УДК 62-50

Д. С. Кабанов

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЯДЕРНЫМ РЕАКТОРОМ С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассматривается задача оптимального управления ядерным реактором по неполным данным. Решение основано на принципе разделения с использованием фильтра Калмана и алгоритма оптимального управления по принципу максимума. Приведены результаты численного моделирования, которое позволило установить начальные значения параметров краевой задачи, обеспечивающие сходимость итерационной процедуры при воздействии случайных возмущений.

Ключевые слова: *оптимальная фильтрация, управление по принципу максимума, метод Ньютона.*

Решение задачи оптимального управления такой сложной системой, как ядерный реактор связано с трудностями, обусловленными необходимостью решения двухточечной краевой задачи. При решении по неполным данным терминальной задачи управления ядерным реактором, модель которого описывает одиночную группу медленных нейтронов [1, 2], требуется увеличить плотность потока нейтронов от исходного состояния до заданного конечного в фиксированный момент времени при минимальных затратах на управление. Использование принципа разделения и классических целевых функционалов позволяет свести алгоритм управления к уравнениям фильтра Калмана и решению двухточечной краевой задачи. Решение этой задачи связано с итерационной процедурой, сходимость которой существенно зависит от выбора начальных значений параметров краевой задачи [1, 3]. В результате применения метода Ньютона для решения этой задачи разработан алгоритм управления и рассмотрены варианты задачи с фиксированным и свободным правым концом [1, 3, 4].

Рассмотрим модель ядерного реактора в виде кинетических уравнений для размножения медленных нейтронов [1]:

$$\dot{x} = f(x,u,t) + \xi_x; \tag{1}$$

$$f(x,u,t) = (f_1, f_2)^T,\ f_1 = \frac{(\rho-\beta)n}{\Lambda} + \lambda c,\ f_2 = \frac{\beta}{\Lambda} n - \lambda c,$$

где $x = (n,c)^T$ — вектор состояния системы; n — поток нейтронов; c — поток возбужденных радиоактивных ядер; ρ — реактивность (принимается за управление); β — доля запаздывающих нейтронов деления по отношению к мгновенным нейтронам деления; Λ — эффективное время жизни нейтронов; λ — постоянная распада для возбужденных ядер; $\xi_x = [\xi_{xn}, 0]^T$, ξ_{xn} — случайные возмущения типа белого шума с интенсивностью $B_{xn} = \sigma_{xn}^2$. Величины β, Λ, λ считаются постоянными, а начальные значения переменных n и c заданными.

Уравнение наблюдения имеет вид

$$z = Gx + \xi_z, \tag{2}$$

где $z = z_n$ — вектор измерений параметров наблюдаемого процесса; $G = (1\quad 0)$; $\xi_z = \xi_n$ — случайный процесс типа белого шума с интенсивностью $B_z = B_{zn} = \sigma_{zn}^2$.

Требуется увеличить поток нейтронов от исходного состояния $n(t_0)$ до заданного конечного n_f в момент времени t_f при минимальных затратах на управление.

Задача рассматривалась в двух постановках:

1) с заданным граничным условием $n(t_f)=n_f$ при минимизации функционала Лагранжа

$$I=0,5\int_{t_0}^{t_f}\gamma\rho^2 dt;$$

2) с целевым функционалом Больца

$$I=0,5\alpha\left[n(t_f)-n_f\right]^2+0,5\int_{t_0}^{t_f}\gamma\rho^2 dt,$$

здесь α, γ — заданные коэффициенты.

В соответствии с принципом разделения задаче управления предшествует *задача оценивания вектора состояния системы* по неполным данным, которые определяются уравнением (2).

Оптимальную оценку вектора x можно вычислить с помощью фильтра Калмана [1, 3], уравнения которого для данной задачи имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\hat{n}}=\frac{\rho-\beta}{\Lambda}\hat{n}+\lambda\hat{c}+R_{11}\sigma_{zn}^{-2}(z_n-\hat{n});\\
&\dot{\hat{c}}=\frac{\beta}{\Lambda}\hat{n}-\lambda\hat{c}+R_{21}\sigma_{zn}^{-2}(z_n-\hat{n});\\
&\dot{R}=f_x R+Rf_x^T-RG^T B_z^{-1}GR+B_x,\ R(t_0)=R_0,
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

здесь $f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}$; $R_0(1,1)=9\sigma_{xn}^2$; $B_x=\mathrm{diag}(B_{xn},0)$; остальные элементы матрицы начальных ковариаций ошибок оценивания принимались равными нулю.

Для решения второй части задачи — *выбора оптимального управления по принципу максимума* — полагаем, что вектор состояния известен точно и равен вектору оценок состояния, определенному в системе (3). Чтобы вывести уравнения, составляющие алгоритм управления по принципу максимума, запишем гамильтониан задачи

$$H(x,u,t)=p_n\left(\frac{\rho-\beta}{\Lambda}n+\lambda c\right)+p_c\left(\frac{\beta n}{\Lambda}-\lambda c\right)+0,5\gamma\rho^2.$$

Уравнения для сопряженных переменных $p=(p_n,p_c)^T$ имеют вид [1—3]

$$\dot{p}_n=-\frac{\partial H}{\partial n}=-p_n\frac{\rho-\beta}{\Lambda}-p_c\frac{\beta}{\Lambda},\quad \dot{p}_c=-\frac{\partial H}{\partial c}=-p_n\lambda+p_c\lambda \qquad (4)$$

при граничных условиях $p_n(t_f)=\alpha\left[n(t_f)-n_f\right]$ (для второго варианта постановки задачи).

Управление определяется из условия $\dfrac{\partial H}{\partial\rho}=0$ как

$$\rho(t)=-\gamma^{-1}\frac{n(t)}{\Lambda}p_n(t).$$

Двухточечную краевую задачу для уравнений (1), (4) при соответствующих граничных условиях решим методом Ньютона. Для этого введем вектор невязок $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)^T$, $\Phi_1=n(t_f)-n_f$, $\Phi_2=\dot{n}(t_f)-\dot{n}_f$, неявным образом зависящий от параметров краевой задачи: $r=(p_n(t_0),p_c(t_0))^T$, здесь $\dot{n}(t_f)=f_1(t_f)$.

Значения вектора r вычисляются по следующему рекуррентному соотношению: $r_{i+1} = r_i + \Delta r$, $\Delta r = -s\Phi_r^{-1}\Phi$, где матрица частных производных Φ_r и обратная ей матрица Φ_r^{-1} задаются выражениями

$$\Phi_r = \begin{bmatrix} \Phi_{1n} & \Phi_{1c} \\ \Phi_{2n} & \Phi_{2c} \end{bmatrix}; \quad \Phi_r^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Phi_{2c} & -\Phi_{1c} \\ -\Phi_{2n} & \Phi_{1n} \end{bmatrix},$$

где $\Phi_{1n} = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p_n}$, $\Phi_{1c} = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p_c}$, $\Phi_{2n} = \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial p_n}$, $\Phi_{2c} = \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial p_c}$; Δ — определитель матрицы Φ_r.

Ввиду неявной зависимости вектора Φ от вектора r матрица частных производных Φ_r находится численно. Скалярный множитель $s \in (0, 1]$ выбирается на каждой итерации исходя из условия $\left|\Phi(r_{i+1})\right| < \left|\Phi(r_i)\right|$, $\left|\Phi(r)\right| = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2}$. При достижении требований по точности решения задачи управления $\left|\Phi(r_{i+1})\right| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — заданная малая величина) итерации прекращаются.

Вначале расчет производился для детерминированного случая в целях нахождения таких значений вектора r, при которых обеспечивается устойчивая сходимость итерационной процедуры. Задача решалась при $n(t_0) = 0,5$ кВт, $c(t_0) = 32$ кВт, $\rho(t_0) = 0$, $\beta = 0,0064$, $\Lambda = 10^{-3}$ с, $\lambda = 0,1\,\text{с}^{-1}$, при этом требуемые значения следующие: $n_f = 5$ кВт, $\dot{n}_f = 0$. Для интервала оптимизации $t_f - t_0 = 1$ с, шага численного интегрирования по методу Рунге — Кутты $\Delta t = 0,1$ с, $\varepsilon = 0,1$, $\gamma = 1000$ получены следующие результаты при $r = (-0,004; -0,001)^T$: $n(t_f) = 5,021$ кВт, $\dot{n}(t_f) = 0,066$ кВт/с (за 3 итерации).

Для второго варианта постановки задачи с целевым функционалом Больца при тех же значениях вектора r и вектора невязок с компонентами $\Phi_1 = p_n(t_f) - \alpha[n(t_f) - n_f]$, $\Phi_2 = \dot{n}(t_f) - \dot{n}_f$ приемлемые результаты были получены при $\alpha = 0,000006$, $\varepsilon = 0,01$: $n(t_f) = 5,056$ кВт, $\dot{n}(t_f) = 0,000028$ кВт/с (за 12 итераций).

Решение задачи во втором варианте оказалось менее устойчивым к выбору параметров алгоритма, поэтому для решения задачи при воздействии возмущений ξ_x, ξ_z был выбран первый вариант постановки. Сравнение полученного решения с результатами применения алгоритма последовательной оптимизации [4] по иерархии целевых функционалов показало [2], что достижение реактором заданной конечной величины $n(f)$ потока нейтронов осуществляется посредством управления $\rho_{\max} = 8,86 \cdot 10^3$, тогда как в работе [2] $\rho_{\max} = 14 \cdot 10^3$. Кроме того, достигнута более высокая точность конечного значения производной $\dot{n}(t_f) = 0$ (в работе [2] значение $\dot{n}(t_f) = 0,5$ кВт/с зависит от точности итерационной процедуры подстройки модели прогнозирования). Преимущество алгоритма, рассмотренного в работе [2], заключается в малом объеме вычислений, что позволяет формировать управление в реальном времени динамики процесса.

Совместное решение задач фильтрации и управления выявило существенный недостаток рассмотренного в настоящей статье решения, обусловленный необходимостью задания параметров двухточечной краевой задачи, достаточно близких к точным значениям. Поэтому при расчете на интервале $t \in [0; 0,9]$ с для обеспечения сходимости итерационной процедуры шаг численного моделирования (Δt) принимался равным 0,02 с, а в конце расчета при $t \in (0,9; 1]$ с составил $\Delta t = 0,01$ с. Вычисления производились при следующих характеристиках случайных процессов (среднеквадратических отклонениях): $\sigma_{xn} = 0,1$ кВт/с, $\sigma_{zn} = 0,3$ кВт.

Получены следующие результаты: $n(t_f) = 5,025$ кВт, $\dot{\hat{n}}(t_f) = 5,01$ кВт. Как видно, численное моделирование подтвердило возможность решения задачи оптимального управления стохастической моделью ядерного реактора по неполным данным с использованием принципа разделения.

Исследования, описанные в настоящей статье, выполнены по гранту Российского фонда фундаментальных исследований, № 09-08-00829.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сейдж Э. П., Уайт Ч. С.* Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982. 392 с.

2. *Kabanov D., Kabanov S.* Application of algorithm of forecasting model to the optimal control of nuclear reactor // Proc. 4th MathMOD, 5—7 Febr., 2003, Vienna. Full Papers CD. Vol. 2. P. 1466—1471.

3. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. *А. А. Красовского*. М.: Наука, 1987. 712 с.

4. *Кабанов С. А.* Управление системами на прогнозирующих моделях. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 200 с.

Сведения об авторе

Дмитрий Сергеевич Кабанов — ГНПП „Регион“, Москва; инженер; E-mail: kabanovds@mail.ru

Рекомендована кафедрой
систем обработки информации и управления
БГТУ „ВОЕНМЕХ“, Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
07.12.07 г.