УДК 62.50

А. В. Ушаков, А. Ю. Цвентарный

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОДНОКАНАЛЬНЫМИ ОБЪЕКТАМИ ПРИ СЛОЖНОМ ЭКЗОГЕННОМ СТОХАСТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Решается задача синтеза модального управления непрерывным объектом типа „одномерный вход—выход“ в условиях сложного экзогенного стохастического воздействия на основе концепции векторно-матричного подобия проектируемой системы сформированной полиномиальной динамической модальной модели. Приводится пример.

Ключевые слова: *сложное экзогенное стохастическое воздействие, динамический объект, модальное управление.*

Введение. В сложившейся практике синтеза управления непрерывными объектами с целью достижения необходимых динамических свойств формируемой системы в условиях экзогенных стохастических воздействий (ЭСВ) используются три типовые модели ЭСВ [1—3].

Первая модель ЭСВ описывает стационарное в широком смысле стохастическое воздействие $w(t)$ типа „белый шум“, характеризующееся интенсивностью N и функцией ковариации $R_w(\tau)=N\delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака. Данная модель ЭСВ является физически не реализуемой, она представляет собой математическую абстракцию, используемую в вычислительной практике при формировании аналитического описания стохастических процессов.

Вторая модель ЭСВ описывает стационарное в широком смысле стохастическое воздействие $\xi(t)$ типа „экспоненциально коррелированный“ окрашенный шум (ЭКОШ), формируемый из белого шума интенсивностью N с помощью формирующего фильтра (ФФ) первого порядка в виде апериодического звена с сопрягающей частотой $\Omega_{\text{ф}}$ так, что дисперсия D_ξ ЭКОШ определяется выражением $D_\xi = 0,5N\Omega_{\text{ф}}$ [3]. Характерным примером этого вида стохастического воздействия является силовое ветровое воздействие на конструкции широкого диапазона применения.

Третья модель ЭСВ описывает стационарное в широком смысле стохастическое воздействие $\eta(t)$ вида „окрашенный шум типа регулярная качка“ (ОШРК), формируемый из белого шума интенсивностью N с помощью формирующего фильтра второго порядка в виде колебательного звена с сопрягающей частотой $\Omega_{\text{к}}$ и коэффициентом демпфирования ς так, что дисперсия D_η ОШРК определяется выражением $D_\eta = 0,25N\Omega_{\text{к}}\varsigma^{-1}$ [3]. Характерным примером реализации этого вида воздействия является колебательное движение некоторого плавсредства при волнении водной поверхности.

Однако, системная практика применения, особенно в задачах следящего автоматического измерения деформаций больших пространственных конструкций, которые характеризуются слабым демпфированием и представляют собой колебательные звенья второго порядка, вызываемых воздействием ветра, приводит к ситуации, когда измеряемая деформация таких конструкций зависит от сложного стохастического воздействия.

В настоящей работе рассматривается задача построения отдельных каналов типа „одномерный вход—выход“ автоматической измерительной системы (АИС), функционирующей по принципу следящего преобразования деформаций, представляющей собой планарное сложное стохастическое экзогенное воздействие (СЭСВ) на входе каналов АИС с использованием возможностей модального управления. Под СЭСВ авторы понимают стационарное в широком смысле воздействие, сформированное из белого шума интенсивностью N с помощью составного ФФ, реализованного в виде последовательной цепочки из апериодического звена первого порядка с выходным сигналом $\xi(t)$ и колебательного звена второго порядка с выходным сигналом $\eta(t)$. Это последовательное соединение апериодического и колебательного звеньев будем именовать формирующей СЭСВ цепью (ФЦ) с размерностью $n_{\text{ФЦ}}$.

Формирование полиномиальной динамической модальной модели с желаемыми показателями при СЭСВ. В рассматриваемой задаче формируются показатели полиномиальной динамической модальной модели (ММ) с передаточной функцией „вход—выход“ (ВВ) $\Phi_{\text{ММ}}(s)$ в условиях действия на нее СЭСВ. Модель СЭСВ с передаточной функцией ВВ $\Phi_{\text{СЭСВ}}(s)$ представляет собой последовательное соединение моделей типа ЭКОШ и ОШРК соответственно с передаточными функциями (ПФ) типа $\Phi_{\text{ЭКОШ}}(s)$ и $\Phi_{\text{ОШРК}}(s)$ ВВ, задаваемое выражениями

$$\Phi_{\text{ЭКОШ}}(s) = \frac{\xi(s)}{w(s)} = \frac{\Omega_{\text{ф}}}{\Omega_{\text{ф}} + s}, \tag{1}$$

$$\Phi_{\text{ОШРК}}(s) = \frac{\eta(s)}{\xi(s)} = \frac{\Omega_{\text{к}}^2}{s^2 + 2\varsigma\Omega_{\text{к}}s + \Omega_{\text{к}}^2}, \tag{2}$$

$$\Phi_{\text{СЭСВ}}(s) = \Phi_{\text{ЭКОШ}}(s)\Phi_{\text{ОШРК}}(s) = \frac{\Omega_{\text{ф}}}{\Omega_{\text{ф}} + s}\frac{\Omega_{\text{к}}^2}{s^2 + 2\varsigma\Omega_{\text{к}}s + \Omega_{\text{к}}^2}. \tag{3}$$

Передаточная функция $\Phi_{\text{ММ}}(s)$ модальной модели формируется в классе передаточных функций, гарантирующих астатизм первого порядка, в параметризованной характеристической частотой ω_0 форме

$$\Phi_{\text{ММ}}(s)=\frac{y(s)}{\eta(s)}=\frac{v_n\omega_0^n}{s^n+\sum\limits_{i=1}^{n}v_i\omega_0^i s^{n-i}}=\frac{v_n\omega_0^n}{V(s,\,\omega_0)}\,, \tag{4}$$

здесь $y(s)$ — лапласов образ выходной переменной $y(t)$, относительно которой передаточные функции ВВ модальной модели и проектируемой системы методами модального управления совпадают; $V(s,\omega_0)$ — желаемый характеристический полином матриц состояния ММ и проектируемой системы. Отметим также, что выражение (4) позволяет при решении задачи формирования аналитических представлений показателей полиномиальной динамической ММ положить $\omega_0=1$ с последующим переходом в них от v_i к $v_i\omega_0^i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

В постановочной форме задача решается в общем виде, инвариантном относительно конкретных распределений (Баттерворта, Ньютона и др.) мод характеристического полинома $V(s,\omega_0)$. Векторно-матричное описание ММ использует сопровождающую характеристический полином $V(s,\omega_0)$ форму представления матрицы состояния ММ. В связи с тем что порядок формирователя СЭСВ равен трем, на первом этапе решения задачи авторы ограничились порядком n ММ не выше четырех. Это вызвано трудностями вычислительного характера, так как размерность матричных компонентов, входящих в уравнение Ляпунова [3], будет достигать 7×7, а также влиянием фактора обусловленности матричных компонентов уравнения на его решение. Тем не менее авторы полагают, что размерности, равной четырем, системы ОВВ-типа достаточно для модельного представления широкого класса проектируемых динамических систем.

При построении алгоритма формирования аналитического представления скалярных и матричных показателей как функций коэффициентов v_i $\left(v_i\omega_0^i\right)$ характеристического полинома матрицы состояния ММ, а также параметров составного формирователя ЭССВ таких, как $\Omega_{\text{ф}}$, $\Omega_{\text{к}}$ и ς, используются известные результаты анализа процессов в непрерывных системах, возбуждаемых в стационарном в широком смысле СЭВ типа „белый шум“ [2—4]. Очевидно, что если между исследуемой системой, которой является ММ, и источником „белого шума“ размещается сложный формирующий фильтр, то введение в рассмотрение агрегированной системы „ФФ—ММ“ порождает задачу формирования показателей ММ при стохастическом стационарном в широком смысле СЭВ типа СЭСВ, сводящуюся к случаю экзогенного воздействия типа „белый шум“.

Следует заметить, что для придания полученным аналитическим представлениям скалярных показателей ММ в виде дисперсий ее выхода D_y и ошибки D_ε как функции характеристической частоты ω_0 ММ целесообразно перейти к относительным представлениям. В итоге, аналитические выражения между собой будут связывать относительные переменные, заданные соотношениями

$$\overline{D}_y=D_yD_\eta^{-1};\ \overline{D}_\varepsilon=D_\varepsilon D_\eta^{-1};\ \overline{\omega}_0=\omega_0\Omega_{\text{к}}^{-1};\ \overline{\Omega}_{\text{ф}}=\Omega_{\text{ф}}\Omega_{\text{к}}^{-1}, \tag{5}$$

где $\overline{D}_y$, $\overline{D}_\varepsilon$, $\overline{\omega}_0$, $\overline{\Omega}_{\text{ф}}$, $\overline{\Omega}_{\text{к}}$ — соответственно относительные дисперсии выхода, ошибки, характеристическая частота, сопрягающая частота ФФ.

Ниже приведены аналитические выражения для $\overline{D}_y$ и $\overline{D}_\varepsilon$ для систем порядка $n_\Sigma = n_{\text{ФЦ}} + n$. При $n_\Sigma = 4$ выражения для относительных дисперсий ММ принимают вид:

$$\overline{D}_y = \frac{V_1\bar{\omega}_0\left(\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\left(V_1\bar{\omega}_0+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right)+2\varsigma\left(2\varsigma+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right)^{-1}\right)}{\left(V_1\bar{\omega}_0+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right)\left(V_1^2\bar{\omega}_0^2+2\varsigma V_1\bar{\omega}_0+1\right)};$$

$$\overline{D}_\varepsilon = \frac{\left(V_1\bar{\omega}_0+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right)\left(V_1^2\bar{\omega}_0^2+2\varsigma V_1\bar{\omega}_0+1\right)-V_1\bar{\omega}_0\left\{\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\left(V_1\bar{\omega}_0+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right)+2\varsigma\left(2\varsigma+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right)^{-1}\right\}}{\left(V_1\bar{\omega}_0+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right)\left(V_1^2\bar{\omega}_0^2+2\varsigma V_1\bar{\omega}_0+1\right)}.$$

При $n_\Sigma = 5$ для этих же дисперсий получаем представление

$$\overline{D}_y = \frac{\left\{\begin{array}{l} V_2\bar{\omega}_0^2\left\{\begin{array}{l} 2\varsigma V_1\bar{\omega}_0\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right)\left(\begin{array}{l} V_2\bar{\omega}_0^2\left\{1-V_2\bar{\omega}_0^2-2\varsigma\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\right\}+ \\ +\left\{V_2\bar{\omega}_0^2-1-V_1\bar{\omega}_0\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\right\} \end{array}\right)- \\ -\left(\begin{array}{l} \left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\left(2\varsigma+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right)\left(V_2\bar{\omega}_0^2+V_1\bar{\omega}_0\bar{\Omega}_{\text{ф}}+\bar{\Omega}_{\text{ф}}^2\right)+ \\ +2\varsigma\bar{\Omega}_{\text{ф}}-2\varsigma V_2\bar{\omega}_0^2\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right) \end{array}\right)\times \\ \times\left(V_1\bar{\omega}_0\left\{2\varsigma\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)+V_2\bar{\omega}_0^2-1\right\}+\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\right) \end{array}\right. \end{array}\right\}}{\begin{array}{l} V_1\bar{\omega}_0\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\left(V_2\bar{\omega}_0^2+V_1\bar{\omega}_0\bar{\Omega}_{\text{ф}}+\bar{\Omega}_{\text{ф}}^2\right)\left(2\varsigma+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right)\times \\ \times\left(V_2\bar{\omega}_0^2\left\{1-V_2\bar{\omega}_0^2-2\varsigma\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\right\}+\left\{V_2\bar{\omega}_0^2-1-V_1\bar{\omega}_0\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\right\}\right) \end{array}};$$

$$\overline{D}_\varepsilon = \frac{\left(\begin{array}{l} V_1\bar{\omega}_0\left\{\begin{array}{l} \left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\left(2\varsigma+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right)\left(V_2\bar{\omega}_0^2+V_1\bar{\omega}_0\bar{\Omega}_{\text{ф}}+\bar{\Omega}_{\text{ф}}^2\right)- \\ -2\varsigma V_2\bar{\omega}_0^2\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right) \end{array}\right\}\times \\ \times\left\{V_2\bar{\omega}_0^2\left(1-V_2\bar{\omega}_0^2-2\varsigma\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\right)+\left(V_2\bar{\omega}_0^2-1-V_1\bar{\omega}_0\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\right)\right\}+ \\ +V_2\bar{\omega}_0^2\left\{V_1\bar{\omega}_0\left(2\varsigma\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)+V_2\bar{\omega}_0^2-1\right)-\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\right\}\times \\ \times\left\{\begin{array}{l} \left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma\right)\left(2\varsigma+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right)\left(V_2\bar{\omega}_0^2+V_1\bar{\omega}_0\bar{\Omega}_{\text{ф}}+\bar{\Omega}_{\text{ф}}^2\right)+ \\ +2\varsigma\bar{\Omega}_{\text{ф}}-2\varsigma V_2\bar{\omega}_0^2\left(V_1\bar{\omega}_0+2\varsigma+\bar{\Omega}_{\text{ф}}\right) \end{array}\right\} \end{array}\right)}{\begin{array}{l} V_1\omega_0\left(V_1\omega_0+2\varsigma\Omega_{\text{к}}\right)\left(2\varsigma\Omega_{\text{к}}+\Omega_{\text{ф}}\right)\left(V_2\omega_0^2+V_1\omega_0\Omega_{\text{ф}}+\Omega_{\text{ф}}^2\right)\times \\ \times\left(V_2\omega_0^2\left\{\Omega_{\text{к}}^2-V_2\omega_0^2-2\varsigma\Omega_{\text{к}}\left(V_1\omega_0+2\varsigma\Omega_{\text{к}}\right)\right\}+\Omega_{\text{к}}^2\left\{V_2\omega_0^2-\Omega_{\text{к}}^2-V_1\omega_0\left(V_1\omega_0+2\varsigma\Omega_{\text{к}}\right)\right\}\right) \end{array}}.$$

Примеры конкретной реализации коэффициентов V_i характеристических полиномов матрицы состояния ММ для трех наиболее часто используемых распределений мод приведены в таблице.

Тип распределения мод	n	Коэффициенты		
		V_1	V_2	V_3
Распределение Баттерворта	1	1	—	—
	2	1,414	1	—
	3	2	2	1
Распределение Ньютона	1	1	—	—
	2	2	1	—
	3	3	3	1
Модифицированное распределение Ньютона	1	1	—	—
	2	$v+2$	$v+1$	—
	3	$2v^2+5v+2$	$2v^2+6v+3$	$2v^2+3v+1$

Модифицируемое распределение мод Ньютона (см. таблицу) записывается в форме

$$D(\lambda)=D(\lambda,\,\omega_0,\,\nu)=\prod_{i=0}^{n-1}\left(\lambda+\omega_0\left(1+i\nu\right)\right),\ \nu>0\,.$$

Основной результат. Полученные выше аналитические выражения для относительных значений дисперсий ошибки и выходной переменной формируемой ММ позволяют предложить следующий алгоритм синтеза МУ динамическими объектами ОВВ-типа.

Алгоритм

1. Сформировать модель формирующей цепи в виде последовательного соединения звеньев, описываемых выражениями (1), (2) и характеризующихся параметрами ς, $\Omega_{к}$ и $\Omega_{ф}$. Задать абсолютное значение дисперсии D_η СЭСВ проектируемой системы.

2. Сформировать требования к показателям качества проектируемой системы в переходном и установившемся (воспроизведения или парирования СЭСВ) режимах. В зависимости от постановки указанных задач сформировать требования к абсолютным значениям дисперсий $D_\varepsilon \le D_{\varepsilon R}$ ошибки и выхода $D_y \le D_{yR}$, осуществить переход к их относительным аналогам $\bar{D}_\varepsilon \le \bar{D}_{\varepsilon R}$ и $\bar{D}_y \le \bar{D}_{yR}$. Сформировать ММ заданного порядка n, для чего принять требуемое распределение мод и выбрать значения коэффициентов $V_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ характеристического полинома матрицы состояния ММ (см. таблицу).

3. Оценить значение относительной характеристической частоты $\bar{\omega}_0$ в зависимости от задачи из условия

$$\bar{\omega}_0=\arg\left\{\bar{D}_\varepsilon\left(n,\bar{\omega}_0,\varsigma,\bar{\Omega}_{ф},\bar{\Omega}_{к}\right)\le\bar{D}_{\varepsilon R}\right\}\vee\arg\left\{\bar{D}_y\left(n,\bar{\omega}_0,\varsigma,\bar{\Omega}_{ф},\bar{\Omega}_{к}\right)\le\bar{D}_{yR}\right\}.$$

4. Сформировать абсолютное значение характеристической частоты $\omega_0=\bar{\omega}_0\Omega_{к}$.

5. Сформировать характеристический полином матрицы состояния ММ в форме

$$D\left(s,\omega_0\right)=s^n+\sum_{i=1}^{n}v_i\omega_0^i s^{n-i}\,.$$

6. Сформировать $(n\times n)$-матрицу Γ состояния модальной модели с характеристическим полиномом

$$\det\left(sI-\Gamma\right)=D\left(s,\omega_0\right)=s^n+\sum_{i=1}^{n}v_i\omega_0^i s^{n-i}$$

в одном из канонических базисов.

7. Построить векторно-матричное (A, B, C)-представление объекта управления $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$; $y(t) = Cx(t)$, где x, u, y — соответственно векторы состояния, управления и выхода; A, B, C — соответственно матрицы состояния, управления и выхода ОУ, (A, B) — полностью управляемая пара, (A, C) — полностью наблюдаемая.

8. Завершить формирование ММ с парой матриц (Γ, H), где $\Gamma = \Gamma\left(\Omega_{ф}, \Omega_{к}, \varsigma, \omega_0\right)$, $H = \arg\left\{\mathrm{observ}(\Gamma, H) \& \dim(H) = \dim\left(B^T\right)\right\}$.

9. В предположении о справедливости гипотезы о непосредственной измеримости экзогенного воздействия $g(t) = \eta(t)$ и вектора состояния $x(t)$ сформировать сигнал управления в виде $u(t) = K_g g(t) - Kx(t)$, где матрицы K, K_g вычислить в соответствии с соотношениями

$$K = HM^{-1},\ M = \arg\{M\Gamma - AM = -BH\},$$

$$K_g = \arg\left\{-CM\Gamma^{-1}M^{-1}BK_g = I\right\} = -\left(CM\Gamma^{-1}M^{-1}B\right)^{-1}.$$

10. Построить векторно-матричное (F, G, C)-описание проектируемой системы $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t)$; $y(t) = Cx(t)$; $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$, где g, ε — соответственно вектор экзогенного воздействия и ошибка его воспроизведения, $F = A - BK$, $G = BK_g$.

11. Отказаться от гипотезы о непосредственной измеримости $g(t) = \eta(t)$, воспользоваться измеримостью вектора ошибки $\varepsilon(t)$ для формирования сигнала управления в форме $u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t)$, где $K_\varepsilon = K_g$, $K_x = K - K_g C$.

12. Провести комплексное компьютерное исследование спроектированной системы управления в среде компьютерного моделирования MatLab Simulink.

Заключение. Предложенная схема формирующей цепи универсальна, так устремление $\Omega_{к}$ и $\Omega_{ф}$ к бесконечности приводит к первому случаю формирования СЭВ, устремление только $\Omega_{к}$ к бесконечности — ко второму, а устремление только $\Omega_{ф}$ к бесконечности — к третьему случаю, тем самым с помощью полученных аналитических выражений для относительных значений дисперсии выхода $\bar{D}_y$ и ошибки $\bar{D}_\varepsilon$ при указанных переходах достигается целый класс решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. СПб: Изд-во „Профессия“, 2003.

2. *Дэвис М. Х. А.* Линейное оценивание и стохастическое управление / Пер. с англ.; под ред. *А. Н. Ширяева*. М.: Наука, 1984.

3. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления: Пер с англ. М.: Мир, 1977.

4. *Дударенко Н. А., Слита О. В., Ушаков А. В.* Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: Учеб. пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008.

Сведения об авторах

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики;
E-mail: Ushakov-AVG@yandex.ru

Артем Юрьевич Цвентарный — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: Taifyn@nm.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
01.07.09 г.