестационарная система вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0\varphi(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}_0(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})u(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0;\ y(t) = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{x}(t), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^n$ — известный входной сигнал; $y(t) \in \mathbb{R}$ — измеряемый выходной сигнал; матрицы $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ являются известными и постоянными; $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных переменных параметров $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{R}^n$; $\varphi(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}_0(t)) \in \mathbb{R}$ — неизвестная функция, содержащая в своей структуре вектор известных параметров $\boldsymbol{\theta}_0(t) \in \mathbb{R}^{n_{\theta_0}}$.

Для системы (1) ставится задача синтеза адаптивного наблюдателя вида

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{\chi}}(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\chi}(t), u(t), y(t));\\ \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}(t)\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)\end{bmatrix} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\chi}(t), u(t), y(t)),\end{gathered} \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\chi}(t) \in \mathbb{R}^{n_\chi}$ и все сигналы ограничены.

Адаптивный наблюдатель (1), (2) должен обеспечивать сходимость оценок переменных состояния и неизвестных параметров к реальным значениям

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t),\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \boldsymbol{\theta}(t) \tag{3}$$

для всех значений вектора начальных условий $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Для решения поставленной задачи введены следующие допущения.

Допущение 1. Функция $\varphi(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}_0(t))$ является линейной относительно аргумента $\mathbf{x}(t)$, также интеграл для $\varphi(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}_0(t))$ является известным или измеряемым, т. е. $\varphi_{\mathrm{int}} = \int_0^t \varphi(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\theta}_0(s))ds$ — известная функция.

Допущение 2. Матрицы $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{B}_0$ заданы в фробениусовой канонической управляемой форме, т. е.

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix},\ \mathbf{B}_0 = [0_{n\times(n-1)}\quad B_I],\ B_I = \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}. \tag{4}$$

Замечание. Следует отметить, что допущения 1, 2 могут показаться слишком специфичными и абстрактными, однако на самом деле существует множество математических моделей реальных объектов и систем, удовлетворяющих представленным допущениям. Так, например, к такому виду моделей можно свести хорошо известные в робототехнике уравнения механических систем, записанные в форме Эйлера — Лагранжа.

Для подтверждения сказанного рассмотрим в качестве примера математическую модель ноги робота [10], для которой уравнения Эйлера — Лагранжа могут быть записаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{q}_1 &= m_1 q_1 \dot{q}_2^2 + u_1; \\ m_1 q_1^2 \ddot{q}_2 &= -2m_1 q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + u_2; \\ m_2\ddot{q}_3 &= -u_2, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где q_1, q_2, q_3 — измеримые обобщенные координаты (в стандартной постановке задачи в отношении систем Эйлера — Лагранжа); m_1, m_2 — параметры системы; u_1, u_2 — сигналы управления.

Перепишем систему (5) в новых координатах, введя новый вектор состояния

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix}$, $i = \overline{1, 3}$.

Получим многоканальную систему, описываемую тремя системами уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_{11} &= x_{12}; \\ \dot{x}_{12} &= x_{11}x_{22}^2 + \frac{1}{m_1}u_1; \\ y_1 &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \dot{x}_{21} &= x_{22}; \\ \dot{x}_{22} &= -2\frac{1}{x_{11}}x_{12}x_{22} + \frac{1}{m_1 x_{11}^2}u_2; \\ y_2 &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \dot{x}_{31} &= x_{32}; \\ \dot{x}_{32} &= -\frac{1}{m_2}u_2; \\ y_3 &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_3, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

где $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = [1 \;\; 0]$.

Нетрудно заметить, что при построении наблюдателя ключевой переменной является $x_{22} = \dot{q}_2$, или, другими словами, при определении $x_{22} = \dot{q}_2$ могут быть применены стандартные техники синтеза наблюдателей. Поэтому рассмотрим отдельно систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_{21} &= x_{22}; \\ \dot{x}_{22} &= -2\frac{1}{x_{11}}x_{12}x_{22} + \frac{1}{m_1 x_{11}^2}u_2; \\ y_2 &= x_{21}. \end{aligned}\right\}$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}_0(t)) = \frac{x_{12}}{x_{11}} = \frac{\dot{x}_{11}}{x_{11}} = \frac{d}{dt}\ln(x_{11}); \; u = \frac{1}{x_{11}^2}u_2,$$

тогда $\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_1 \end{bmatrix}$ и $\varphi_{\mathrm{int}} = \ln(x_{11})$ — известная функция.

Легко заметить, что данная система отвечает введенным допущениям 1, 2.

Д о п у щ е н и е 3. Вектор неизвестных переменных параметров формируется генератором вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) &= \boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{\xi}(t); \\ \boldsymbol{\theta}(t) &= \mathbf{H}(t)\boldsymbol{\xi}(t), \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

где $\mathbf{H}(t)$ и $\boldsymbol{\Gamma}(t)$ — известные матрицы, начальные условия $\xi_{i0} = \xi_i(0)$ неизвестны, так что каждый неизвестный параметр может быть представлен следующим образом:

$$\theta_i = \psi_i(t)\xi_{i0},$$

где $\psi_i(t)$ — известная функция.

Д о п у щ е н и е 4. Матрица управления может быть представлена в виде

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{B}_1\boldsymbol{\theta}, \tag{9}$$

где $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — известная матрица.

Д о п у щ е н и е 5. Предполагается, что траектории входа и состояния системы ограничены. Данное допущение является типовым для задач в области идентификации и построения наблюдателей [11–13].

Основной результат. Для решения задачи синтеза наблюдателя переменных состояния объекта (1) прибегнем к процедуре параметризации билинейной динамической системы с неизвестными параметрами, позволяющей получить линейную регрессионную модель, содержащую неизвестные постоянные параметры. Первый шаг синтеза наблюдателя переменных состояния заключается в идентификации неизвестных параметров статической регрессионной модели, полученной из (1). Следующий шаг — на основе идентифицированных параметров восстановление переменных состояния. Следует отметить, что задача оценки неизвестных параметров линейной регрессионной модели не нова, существует множество различных методов ее решения. Выбор метода зависит от условий возбуждения, накладываемых на регрессор (см., например, [9, 14, 15]). Таким образом, проблему идентификации неизвестных параметров (как самостоятельную задачу) оставим за рамками данной статьи.

Для вывода основного результата введем функцию

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{x}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^n$ — вектор-функция, $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — некоторая матричная функция, которая будет определена далее.

Из уравнения (10) вектор состояния $\mathbf{x}$ может быть получен путем умножения обеих частей равенства на $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Phi}. \tag{11}$$

Рассмотрим производную от $\boldsymbol{\Phi}$:

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \dot{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0\varphi(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}_0(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})u(t)). \tag{12}$$

Пусть матричная функция $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ определяется как решение дифференциального уравнения

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = -\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0\varphi(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}_0(t)). \tag{13}$$

С учетом допущений 1 и 2 решением уравнения (13) будет функция $\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{y}(t), \boldsymbol{\theta}_0(t), t)$. Таким образом, функцию $\boldsymbol{\Lambda}$ можно считать известной.

Кроме того, с учетом (13), вне зависимости от начальных условий $\boldsymbol{\Lambda}(0)$, уравнение (12) примет вид

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})u(t). \tag{14}$$

Принимая во внимание допущения 3 и 4, для (14) имеем

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}_1\boldsymbol{\theta}u(t) = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}_1\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)\xi_0u(t) = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}_1\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)u(t)\xi_0, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{\Psi}(t)$ — матрица известных функций, ξ_0 — постоянный вектор неизвестных начальных условий.

Решением уравнения (15) является функция

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_0 + \left(\int_0^t \mathbf{\Lambda B}_1 \mathbf{H}(s) \mathbf{\Psi}(s) u(s) ds \right) \xi_0, \qquad (16)$$

где $\mathbf{\Phi}_0$ — постоянный вектор неизвестных начальных условий вектора $\mathbf{\Phi}$.

Тогда, подставляя (10) в (16), получаем:

$$\mathbf{\Lambda x} = \mathbf{\Phi}_0 + \left(\int_0^t \mathbf{\Lambda B}_1 \mathbf{H}(s) \mathbf{\Psi}(s) u(s) ds \right) \xi_0. \qquad (17)$$

Умножив уравнение (17) на $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ и применив линейный фильтр $\frac{\lambda}{(p+\lambda)^{n-1}}$ (где число $\lambda > 0$ и $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования), можно получить линейную регрессионную модель, содержащую неизвестные постоянные параметры $\mathbf{\Phi}_0$ и ξ_0.

Для оценки параметров линейной регрессионной модели можно использовать любой удобный способ в зависимости от ограничений, налагаемых на систему, а после получения оценок $\hat{\mathbf{\Phi}}_0$ и $\hat{\xi}_0$ оценку вектора состояния можно найти, воспользовавшись уравнением (11).

Для иллюстрации предлагаемого метода рассмотрим следующий академический пример.

Пример. Пусть параметры системы (1) имеют следующий вид:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_0 \varphi(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}_0(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^{\mathrm{T}} = [1 \quad 0],$$

θ_1 — известный постоянный параметр, θ_2 — неизвестный переменный параметр, удовлетворяющий допущению 3, т. е. $\theta_2 = \psi_2(t)\xi_{20}$, где $\psi_2(t)$ — известная функция, ξ_{20} — неизвестные начальные условия.

Тогда система (1) преобразуется к форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_2^2 + \theta_2 u; \\ y &= x_1. \end{aligned} \right\} \qquad (18)$$

В соответствии с предложенным методом будем использовать функцию $\mathbf{\Phi}$ вида (10) и ее производную $\dot{\mathbf{\Phi}}$ вида (12). Так как функция $\mathbf{\Lambda}$ произвольная, то пусть

$$\left(\dot{\mathbf{\Lambda}} + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0 \varphi(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}_0(t)) \right) \mathbf{x} = 0, \qquad (19)$$

т. е.

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = -\Lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 x_2 \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Для выполнения равенства (19) достаточно найти частное решения уравнения (20) в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad (21)$$

где элементы матрицы можно рассчитать следующим образом:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = e^{-\int_0^t \theta_1 x_2 ds} = e^{-\theta_1 y}.$$

Тогда уравнение (12) может быть записано как

$$\dot{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Lambda B}(\boldsymbol{\theta}) u(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\theta_1 y} \\ 0 & e^{-\theta_1 y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\theta_1 y} \\ 0 & e^{-\theta_1 y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{bmatrix} u(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_{20} \end{bmatrix}, \qquad (22)$$

а решение уравнения (22) — как

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_0 + \left(\int \begin{bmatrix} 0 & e^{-\theta_1 y} \\ 0 & e^{-\theta_1 y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{bmatrix} u(t)dt\right) \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_{20} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_0 + \mathbf{V} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_{20} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

где $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — известная функция.

Теперь, подставив (10) в выражение (23), получим

$$\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}_0 + \mathbf{V}\begin{bmatrix} 0 \\ \xi_{20} \end{bmatrix} \tag{24}$$

или

$$\begin{bmatrix} e^{-\theta_1 y} x_2 \\ e^{-\theta_1 y} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{01} \\ \Phi_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{12}\xi_{20} \\ V_{22}\xi_{20} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Очевидно, что для определения вектора $\mathbf{x}$ необходимо найти неизвестные параметры $\boldsymbol{\Phi}_0$ и ξ_{20}. Для идентификации $\boldsymbol{\Phi}_0$ и ξ_{20} умножим (25) на $e^{\theta_1 y}$, а затем применим линейный фильтр $\dfrac{\lambda}{p+\lambda}$. Тогда уравнение (25) можно записать в форме линейной регрессионной модели с неизвестными параметрами Φ_{01}, Φ_{02} и ξ_{20}:

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta},$$

где

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \Phi_{01} \\ \xi_{20} \\ \Phi_{02} \\ \xi_{20} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda}{p+\lambda}\left[e^{-\theta_1 y}\right] & \dfrac{\lambda}{p+\lambda}\left[V_{11}e^{-\theta_1 y}\right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda}{p+\lambda}\left[e^{-\theta_1 y}\right] & \dfrac{\lambda}{p+\lambda}\left[V_{11}e^{-\theta_1 y}\right] \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda p}{p+\lambda}[y] \\ \dfrac{\lambda p}{p+\lambda}[y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda}{p+\lambda}[x_2] \\ \dfrac{\lambda}{p+\lambda}[yx_2] \end{bmatrix}.$$

Неизвестные параметры регрессии можно оценить любым удобным способом, например с помощью градиентного алгоритма:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} = \gamma\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Theta}}),$$

где $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ — оценка вектора неизвестных постоянных параметров, $\gamma > 0$ — коэффициент адаптации.

После определения постоянных параметров запишем оценку переменной состояния $\hat{x}_2$ и оценку неизвестного параметра $\hat{\theta}_2$:

$$\hat{x}_2 = (\hat{\Phi}_{02} + V_{21}\hat{\xi}_{20})e^{-\theta_1 y}, \ \hat{\theta}_2 = \hat{\xi}_2\psi_2.$$

Результаты компьютерного моделирования представлены на рис. 1 и 2 графиками ошибки оценивания неизвестной переменной состояния $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$ и ошибки оценивания неизвестного параметра $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2$. Моделирование проводилось при следующих параметрах системы (18): $\theta_1 = 0{,}5$, $\theta_2 = \psi_2(t)\xi_{20}$, где $\psi_2(t) = 1$, $\xi_{20} = -0{,}1$, $u = 0{,}01\sin t$. Параметры наблюдателя: $\lambda = 1$, $\gamma = 1000$.

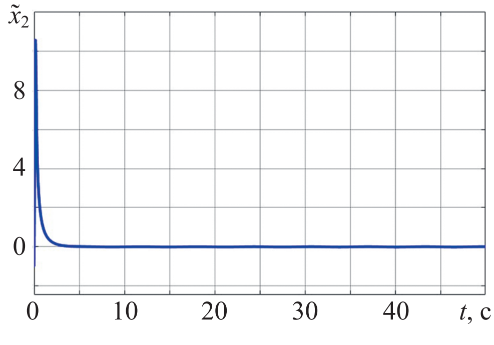

Рис. 1

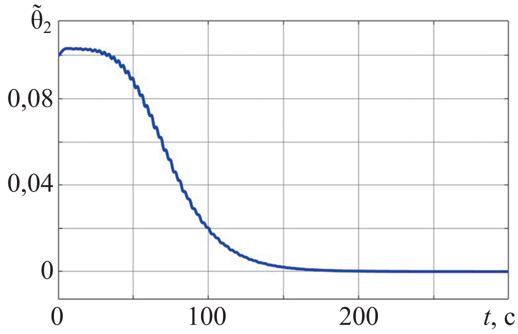

Рис. 2

Как видно на представленных графиках, ошибки $\tilde{x}_2$ и $\tilde{\theta}_2$ сходятся к нулю, что полностью отвечает поставленной в работе задаче. Результаты моделирования демонстрируют работоспособность предложенного наблюдателя состояния нелинейной нестационарной системы (1), содержащей неизвестные параметры.

Заключение. Предложен новый метод синтеза адаптивного наблюдателя переменных состояния для нестационарной билинейной системы вида (1) при допущении, что система содержит неизвестные параметры в матрице (векторе) при сигнале управления. Для указанной системы сформулированы допущения, позволяющие решить задачу синтеза адаптивного наблюдателя (10)–(17). Представлен пример, разъясняющий суть предлагаемого подхода и приведены результаты компьютерного моделирования, демонстрирующие работоспособность подхода.

Новизна представленного метода заключается в предложенной параметризации, позволяющей получить линейное регрессионное статическое уравнение из нелинейной динамической системы.

Дальнейшие исследования должны быть направлены на разработку обобщенных наблюдателей состояния билинейных систем, содержащих более сложные нелинейные модели с неизвестными параметрами. Расширение текущего результата позволит решать прикладные проблемы синтеза наблюдателей переменных состояния для класса реальных технических систем, описываемых, в частности, уравнением Эйлера — Лагранжа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каленова В. И*., *Морозов В. М.* Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики: Учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 208 с.
2. *Баландин Д. В., Коган М. М*. Управление и оценивание в линейных нестационарных системах на основе эллипсоидальных множеств достижимости // Автоматика и телемеханика. 2020. № 8. С. 8–28.
3. *Haotian Xu, Shuai Liu, Shangwei Zhao, Jingcheng Wang.* Distributed control for a class of nonlinear systems based on distributed high-gain observer // ISA Trans. 2023.
4. *Venkateswaran S., Kravaris C*. Linear Unknown Input Observers for Sensor Fault Estimation in Nonlinear Systems // IFAC-PapersonLine. 2023. Vol. 56, iss. 1. P. 61–66.
5. *Gao F., Jiang G., Zhang Z., Song J*. An adaptive observer for actuator and sensor fault diagnosis in linear time-varying systems // Proc. of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation. IEEE. 2012. P. 3281–3285.
6. *Wang F., Zong M., Chen W*. Fault diagnosis of linear time-varying system based on high gain adaptive compensation sliding mode observer // 2nd Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conf. (ITNEC). IEEE. 2017. P. 1688–1691.
7. *Spong M. W., Vidyasagar M.* Robot Dynamics and Control. John Wiley & Sons, 1989.
8. *Bobtsov A., Ortega R., Yi B., Nikolaev N*. Adaptive state estimation of state-affine systems with unknown time-varying parameters // Intern. Journal of Control. 2021. Vol. 95, N 9. P. 2640–2472.
9. *Ortega R., Bobtsov A., Nikolaev N., Schiffer J., Dochain D*. Generalized parameter estimation-based observers: Application to power systems and chemical–biological reactors // Automatica. 2021. Vol. 129. P. 109635.
10. *Bullo F., Lewis A.* Geometric Control of Mechanical Systems. N. Y.: Springer Science-Bussiness Media, 2005.
11. *Rugh W. J.* Linear System Theory. Prentice-Hall Inc., 1996.
12. *Tranninger M., Seeber R., Zhuk S., Steinberger M., Horn M.* Detectability Analysis and Observer Design for Linear Time Varying Systems // IEEE Control Systems Letters. 2020, Vol. 4, N 2. P. 331–336.
13. *Tranninger M., Zhuk S., Steinberger M., Fridman L., Horn M*. Non-Uniform Stability, Detectability, and, Sliding Mode Observer Design for Time Varying Systems with Unknown Inputs //arXiv preprint arXiv:1809.06460. 2018.
14. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A*. Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing // IEEE Trans. on Automatic Control. 2016. Vol. 62, N 7. P. 3546–3550.
15. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A*. Parameters estimation via dynamic regressor extension and mixing // Amer. Control Conf. (ACC). IEEE. 2016. P. 6971–6976.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ольга Андреевна Козачёк — аспирант; Университет ИТМО, факультет систем робототехники и управления; E-mail: oakozachek@itmo.ru

Алексей Алексеевич Бобцов — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультет систем робототехники и управления; E-mail: bobtsov@mail.ru

Поступила в редакцию 14.01.25; одобрена после рецензирования 17.01.25; принята к публикации 27.03.25.

REFERENCES

1. Kalenova V.I., Morozov V.M. *Lineynyye nestatsionarnyye sistemy i ikh prilozheniya k zadacham mekhaniki* (Linear Non-stationary Systems and Their Applications to Problems of Mechanics), Moscow, 2010, 208 p., ISBN 978-5-9221-1231-4. (in Russ.)
2. Balandin D.V., Kogan M.M. *Automation and Remote Control*, 2020, no. 8, pp. 1367–1384.
3. Haotian Xu, Shuai Liu, Shangwei Zhao, Jingcheng Wang, *ISA Transactions*, 2023, vol. 138, pp. 329–340, DOI: 10.1016/j.isatra.2023.03.002.
4. Venkateswaran S., Kravaris C. *LIFAC-PapersOnLine*, 2023, no. 1(56), pp. 61–66.
5. Gao F., Jiang G., Zhang Z., Song J. *Proc. of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation, IEEE,* 2012, pp. 3281–3285.
6. Wang F., Zong M., Chen W. *2017 IEEE 2nd Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conf*. (ITNEC), IEEE, 2017, pp. 1688–1691.
7. Spong M.W., Vidyasagar M. *Robot Dynamics and control*, John Wiley & Sons, USA, 1989.
8. Bobtsov A., Ortega R., Yi B., Nikolaev N. *Intern. J. of Control*, 2021, pp. 1–13.
9. Ortega R., Bobtsov A, Nikolaev N., Schiffer J., Dochain D. *Automatica*, 2021, vol. 129, p. 109635.
10. Bullo F., Lewis A. *Geometric Control of Mechanical Systems*, NY, Springer Science-Bussiness Media, 2005.
11. Rugh W.J. *Linear system theory*, Prentice-Hall, Inc., 1996.
12. Tranninger M., Seeber R., Zhuk S., Steinberger M., and Horn M. *IEEE Control Systems Letters*, 2020, no. 2(4), pp. 331–336.
13. Tranninger M., Zhuk S., Steinberger M., Fridman L., Horn M. *arXiv preprint*, arXiv:1809.06460, 2018.
14. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., and Pyrkin A. *IEEE Transact. on Automatic Control*, 2016, no. 7(62), pp. 3546–3550.
15. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. *2016 American Control Conf. (ACC),* IEEE, 2016, pp. 6971–6976.

DATA ON AUTHORS

Olga A. Kozachek — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Robotic Systems and Control; E-mail: oakozachek@itmo.ru

Alexey A. Bobtsov — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Robotic Systems and Control; E-mail: bobtsov@mail.ru

Received 14.01.25; approved after reviewing 17.01.25; accepted for publication 27.03.25.