УДК 62.50

В. В. Григорьев, О. К. Мансурова, М. М. Мотылькова, Е. Ю. Рабыш,
В. Ю. Рюхин, Н. А. Черевко

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛЕЖЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для линейных дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами разработана процедура синтеза регулятора на основе метода модального управления, сводящаяся к решению системы матричных уравнений типа Сильвестра, число которых соответствует количеству интервалов дискретности, содержащихся в периоде изменения параметров системы. С использованием полученных результатов произведен синтез пропорционального регулятора и исследованы переходные процессы в системе пространственного слежения для типовых режимов ее работы — захвата и автосопровождения цели.

Ключевые слова: *дискретная система, периодическое изменение параметров, пропорциональный регулятор, качество процессов, математическое моделирование и анализ динамических свойств системы.*

Введение. В режиме захвата следящая система пространственного слежения по каналам угла места и азимута должна обеспечить заданное время переходного процесса с минимальным перерегулированием, а в режиме сопровождения цели — надежное, без срывов, слежение с минимальными ошибками. Одним из способов обеспечения высокого качества процессов в следящих локаторах с коническим сканированием является учет процессов, происходящих как внутри периода сканирования при посылках облучающих импульсов, так и интегральных характеристик процессов за период процесса сканирования, что особенно актуально для систем с редкими посылками за период сканирования. Математическая модель угломерной системы в этом случае сводится к системе разностных матричных уравнений с периодически изменяющимися коэффициентами.

С точки зрения теории управления системы с периодически изменяющимися коэффициентами являются нестационарными. Это обусловливает трудности, возникающие при построении процедур анализа качества процессов и синтеза регуляторов для такого рода систем. В настоящей статье предлагается использовать подход, который позволяет свести исследование нестационарной линейной дискретной системы с периодически изменяющимися коэффициентами к изучению стационарной системы путем рассмотрения поведения исходной системы в дискретные моменты времени, следующие через период изменения параметров. Очевидным достоинством такого подхода является то, что он позволит воспользоваться всем многообразием методов анализа качества и синтеза регуляторов для линейных стационарных систем.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение, описывающее модель замкнутой линейной дискретной системы с периодически изменяющимися коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} &x\big((mk+i)+1\big)=F_{i+1}x(mk+i), \;\; x(0), \\ &y(mk+i)=C_{i+1}x(mk+i), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где x — вектор состояния системы, $x \in R^n$; $x(0)$ — вектор начальных состояний; y — вектор регулируемых переменных, $y \in R^l$; $m = 0, 1, 2, \dots$ — дискретные моменты времени; k — число интервалов дискретности внутри периода изменения параметров; $i = 0, 1, \dots, (k-1)$ —

номер интервала дискретности внутри периода изменения параметров; F_{i+1} — k-периодическая ($n \times n$)-матрица описания замкнутой системы на ($i+1$)-м интервале дискретности внутри периода изменения параметров; C_{i+1} — k-периодическая ($l \times n$)-матрица выхода.

Сведем описание линейной нестационарной системы к описанию стационарной, рассмотрев поведение траекторий движения системы (1) на интервалах дискретности, следующих через период изменения параметров. Для этого запишем уравнения движения этой системы на каждом интервале дискретности внутри периода изменения параметров при двух значениях дискретных моментов времени:

— $m = 0$

$$\left.\begin{aligned} & x(1)=F_1 x(0), \\ & x(2)=F_2 x(1)=F_2 F_1 x(0), \\ & \ldots \\ & x(k-1)=F_{k-1} x(k-2)=F_{k-1} F_{k-2} \ldots F_2 F_1 x(0), \\ & x(k)=F_k x(k-1)=F_k F_{k-1} F_{k-2} \ldots F_2 F_1 x(0), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

— $m = 1$

$$\left.\begin{aligned} & x(k+1)=F_1 x(k)=F_1 F_k F_{k-1} F_{k-2} \ldots F_2 x(1), \\ & x(k+2)=F_2 x(k+1)=F_2 F_1 F_k F_{k-1} F_{k-2} \ldots F_3 x(2), \\ & \ldots \\ & x(2k-1)=F_{k-1} x(2k-2)=F_{k-1} F_{k-2} \ldots F_1 F_k x(k-1), \\ & x(2k)=F_k x(2k-1)=F_k F_{k-1} \ldots F_2 F_1 x(k). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Анализ систем уравнений (2) и (3) показывает, что в дискретные моменты времени, следующие через период изменения параметров, уравнения движения системы (1) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} & x((mk+i)+k)=\tilde{F}_{i+1} x(mk+i), \quad x(i), \\ & y(mk+i)=C_{i+1} x(mk+i), \quad i=\overline{0,(k-1)}, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

где

$$\tilde{F}_{i+1} = \prod_{j=i+1}^{k+i} F_{k+2i+1-j}$$

— периодическая обобщенная матрица описания ($i+1$)-го уравнения движения замкнутой системы; $x(i)$ — вектор обобщенных начальных состояний ($i+1$)-го уравнения движения замкнутой системы, который вычисляется следующим образом:

$$x(i)=\begin{cases} x(0) & \text{при } i=0, \\ F_i F_{i-1} \ldots F_2 F_1 x(0) & \text{при } i=\overline{1,(k-1)}. \end{cases} \quad (5)$$

Линейную дискретную систему с периодически изменяющимися коэффициентами в дискретные моменты времени, следующими через период изменения параметров, можно рассматривать как линейную стационарную [1, 2]. Из литературы [3, 4] известно, что линейная стационарная дискретная система будет устойчивой, если корни матрицы замкнутой системы находятся внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат. По аналогии следует, что система (4) будет устойчивой, если собственные числа матриц $\tilde{F}_{i+1}$ $\left(i=\overline{0,(k-1)}\right)$

будут находиться внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат. Таким образом, для того чтобы дискретная система с периодически изменяющимися коэффициентами была устойчивой, собственные числа всех k матриц, определяющих описание движений замкнутой системы для каждого из интервалов дискретности, следующих через период изменения параметров, должны находиться в круге единичного радиуса с центром в начале координат.

Синтез регуляторов для систем с периодически изменяющимися коэффициентами. Рассмотрим синтез модальных управлений (синтез пропорционального регулятора) для дискретной системы с периодически изменяющимися коэффициентами по заданным показателям качества переходных процессов. Рассмотрим объект уравнения (ОУ) вида:

$$\left.\begin{aligned} &x\big((mk+i)+1\big)=A_{i+1}x\big(mk+i\big)+B_{i+1}u\big(mk+i\big),\\ &y\big(mk+i\big)=C_{i+1}x\big(mk+i\big),\\ &e\big(mk+i\big)=g\big(mk+i\big)-y\big(mk+i\big);\ i=\overline{0,(k-1)},\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

где u — управляющее воздействие на систему, $u\in R^l$; g — вектор внешних воздействий, $g\in R^l$; e — вектор ошибки, $e\in R^l$; A_{i+1} — периодическая ($n\times n$)-матрица описания ОУ на (i+1)-м шаге внутри номера интервала дискретности внутри периода изменения параметров; B_{i+1} — периодическая ($n\times l$)-матрица входов ОУ по управляющему воздействию на (i+1)-м шаге внутри интервала дискретности внутри периода изменения параметров.

Поставим задачу спроектировать для системы (6) закон управления вида

$$u\big(mk+i\big)=-K_{i+1}x\big(mk+i\big),\ i=\overline{0,(k-1)}, \quad (7)$$

где K_{i+1} — периодическая ($l\times n$)-матрица линейных обратных связей (ЛОС) по состояниям ОУ на (i+1)-м шаге внутри интервала дискретности внутри периода изменения параметров; $K_{i+1}=\left[K_{e_{i+1}};\overline{K}_{i+1}\right]$; $K_{e_{i+1}}$ — периодическая ($l\times l$)-матрица ЛОС по ошибке на (i+1)-м интервале дискретности внутри периода изменения параметров; $\overline{K}_{i+1}$ — периодическая $\big(l\times(n-l)\big)$-матрица ЛОС по состояниям $\overline{x}=\left[x_{l+1};\ldots;x_n\right]^T$ на (i+1)-м интервале дискретности внутри периода изменения параметров.

Закон управления вида (7) должен обеспечивать в замкнутой системе требуемые динамические показатели качества. Уравнения движения замкнутой системы с проектируемым регулятором относительно переходной составляющей, по которой и определяются динамические показатели качества (время переходного процесса, перерегулирование), имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &x_n\big((mk+i)+1\big)=F_{i+1}x_n\big(mk+i\big),\\ &y_n\big(mk+i\big)=C_{i+1}x_n\big(mk+i\big),\\ &i=\overline{0,(k-1)},\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

где $F_{i+1}=A_{i+1}-B_{i+1}K_{i+1}$ — периодическая матрица описания замкнутой системы на (i+1)-м интервале дискретности внутри периода изменения параметров.

Рассмотрим поведение уравнения движения системы (8) на каждом интервале дискретности внутри периода изменения параметров k, которое в этом случае принимает вид системы, состоящей из k уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&x_n\left(\left(mk+i\right)+k\right)=\tilde{F}_{i+1}x_n\left(mk+i\right),\\&y_n\left(mk+i\right)=C_{i+1}x_n\left(mk+i\right),\\&\quad i=\overline{0,\left(k-1\right)}.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

В соответствии с исходной системой (8) назначим эталонную модель:

$$\left.\begin{aligned}&z_э\left(\left(mk+i\right)+1\right)=\Gamma_э z_э\left(mk+i\right),\qquad z_э\left(0\right),\\&\upsilon_э\left(mk+i\right)=-H_э z_э\left(mk+i\right),\qquad i=\overline{0,\left(k-1\right)},\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

где $z_э$ — вектор состояния эталонной модели, размерность которого совпадает с размерностью вектора x системы (6); $\upsilon_э$ — вектор выхода эталонной модели, размерность которого совпадает с размерностью вектора u системы (6); $\Gamma_э$ — ($n\times n$)-матрица описания эталонной модели; $H_э$ — ($l\times n$)-матрица выхода эталонной модели.

Рассмотрим поведение системы (10) на интервалах дискретности внутри периода изменения параметров

$$\left.\begin{aligned}&z_э\left(\left(mk+i\right)+k\right)=\tilde{\Gamma}_э z_э\left(mk+i\right),\qquad z_э\left(i\right),\\&\upsilon_э\left(mk+i\right)=-H_э z_э\left(mk+i\right),\qquad i=\overline{0,\left(k-1\right)},\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

где $\tilde{\Gamma}_э=\Gamma_э^k$ — обобщенная матрица эталонной модели для интервалов дискретности внутри периода изменения параметров; $z_э(i)=\Gamma_э^i z_э(0)$ — вектор обобщенных начальных состояний (i+1)-го уравнения движения эталонной модели через интервал дискретности внутри периода изменения параметров.

Заданием матрицы $\Gamma_э$ определяются требуемые собственные числа замкнутой системы (10), которые будут одинаковы на каждом интервале дискретности $i=\overline{0,(k-1)}$, они удовлетворяют характеристическому уравнению матрицы описания эталонной модели $\det\left[\Gamma_э-\lambda I\right]=0$. Выберем матрицу $\Gamma_э$ таким образом, чтобы обеспечить требуемый характеристический полином матрицы $\tilde{\Gamma}_э$ системы (11), т.е. если λ_j^* $\left(j=\overline{1,n}\right)$ — собственные числа матрицы $\tilde{\Gamma}_э$, а λ_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ — собственные числа матрицы $\Gamma_э$, то

$$\lambda_j=\sqrt[k]{\lambda_j^*},\quad j=\overline{1,n}.$$

При назначении эталонной модели матрицу $H_э$ выбирают из условия полной наблюдаемости пары матриц $\left(\tilde{\Gamma}_э, H_э\right)$.

Искомые матрицы ЛОС K_{i+1} должны обеспечивать на каждом интервале дискретности $i=\overline{0,(k-1)}$ совпадение собственных чисел матриц $\tilde{F}_{i+1}$, определяющих свойства замкнутой системы на этих интервалах дискретности с собственными числами матрицы $\tilde{\Gamma}_э$ эталонной модели (11). Более подробно описание алгоритма построения регуляторов приведено в [1, 7].

Запишем только, что искомая периодическая матрица ЛОС статического регулятора K_{i+1} $\left(i=\overline{0,(k-1)}\right)$ определяется следующим образом:

$$K_{i+1}=H_э M_{i+1}^{-1},\ i=\overline{0,\left(k-1\right)}.$$

На рис. 1 приведена функциональная схема дискретной системы с периодически изменяющимися коэффициентами с построенным пропорциональным регулятором.

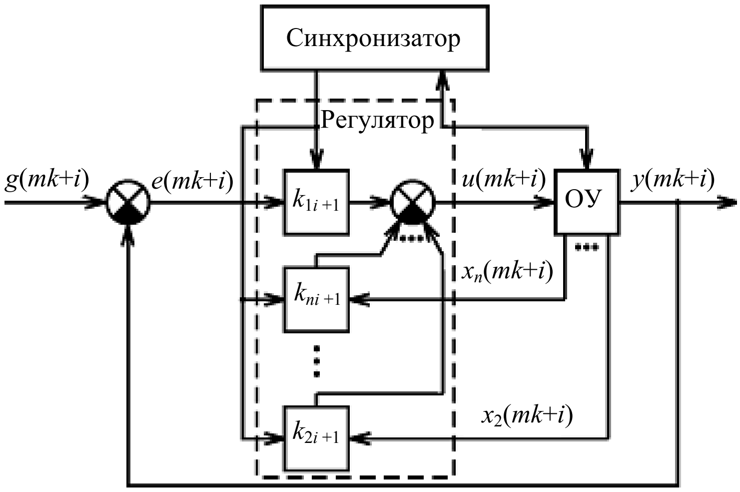

Рис. 1

Приведенный алгоритм обобщается в работах [1, 7] и для построения пропорционально-интегрального регулятора. Функциональная схема дискретной системы с периодически изменяющимися коэффициентами с регулятором такого типа приведена на рис. 2.

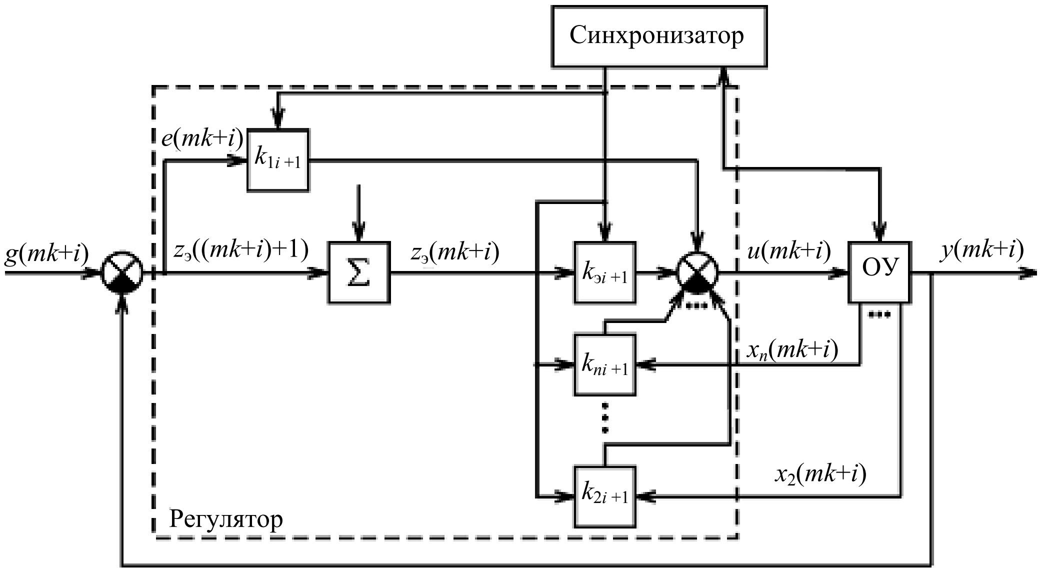

Рис. 2

Моделирование системы пространственного слежения. С помощью пакета моделирования Simulink были исследованы процессы в следящей локационной станции с коническим сканированием с пропорционально-интегральным регулятором.

На рис. 3 приведены траектории движения системы в пространстве выходов для режима захвата при разорванной интегральной связи (*а*) и при ее наличии (*б*) в случае постоянных входных воздействий по каждому из каналов угломерного тракта. На рисунке приведены восемь траекторий движения для различных вариантов соотношения амплитуд входных воздействий, причем входные воздействия выбирались таким образом, чтобы модуль амплитуды входного воздействия $\|g\|$ был постоянен и равен двум.

На рис. 4 приведены траектории движения системы в пространстве ошибок для режима слежения при разорванной интегральной связи (*а*) и при ее наличии (*б*) в случае линейно возрастающих входных воздействий по каждому из каналов угломерного тракта. На рисунке приведены восемь траекторий движения для различных вариантов соотношения скоростей входных воздействий, причем входные воздействия выбирались таким образом, чтобы модуль величины скорости возрастания входного воздействия $\left\| V_g \right\|$ был постоянен и равен двум.

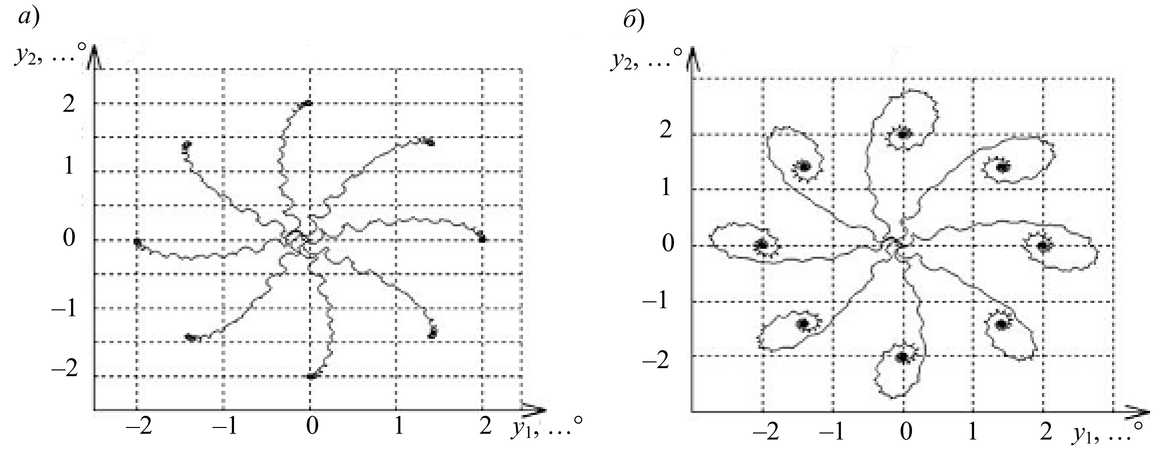

Рис. 3

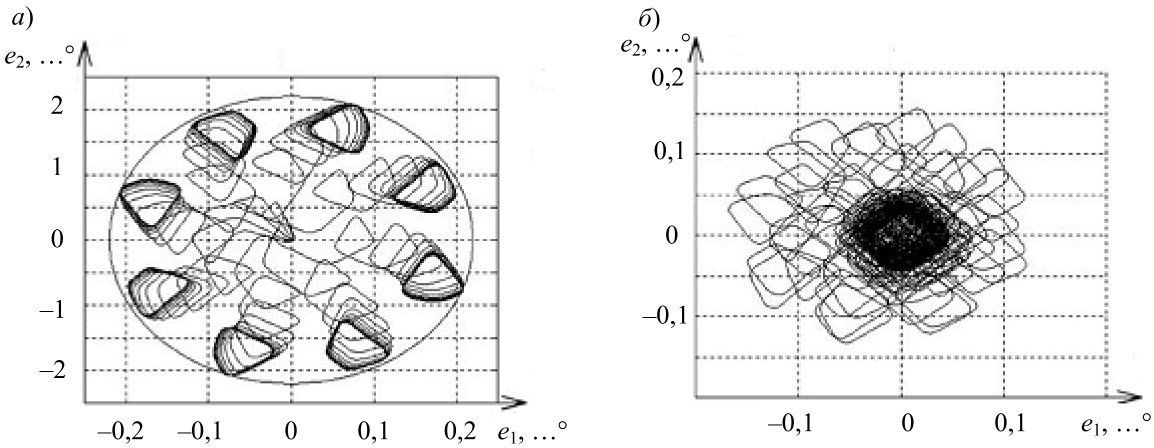

Рис. 4

Также из результатов моделирования можно сделать вывод, что при проектировании регуляторов для следящей локационной станции с коническим сканированием предпочтительно в режиме захвата использовать пропорциональный регулятор, а пропорционально-интегральный регулятор — в режиме слежения, так как он обеспечивает более точные результаты. Этого можно достичь, если для системы спроектировать пропорционально-интегральный регулятор, но в режиме захвата разрывать интегральную связь.

Заключение. В настоящей статье описан подход, который позволяет свести исследование нестационарной линейной дискретной системы с периодически изменяющимися коэффициентами к изучению стационарной системы, описание которой задается в интервалы дискретности, следующие через период изменения параметров. Проведено исследование системы пространственного слежения с периодическими коэффициентами в наиболее распространенных режимах ее работы.

Работа поддержана грантом РФФИ № 09-08-00857-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьев В. В., Ткаченко В. Р., Бушуев А. Б.* Синтез модальных управлений для систем с периодическими коэффициентами // Управление в оптических и электромеханических системах: Межинститутский сборник. Л.: ЛИТМО, 1989. С. 40—44.

2. *Рюхин В. Ю.* Особенности исследования дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами // Тез. докл. XXX науч.-технич. конф. профессорско-преподавательского состава. СПб: ИТМО (ТУ), 1999. С. 68.

3. *Иванов В. А., Ющенко А. С.* Теория дискретных систем автоматического управления. М.: Наука, 1983. 336 с.

4. *Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Лаврентьев В. В., Ушаков А. В.* Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1983. 245 с.

5. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Г.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 140 с.

6. *Бушуев А. Б., Григорьев В. В., Литвинов Ю. Н.* Синтез управлений по заданным оценкам качества для дискретных систем с изменяющимися параметрами // Автоматика и Телемеханика. 1984. № 11. С. 10—18.

7. *Бушуев А. Б., Григорьев В. В., Котельников Ю. П., Михайлов С. В., Рюхин В. Ю., Черноусов В. В.* Проектирование регуляторов для систем с периодически изменяющимися коэффициентами // Изв. вузов. Приборостроение. 1998. Т. 41, № 7. С. 19—22.

Сведения об авторах

Валерий Владимирович Григорьев — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики;
E-mail: grigvv@yandex.ru

Ольга Карибековна Мансурова — канд. техн. наук, доцент; Северо-Западный государственный заочный технический университет, кафедра автоматизация производственных процессов, Санкт-Петербург

Мария Михайловна Мотылькова — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: motylkovamm@yandex.ru

Евгений Юрьевич Рабыш — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: Rabyshj@yandex.com

Валентин Юрьевич Рюхин — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики

Николай Александрович Черевко — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: epostbox1@mail.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
01.07.09 г.