УДК 62.50

Н. А. Дударенко, М. В. Полякова, А. В. Ушаков

ВЫРОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ВЫЗВАННОЕ УСТАЛОСТЬЮ ЕЕ АНТРОПОКОМПОНЕНТОВ

Рассматривается проблема контроля вырождения производственной динамической системы, вызванного фактором усталости ее антропокомпонентов. Решение задачи основано на формировании критериальной матрицы динамической системы типа „многомерный вход—многомерный выход".

Ключевые слова: *оценка вырождения, критериальная матрица, усталость антропокомпонентов.*

Введение. При исследовании производственной динамической системы можно выделить следующие типы вырождения: функциональное, системное и физическое (материальное). Система многомерного управления (СМУ) типа „многомерный вход—многомерный выход" (МВМВ) функционально оказывается вырожденной вследствие необходимости работы агрегатных компонентов, ее образующих, как единое целое [1]. Примером являются системы, работающие по бесскладовой технологии производства сложной продукции (по принципу конвейера). Системное вырождение комплексов МВМВ-типа вызывается неправильным распределением заявок по входам системы [2], неправильным согласованием их динамики с динамикой отдельных каналов, а также неудачно назначенными связями между последними. Физическое вырождение происходит в условиях нормального функционирования технологического оборудования системы МВМВ-типа вследствие смены технологии, влияния экономических факторов, приводящих к снятию заявок на обслуживание и др. [2].

В настоящей работе рассматривается функциональное вырождение системы. Поскольку проблема конструирования инструментария контроля вырождения рассмотрена в работе [2], в настоящей статье основное внимание сосредоточено на конструировании критериальной матрицы с учетом специфики формирования заявок на рабочий день для технологических (производственных, станочных) операторов (рабочих, антропокомпонентов), причем в качестве причины возможного вырождения принимается фактор их усталости. Проблема решается для случая, когда целевые намерения, реализуемые в форме производственного задания на рабочую смену, принадлежат классу конечномерных экзогенных задающих воздействий.

Формирование критериальной матрицы для динамической непрерывной системы при конечномерном экзогенном воздействии. Алгоритм контроля вырождения. Сложную динамическую систему МВМВ-типа зададим ее векторно-матричным описанием [4, 5]

$$\dot{x}(t)=Fx(t)+Gg(t);\quad x(0)=x(t)\big|_{t=0};\qquad y(t)=Cx(t), \tag{1}$$

где x, g, y — векторы состояния источника конечномерного задающего воздействия (ИКЗВ) выхода соответственно: $x\in R^n$; $g, y\in R^m$; F, G, C — соответственно матрицы состояния системы, ее входа и выхода объекта, согласованные по размерностям с размерностями векторов x, g и y так, что $F\in R^{n\times n}$, G, $C^T\in R^{n\times m}$.

ИЗКВ может быть представлен следующим образом:

$$\dot{z}(t)=Ez(t);\ z(0)=z(t)\big|_{t=0};\ g(t)=Pz(t), \tag{2}$$

где $z\in R^l$ — вектор состояния $E\in R^{l\times l}$ матрицы F и $P\in R^{m\times l}$ — выхода ИЗКВ. Размерность ИЗКВ выбирается минимальной

$$g(t)=Pz(t), \tag{3}$$

где $z(t)=e^{Et}z(0)$.

Утверждение 1. Если матрицы динамической системы МВМВ-типа (1) и ИКЗВ (2) связаны матричным уравнением Сильвестра (T — матрица преобразования подобия) [6, 7]

$$TE-FT=GP, \tag{4}$$

то решение системы (1) может быть представлено в форме

$$x(t)=e^{Ft}x(0)+(Te^{Et}-e^{Ft}T)z(0), \tag{5}$$

$$y(t)=Cx(t)=Ce^{Ft}x(0)+C(Te^{Et}-e^{Ft}T)z(0). \tag{6}$$

Доказательство. Объединив выражения (1) и (2) в агрегированную систему вида

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\tilde{F}\tilde{x}(t);\ \tilde{x}(0)=\mathrm{col}\{x(0),z(0)\};\ x(t)=\tilde{C}_x\tilde{x}(t);\ y(t)=\tilde{C}_y\tilde{x}(t), \tag{7}$$

где

$$\tilde{F}=\begin{bmatrix}F & GP\\ 0 & E\end{bmatrix};\ \tilde{C}_x=\begin{bmatrix}I_{n\times n} & 0_{n\times l}\end{bmatrix};\ \tilde{C}_y=\begin{bmatrix}C & 0_{m\times l}\end{bmatrix}, \tag{8}$$

для переменных $x(t)$ и $y(t)$ системы (1) на основе представления (2) можно записать

$$x(t)=\tilde{C}_xe^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0);\ y(t)=\tilde{C}_ye^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0);\ \tilde{x}(0)=\tilde{x}(0)\big|_{t=0}. \tag{9}$$

При вычислении матричной экспоненты $e^{\tilde{F}t}$ запишем матрицу $\tilde{F}$ (8) в форме

$$\tilde{F}=\begin{bmatrix}F & TE-FT\\ 0 & E\end{bmatrix}. \tag{10}$$

Если записать матричную экспоненту $e^{\tilde{F}t}$ в виде матричного степенного ряда

$$e^{\tilde{F}t}=I+\tilde{F}t+\frac{1}{2!}\tilde{F}^2t^2+\frac{1}{3!}\tilde{F}^3t^3+\ldots+\frac{1}{p!}\tilde{F}^pt^p, \tag{11}$$

в котором для степеней матрицы $\tilde{F}$ с учетом (10) можно записать

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{F}=\begin{bmatrix} F & TE-FT \\ 0 & E \end{bmatrix};\\
&\tilde{F}^2=\tilde{F}\tilde{F}=\begin{bmatrix} F & TE-FT \\ 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F & TE-FT \\ 0 & E \end{bmatrix}=\\
&\quad=\begin{bmatrix} F^2 & FTE-F^2T+TE^2-FTE \\ 0 & E^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F & TE-FT \\ 0 & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F^2 & TE^2-F^2T \\ 0 & E^2 \end{bmatrix};\\
&\tilde{F}^3=\tilde{F}^2\tilde{F}=\begin{bmatrix} F^2 & TE^2-F^2T \\ 0 & E^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F & TE-FT \\ 0 & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F^3 & TG^3-F^3T \\ 0 & G^3 \end{bmatrix};\\
&\vdots\\
&\tilde{F}^p=\tilde{F}^{p-1}\tilde{F}=\begin{bmatrix} F^{p-1} & TE^{p-1}-F^{p-1}T \\ 0 & E^{p-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F & TE-FT \\ 0 & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F^p & TE^p-F^pT \\ 0 & E^p \end{bmatrix}.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Подстановка (11) в матричный степенной ряд (10) позволяет представить матричную экспоненту $e^{\tilde{F}t}$ в форме

$$e^{\tilde{F}t}=\begin{bmatrix} e^{Ft} & Te^{Et}-e^{Ft}T \\ 0 & e^{Et} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$x_y(t)=Tz(t). \quad (14)$$

Матрица T является матрицей подобия установившейся составляющей вектора состояния системы МВМВ-типа (1) вектору состояния ИЗКВ.

Рассмотрим подробнее решение (6)

$$y(t)=Cx(t)=Ce^{Ft}x(0)+C(Te^{Et}-e^{Ft}T)z(0). \quad (15)$$

Оно содержит все компоненты движения системы по выходу: свободное $y_{\text{св}}(t)$ и вынужденное $y_{\text{в}}(t)$ движения, переходное движение $y_{\text{п}}(t)$ и движение $y_{\text{у}}(t)$ в установившемся режиме:

$$\left.\begin{aligned}
&y_{\text{св}}(t)=Ce^{Ft}x(0)=N_{\text{св}}(t)x(0),\\
&y_{\text{в}}(t)=C(Te^{Et}-e^{Ft}T)z(0)=N_{\text{в}}(t)z(0),\\
&y_{\text{п}}(t)=-Ce^{Ft}Tz(0)=N_{\text{п}}(t)z(0),\\
&y_{\text{у}}(t)=CTe^{Et}z(0)=N_{\text{у}}(t)z(0).
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Соотношения (16) являются основой для конструирования банка критериальных, параметризованных временем, матриц. Конкретное представление критериальной матрицы определяется моделью системы МВМВ-типа (1), видом экзогенного задающего воздействия, определяющего пару матриц (E,P) и, как следствие — получаем решение матричного уравнения Сильвестра (4) в виде матрицы T. Конкретный выбор критериальной матрицы из системы (16) определяется предметом исследования.

АЛГОРИТМ
контроля вырождения динамической системы
при конечномерном экзогенном воздействии (А1)

1. Задать $\{F,G,C\}$-представление динамической системы (1) МВМВ-типа.

2. Задать $\{E,P,z(0)\}$-представление ИКЗВ (2).

3. Задать допустимое значение $J_{\text{д}}$ функционала J [2].

4. Задать допустимое время наступления (фиксации факта) вырождения $t_{\text{д}}$.

5. Сформировать критериальную матрицу в одной из форм (16).

6. При моделировании в MatLab с зафиксировать реальное время t наступления вырождения.

7. При нарушении неравенства $t \geq t_{\text{д}}$ перейти к п. 1 алгоритма и произвести модификацию матриц G, F, C.

8. Зафиксировать результат, выйти из алгоритма, передать информацию аналитику.

Модель производственного участка как сложной динамической системы МВМВ-типа и контроль ее вырождения. Модель производственного участка может быть представлена динамической системой с m станочными операторами (рабочими, антропокомпонентами), объединенными в бригаду и выполняющими однотипные операции. Ежедневное производственное задание (ПЗ) бригаде представляет собой вектор

$$g(t)=g_0=\operatorname{col}\left\{g_{0j}=\text{const};\ j=\overline{1,m}\right\}. \tag{17}$$

Предположим, что производительность труда *j*-го рабочего устанавливается на максимальном уровне $v_{\max j}$ по нарастающему экспоненциальному закону

$$v_j(t)=v_{\max j}\left(1-e^{-\alpha_{1j}t}\right), \tag{18}$$

где α_{1j} — постоянная нарастания производительности труда.

Падение производительности труда станочного оператора вследствие усталости в течение рабочей смены снижается по спадающему экспоненциальному закону

$$v_j(t)=v_{\max j}e^{-\alpha_{2j}t}. \tag{19}$$

где α_{2j} — постоянная уставания антропокомпонента.

Правило остановки производственного процесса в момент $t=t_{sj}$ *j*-го рабочего зададим следующим образом:

$$t_{sj}=\min\left\{t=t_{\text{н}} \vee t_j=\arg\left\{\int_0^{t_j} v_j(t)\,dt=g_{0j}\right\}\right\}, \tag{20}$$

где $t_{\text{н}}$ — нормированная продолжительность рабочей смены, t_j — время выполнения *j*-м рабочим дневного ПЗ g_{0j}. В модели *j*-го рабочего все параметры — интервальные числа (использованы их медианные составляющие).

В динамической модели антропокомпонента присутствует интегрирующее звено, связывающее выходную продукцию рабочего и его производительность труда $v_j(t)$, а выполнение производственного задания характеризуется наличием единичной отрицательной обратной связи.

АЛГОРИТМ
формирования модельного представления производственной системы как динамической системы МВМВ-типа (А2)

1. Сформировать передаточную функцию „вход—выход“

$$\Phi_j(s)=y_j(s)/g_j(s)=\frac{W_j(s)}{1+W_j(s)},\quad W_j(s)=\frac{K_{jj}s}{(s+\alpha_{1j})(s+\alpha_{2j})s};\ j=\overline{1,m}$$

j-го рабочего, опираясь на соотношения (16), (17).

2. Сформировать передаточную матрицу „вход—выход“

$$\Phi(s)=\mathrm{diag}\left\{\Phi_j(s);\ j=\overline{1,m}\right\}$$

всей бригады, дополнив ее возможными перекрестными связями, не предусмотренными технологией выполнения ПЗ.

3. Построить динамическую модель бригады в форме (1) с матрицами F, G, C.

Критериальная матрица есть матрица отношения „вход—выход“, описывающая вынужденное движение системы

$$y_{\text{в}}(t)=C(Te^{Et}-e^{Ft}T)z(0) \tag{21}$$

ИКВВ в форме (17) характеризуется нулевой матрицей состояния так, что выполняется условие

$$E=0. \tag{22}$$

Учитывая (22) в (4), получим выражение относительно матрицы T

$$T=-F^{-1}GP. \tag{23}$$

Подставив в (21) условие (22), а затем (23), получим

$$y_{\text{в}}(t)=C(Te^{Et}-e^{Ft}T)z(0)=C(I-e^{Ft})Tz(0)=C(e^{Ft}-I)F^{-1}GPz(0). \tag{24}$$

Если в (24) учесть, что $Pz(0)=g(0)$, то критериальную матрицу можно записать

$$N(t)=C(e^{Ft}-I)F^{-1}G. \tag{25}$$

Алгоритм 1 для критериальной матрицы (24) позволяет решить проблемы вырождения производственной динамической системы, порождаемой фактором усталости ее антропокомпонентов.

Заключение. Полученные в работе результаты пока носят технологический характер. Формирование численных оценок процессов вырождения производственных систем [4] алгоритмическими средствами предлагаемой технологии требует знания численных значений системных параметров хотя бы в интервальном представлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дударенко Н. А., Полякова М. В., Ушаков А. В.* Достаточные алгебраические условия обобщенной синхронизируемости многоканальных динамических объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 5. С. 17—20.
2. *Дударенко Н. А., Полякова М. В., Ушаков А. В.* Конструирование вещественнозначной критериальной матрицы для одноканальной системы // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 11. С. 62—66.
3. *Ребрин Ю. И.* Основы экономики и управления производством. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005.
4. *Бочков А. Л., Дударенко Н. А., Ушаков А. В.* Синтез многомерных функционально вырожденных динамических систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2008. Т. 51, № 1. С. 25—29.
5. *Акунов Т. А., Ушаков А. В.* Синтез систем гарантированной модальной стабильности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4. С. 9—17.

6. *Дударенко Н. А., Слита О. В., Ушаков А. В.* Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: Учеб. пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008.

7. *Дударенко Н. А., Полякова М. В., Ушаков А. В.* Контроль вырождения сложных динамических систем созидательного типа с антропокомпонентами // Науч.-технич. вестн. СПбГУ ИТМО. Вып. 55. Управление, моделирование, информационная безопасность. 2008. 138 с.

Сведения об авторах

Наталия Александровна Дударенко — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: dudarenko@yandex.ru

Майя Вячеславовна Полякова — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: 12noch@mail.ru

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: Ushakov-AVG@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
01.07.09 г.