УДК 519.71

А. С. Кондрашов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСКОВ НА ЭЛЕМЕНТЫ САУ ПРИ ТЕХНИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается программная реализация задачи определения допусков на элементы САУ при технической реализации законов управления. Задача состоит в вычислении нижней и верхней границ коэффициентов интервального полинома, сопровождающего заданный гурвицев характеристический многочлен, описывающий замкнутую регулятором систему управления. Задача решена с применением математического аппарата полиномов Эрмита — Билера и альтернативных форм записи формул Виета.

Ключевые слова: *закон управления, динамическая система, треугольная матрица.*

Одной из основных характеристик системы автоматического управления (САУ) является надежность. Надежность — как внутренне свойство объекта — проявляется в его взаимодействии с другими объектами внутри системы, а также с внешней средой. Это свойство определяет эффективность функционирования системы. Возникает естественный вопрос: сохраняется ли это свойство при вариациях параметров математической модели САУ в некоторых пределах? Постановка такого вопроса вполне правомерна, поскольку любая математическая модель является приближенной. Варьировать параметры модели необходимо при реализации закона управления, полученного расчетным путем, и для учета изменения параметров САУ. Поскольку количество параметров, влияющих на надежную работу САУ, может быть достаточно велико, расчет возможного диапазона их изменения является процессом трудоемким.

Объектом исследований в настоящей статье является программная реализация алгоритма Подчукаева синтеза гурвицева интервального полинома, т.е. нахождение диапазона возможных вариаций коэффициентов интервального полинома

$$D(s) = s^n + \sum_{i=1}^{n} [\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i] s^{n-i},$$

сопровождающего заданный гурвицев характеристический многочлен (см., например, [1]), описывающий замкнутую регулятором систему управления:

$$d(s) = s^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s^{n-i} = 0,$$

где α_i, $i=\overline{1,n}$, — заданные коэффициенты исходного гурвицева характеристического многочлена; $\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i, i=\overline{1,n}$, $\underline{\alpha}_i < \alpha < \overline{\alpha}_i$, — неподдающиеся улучшению, согласно Подчукаеву, границы возможных вариаций этих коэффициентов, при которых сохраняется гурвицевость искомого интервального полинома.

Предложенный Подчукаевым алгоритм решения сформулированной задачи базируется на математическом аппарате полиномов Эрмита — Билера, с помощью которого исходный гурвицев характеристический многочлен представляется в виде суммы двух полиномов Эрмита — Билера (четной степени)

$$d(s)=G(\alpha_n,\ \alpha_{n-2},\ \alpha_{n-4},\ \ldots)+sH(\alpha_{n-1},\ \alpha_{n-3},\ \alpha_{n-5},\ \ldots),$$

для которых гурвицевость исходного полинома $d(s)$ (при условии $\alpha_1>0$) адекватна условию, что корни приведенных полиномов G и H Эрмита — Билера отрицательны, вещественны и перемежаются, т.е. удовлетворяют неравенству

$$0>\mu_1>\eta_1>\mu_2>\eta_2>\ldots>\mu_i>\eta_i\ldots \tag{1}$$

Согласно Подчукаеву в соответствии с критерием Эрмита — Билера можно записать условие гурвицевости полинома $D(s)$ в виде условия гурвицевости следующих четырех полиномов Харитонова:

$$\left.\begin{aligned}
d_1(s) &= G_1\left(\overline{\alpha}_n, \underline{\alpha}_{n-2}, \overline{\alpha}_{n-4}, \ldots\right) + sH_1\left(\overline{\alpha}_{n-1}, \underline{\alpha}_{n-3}, \overline{\alpha}_{n-5}, \ldots\right);\\
d_2(s) &= G_1\left(\overline{\alpha}_n, \underline{\alpha}_{n-2}, \overline{\alpha}_{n-4}, \ldots\right) + sH_2\left(\underline{\alpha}_{n-1}, \overline{\alpha}_{n-3}, \underline{\alpha}_{n-5}, \ldots\right);\\
d_3(s) &= G_2\left(\underline{\alpha}_n, \overline{\alpha}_{n-2}, \underline{\alpha}_{n-4}, \ldots\right) + sH_2\left(\underline{\alpha}_{n-1}, \overline{\alpha}_{n-3}, \underline{\alpha}_{n-5}, \ldots\right),\\
d_4(s) &= G_2\left(\underline{\alpha}_n, \overline{\alpha}_{n-2}, \underline{\alpha}_{n-4}, \ldots\right) + sH_1\left(\overline{\alpha}_{n-1}, \underline{\alpha}_{n-3}, \overline{\alpha}_{n-5}, \ldots\right).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Для каждого из этих полиномов выполняется неравенство (1). При этом пары полиномов $[\Phi_{G1}, \Phi_{G2}]$, $[\Phi_{H1}, \Phi_{H2}]$, сопровождающие приведенные полиномы G и H Эрмита — Билера, названы парами Лобачевского, отличительной особенностью которых является перемежаемость границ соответствующих коэффициентов полиномов, иллюстрируемая равенствами (2).

Программная реализация описанного выше алгоритма состоит в формировании пар Лобачевского с использованием альтернативных соотношений, полученных Подчукаевым, для записи формул Виета [1]. Это позволяет после умножения правой или левой соответствующих верхнетреугольных матриц на вектор границ корней положительных пар полиномов Φ_{Gi} и Φ_{Hi}, $i=1, 2$, получить вектор чередующихся верхних и нижних границ коэффициентов соответствующей пары Лобачевского.

После формирования пар Лобачевского окончательное вычисление границ коэффициентов искомого гурвицева интервального полинома осуществляется по следующим формулам:

— при нечетном n

$$\left.\begin{aligned}
&G_1(z)=\underline{\alpha}_1\Phi_{G1}(z),\ G_2(z)=\overline{\alpha}_1\Phi_{G2}(z);\\
&H_1(z)=\Phi_{H1}(z),\ H_2(z)=\Phi_{H2}(z);
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

— при четном n

$$\left.\begin{aligned}
&G_1(z)=\Phi_{G1}(z),\ G_2(z)=\Phi_{G2}(z);\\
&H_1(z)=\underline{\alpha}_1\Phi_{H1}(z),\ H_2(z)=\overline{\alpha}_1\Phi_{H2}(z).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В выражениях (3) и (4) учтены верхняя и нижняя границы коэффициента α_1, вычисленные по приведенным в работе [1] формулам.

Если исходный характеристический многочлен имеет нечетную степень, то полиномы G и H Эрмита — Билера будут одинаковой степени $[n/2]$, а подлежащие выбору границы коэффициента α_1 ($\underline{\alpha}_1$ и $\overline{\alpha}_1$) будут относиться к полиному G. Если же исходный характеристический многочлен имеет четную степень, порядок полинома H будет на единицу меньше порядка полинома G (равного $n/2$), а искомые границы коэффициента α_1 будут относиться к полиному H.

Программная реализация описанного выше алгоритма осуществлена на языке PHP, поскольку динамическое выделение памяти под рабочие массивы при использовании этого языка осуществляется обращением к встроенной функции unset(). Результатом применения этой функции является удаление рабочих массивов после последнего обращения к ним в теле программы.

Особенностью программной реализации рассмотренного алгоритма является формирование шести матриц, из которых — три левые верхнетреугольные для полинома G и три правые верхнетреугольные для полинома H. Отсюда следует, что часть кода, реализующая алгоритм формирования этих матриц, должна быть продублирована трижды для полинома G и шесть раз для полинома H (трижды в ветви “if” и трижды в ветви “else”). Тем самым код программы (без решения задачи его минимизации) будет длинным и неудобочитаемым, т.е. разобраться в нем и, тем более, внести какие-либо изменения будет проблематично.

Для того чтобы избежать дублирования похожих фрагментов кода программы, разработана система функций, позволяющих получить искомый результат с применением системы флагов, в зависимости от значений которых инициализируются параметры введенных в рассмотрение функций (граничные значения счетчиков циклов; порядки рабочих массивов, порядки правых и левых верхнетреугольных матриц и т.д.).

Научную новизну программной реализации задачи синтеза гурвицева интервального полинома, сопровождающего заданный гурвицев характеристический многочлен, составляет применение следующих функций.

1. Вычисление левой и правой верхнетреугольных матриц реализовано посредством одной функции, ее входными параметрами являются одномерный массив и служебный флаг, значение которого указывает на тип вычисляемой матрицы. В качестве массива выступает либо вектор корней соответствующего полинома (Φ_{Gi} или Φ_{Hi}), либо вектор границ корней положительной пары полиномов [Φ_{Gi}, Φ_{Hi}]. Порядок вектора определяется при его инициализации на основе порядка исходного гурвицева характеристического многочлена. Порядок вычисляемой матрицы равен порядку соответствующего вектора.

2. Согласно постановке задачи полиномы Φ_{Gi} и Φ_{Hi} Эрмита — Билера должны образовывать пару Лобачевского. Для того чтобы это условие выполнялось, необходимо уточнить определение первого ($\overline{\mu}_1$, $\underline{\mu}_1$) и/или последнего ($\overline{\eta}_n$, $\underline{\eta}_n$) элементов вектора границ корней положительных пар полиномов Φ_{Gi} и Φ_{Hi}, т.е. определить их исходя из системы неравенств, полученной в ходе умножения матрицы на вектор. Поэтому для программной реализации данной операции определена функция умножения матрицы на вектор, аргументами которой являются сами множители и результирующий вектор-произведение. Данному вектору присваиваются значения, полученные в ходе выполнения кода функции.

3. После этого необходимо инициализировать вектор из элементов правых частей системы неравенств при условии, что коэффициент при $\overline{\mu}_1$, $\underline{\mu}_1$, $\overline{\eta}_n$, $\underline{\eta}_n$ должен быть равен единице. Для этой цели определена функция, параметрами которой являются результирующий массив корней соответствующего полинома Эрмита — Билера, массив границ корней этого полинома (уточняется его первый или последний элемент) и соответствующая верхнетреугольная матрица.

4. Результатом решения системы неравенств является интервал, для оценки нижней и верхней границ которого определена функция, где используется вычисленный ранее вектор правых частей системы неравенств. В итоге уточненному значению вектора границ корней положительных пар полиномов Эрмита — Билера присваивается значение, равное середине полученного интервала. После этого определяется массив коэффициентов пары Лобачевского.

5. В предложенной Подчукаевым альтернативной записи формул Виета значения элементов верхнетреугольных матриц не зависят от граничных значений $\overline{\mu}_1$, $\underline{\mu}_1$ и $\overline{\eta}_n$, $\underline{\eta}_n$. Эти значения при произведении матрицы на вектор умножаются только на элементы первого (последнего) столбца матрицы. Поэтому для окончательного определения массива коэффициентов пар Лобачевского реализованы две функции (для полиномов G и H соответственно), с помощью которых выполняется перемножение первого (последнего) столбца соответствующей верхнетреугольной матрицы на первый (последний) элемент вектора границ корней положительных пар полиномов Φ_{Gi} и Φ_{Hi}. Умножение производится в цикле “for”. К полученным произведениям в этом же цикле прибавляются соответствующие по индексу значения данного вектора, инициализированные ранее (указанный вектор объявлен в тексте программы глобально). Эти значения и будут являться результатами перемножения остальных элементов матрицы на вектор. Поэтому применение данных функций вместо функций обычного перемножения матрицы на вектор позволяет избежать ненужных операций умножения.

6. Для программной реализации операций, отвечающих за выбор нижних и верхних границ коэффициентов интервального полинома, определены следующие функции. Посредством первой функции вычисляется отношение коэффициентов исходного гурвицева многочлена к соответствующим элементам сформированного ранее массива коэффициентов пар Лобачевского, среди которых определяются максимальный и минимальный элементы этого массива, и по соответствующим формулам вычисляются нижняя и верхняя границы коэффициента α_1. Для определения границ остальных коэффициентов объявлена вторая функция, с помощью которой производятся вычисления на основе соотношений (3) и (4): в итоге на экран выводятся искомые коэффициенты интервального полинома.

Результатом проделанной работы является программная реализация алгоритма синтеза гурвицева интервального полинома, позволяющая автоматизировать задачу определения допусков на элементы САУ при технической реализации законов управления [2]. Описанная выше программная реализация одной из важнейших задач теории автоматического управления размещена в среде аналитических вычислений „АНАЛИТИК-С“ (Toolbox „III. Анализ — Анализ грубости свойства асимптотической устойчивости гурвицева полинома“): http://www.sgau.ru/analitik_c/ (вычислительный сервис класса WEB 2.0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Подчукаев В. А.* Теория автоматического управления (аналитические методы). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 392 с.

2. *Подчукаев В. А., Кондрашов А. С., Мартынов П. В.* Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2008615000. Программная реализация задачи синтеза гурвицева интервального полинома, сопровождающего заданный гурвицев характеристический многочлен (зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 17 окт. 2008 г.). М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, 2008.

Сведения об авторе

Артем Сергеевич Кондрашов — аспирант; Саратовский государственный технический университет, кафедра технической кибернетики и информатики; E-mail: kondrashovas@gmail.com

Рекомендована кафедрой технической кибернетики и информатики

Поступила в редакцию 10.11.08 г.