УДК 621.391

Ю. А. Никитин

АНАЛИЗ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА ДЛЯ СИНТЕЗА ЧАСТОТ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО АРГУМЕНТА

Предложена математическая модель для анализа двух- и многоуровневых импульсных последовательностей на выходе конечного автомата (КА), выполненного в виде накапливающего сумматора или счетчика импульсов. С помощью функций целочисленного аргумента получены в свернутом виде аналитические выражения для временного и спектрального описания импульсных потоков на выходе КА указанного вида.

Ключевые слова: *конечный автомат, пассивный цифровой синтез, квазиравномерная последовательность.*

Синтез частот называют цифровым, если при формировании сетки частот используют элементы цифровой схемотехники [1], и когерентным — если синтезатор содержит единственный источник опорного (высокостабильного) колебания и при преобразованиях частот выполнено условие $\Delta f_{\text{вых}} / \Delta f_{\text{оп}} = f_{\text{вых}} / f_{\text{оп}} = N = \text{const}$ ($f_{\text{вых}}$ — частота синтезируемого колебания, $f_{\text{оп}}$ — частота опорного колебания); $N = P/Q$; $(P, Q) = 1$. Числа P и Q — натуральные и взаимно простые, а коэффициент преобразования частоты $N = P/Q$ может быть представлен целым числом или неправильной несократимой дробью. Одним из необходимых элементов цифрового синтеза частот является конечный автомат (КА).

Заметим, что описание формируемых КА колебаний как во временной области, так и в спектральной, представляет значительный теоретический и практический интерес, позволяет понимать закономерности работы КА и строить его математические модели, ориентированные на решение задач цифрового синтеза частот.

Целью настоящей работы является анализ функционирования КА в пассивных и активных цифровых синтезаторах частот, а также временнóе описание импульсных потоков, формируемых на выходе конечного автомата вида накапливающего сумматора (НС) или счетчика импульсов (СИ) с помощью функций целочисленного аргумента.

Применительно к теории и технике синтеза частот задачу КА можно определить двумя способами.

1. КА решает так называемую прямую задачу (вариант пассивного цифрового синтеза, ПЦС) и на своем выходе формирует сетку частот

$$f_{\text{вых}} \in \{(f_{\max} \cdots f_{\min}) \cap (n \times F_{\text{с}}) \cap f_{\text{оп}}\}, \qquad (1)$$

(где $\cap$ — оператор пересечения множеств $(\cdot)$, n — натуральные числа) заданного качества и с шагом сетки $F_{\text{с}}$ ($F_{\text{с}} = 1/T_{\text{с}}$) из высокочастотного и высокостабильного опорного колебания $f_{\text{оп}} = 1/T_{\text{оп}} > f_{\text{вых}}$; $f_{\text{оп}}/f_{\text{вых}} = N > 2$; $f_{\text{оп}} = PF_{\text{с}}$; $f_{\text{вых}} = QF_{\text{с}}$.

В случае дробного N период $T_{\text{с}} = PT_{\text{оп}} = QT_{\text{вых}}$ является периодом неравномерности структуры выходного колебания КА, а при целом числе N выходное колебание строго периодично и $T_{\text{с}} = T_{\text{вых}}$; P = const, Q = vario. При двухуровневом синтезе параметр $T_{\text{с}}$ — период неравномерности структуры выходной двухуровневой импульсной последовательности [1, 2]. При записи в единицах $F_{\text{с}}$ выражение (1) принимает следующий вид $Q \in \{(Q_{\max} \ldots Q_{\min}) \cap n \cap P\}$.

2. КА решает так называемую обратную задачу (вариант активного цифрового синтеза, АЦС) и приводит частоту перестраиваемого генератора

$$f_{\text{вых}} \in \{(f_{\max} \cdots f_{\min}) \cap (nF_{\text{с}}) \cap f_{\text{оп}}\}, \qquad (2)$$

охваченного петлей автоматического регулирования, к низкочастотному опорному колебанию частоты $f_{\text{оп}}$ таким образом, чтобы выполнялось условие когерентности. Приведение частоты $f_{\text{вых}}$ к $f_{\text{оп}}$ осуществляют, как правило, с помощью (квазиастатического) синтезаторного кольца импульсно-фазовой автоподстройки частоты (ИФАП). В этом случае условие (квази)когерентности для статической системы ИФАП можно записать в виде $\Delta f_{\text{вых}}/\Delta f_{\text{оп}} = f_{\text{вых}}/f_{\text{оп}} = N$ (в статистическом смысле — на интервале наблюдения $T_{\text{н}}$). В единицах $F_{\text{с}}$ выражение (2) принимает вид $P \in \{(P_{\max} \ldots P_{\min}) \cap n \cap Q\}$.

Для замыкания обратной связи в синтезаторном кольце ИФАП применяют КА в виде делителя с переменным или дробно-переменным коэффициентом деления (соответственно ДПКД или ДДПКД), которые для краткости будем называть счетчиками импульсов.

В случае АЦС коэффициент преобразования частоты $N \gg 1$, при N — целом $T_{\text{с}} = T_{\text{оп}}$ (при дробном $N = P/Q = \lfloor P/Q \rfloor + m/Q$), период $T_{\text{с}} = QT_{\text{оп}} = PT_{\text{вых}}$, где $m \in (0, 1, 2, \ldots Q-1)$ — числитель дробной части N (коэффициента деления ДДПКД), $\lfloor * \rfloor$ — оператор выделения целой части числа, меньшей или равной ему. Здесь числа P и Q также являются мерой частот в единицах шага сетки $F_{\text{с}}$ (соответственно $f_{\text{оп}}$ и $f_{\text{вых}}$), P = vario, а Q = const. И лишь в частном случае активного аппроксимационного синтеза P = vario, Q = vario.

Конечный автомат, дополненный функциональным преобразователем (ФУ) называют модифицированным (МКА) [2]. ФУ может представлять собой цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) в случае многоуровневого ПЦС или управляемое устройство задержки (УУЗ) — в случае двухуровневого ПЦС.

Спектральные составляющие двухуровневого потока импульсов или многоуровневого колебания с моногармонической или кусочно-ломаной огибающей (дискретные побочные спектральные составляющие, ДПСС) отстоят друг от друга на частотный интервал $F_{\text{с}}$. В этом случае числа P и Q определяют минимальное количество входных и выходных импульсов (активных перепадов) в пределах периода $T_{\text{с}}$ неравномерности структуры потока формируемой последовательности.

Отметим, что в обоих случаях синтеза временная ошибка на выходе КА не должна превышать $\pm 0{,}5T_{\text{ка}}$ ($T_{\text{ка}}$ — период тактового колебания КА). В [3] показано, что наименьшей величине временной ошибки соответствует наименьший уровень ДПСС выходного колебания КА. Такая временная ошибка минимальна для класса оптимальных (цифровых) КА. В этом случае колебание на выходе КА называют квазиравномерной последовательностью (КРП) импульсов или активных перепадов. В классе модифицированных (цифро-аналоговых) КА временную ошибку можно дополнительно уменьшить с помощью управляемого устройства задержки [4].

Основой для получения и псевдомеандра (ПМ) и квазимеандра (КМ) является КРП импульсов: ПМ получают расширением импульсов КРП до $\approx 0{,}5T_{\text{вых}}$ с помощью одновибратора; если пропустить КРП через триггер, получим КМ. Активные и пассивные перепады у квазимеандра представляют собой КРП [2].

Последовательность вида КРП точек на выходе математической модели КА может быть получена следующим образом. Расположим на оси безразмерного времени, на которой за единицу принят интервал T_0, последовательность точек с целочисленными номерами $n \in (-\infty,...,-1,0,1,...,\infty)$ в моменты времени $t/T_0 = \Psi_n = n(P/Q) - \nu$, где ν — произвольное число. Назовем ее порождающей последовательностью точек для искомой КРП. Выделим по обе стороны каждой из точек порождающей последовательности область значений ϑ, удовлетворяющую условию

$$\Psi_n + \varepsilon - 1 < \vartheta \le \Psi_n + \varepsilon \tag{3}$$

или

$$\Psi_n + \varepsilon - 1 \le \vartheta < \Psi_n + \varepsilon\,, \tag{4}$$

где ε = 0,5. Назовем эту область интервалом захвата. В соотношении (3) интервал захвата замкнут справа, а в (4) — слева, и в обоих случаях в нем всегда окажется одно и только одно целочисленное значение $\vartheta = \vartheta_n$. Точка оси, соответствующая этому целочисленному значению, и будет точкой формируемой КРП с номером n.

Покажем, что КРП точек, сформированные в соответствии с (3) и (4), при любых значениях ν и ε идентичны по структуре и отличаются друг от друга лишь сдвигом во времени на целое число номеров n (периодов T_0). Для этого запишем аналитические выражения для ϑ_n, попадающих в интервал захвата, соответствующие формулам (3) или (4). Соотношению (3) соответствуют аналитические выражения

$$\vartheta_n = \lceil \Psi_n + \varepsilon - 1 \rceil \text{ или } \vartheta_n = \lfloor\lfloor \Psi_n + \varepsilon \rfloor\!\rfloor,$$

а формуле (4)

$$\vartheta_n = \lfloor \Psi_n + \varepsilon \rfloor \text{ или } \vartheta_n = \lceil\lceil \Psi_n + \varepsilon - 1 \rceil\!\rceil.$$

В приведенных выражениях запись $\lfloor X \rfloor$ означает операцию выделения целой части числа X, меньшей или равной ему; запись $\lfloor\lfloor X \rfloor\!\rfloor$ означает операцию выделения целой части числа X, строго меньшей этого числа. Например, $\lfloor 3{,}7 \rfloor = 3$; $\lfloor -3{,}7 \rfloor = -4$; $\lfloor 3{,}0 \rfloor = 3$; $\lfloor -3{,}0 \rfloor = -3$, но $\lfloor\lfloor 3{,}0 \rfloor\!\rfloor = 2$ и $\lfloor\lfloor -3{,}0 \rfloor\!\rfloor = -4$. Аналогично $\lceil X \rceil$ — целая часть числа X, большая или равная ему; $\lceil\lceil X \rceil\!\rceil$ есть целая часть числа X, строго превышающая его не более чем на единицу. При дробных значениях X имеют место равенства: $\lfloor\lfloor X \rfloor\!\rfloor = \lfloor X \rfloor$; $\lceil X \rceil = \lceil\lceil X \rceil\!\rceil$. При целочисленных X соотношения иные: $\lfloor X \rfloor = X$; $\lfloor\lfloor X \rfloor\!\rfloor = X - 1$; $\lceil X \rceil = X$; $\lceil\lceil X \rceil\!\rceil = X + 1$. Нетрудно установить, что каждая из четырех рассматриваемых функций может быть выражена через любую из трех других в соответствии с таблицей.

•	$\lfloor X \rfloor$	$\lceil X \rceil$	$\lfloor\lfloor X \rfloor\!\rfloor$	$\lceil\lceil X \rceil\!\rceil$
$\lfloor X \rfloor$	•	$-\lceil -X \rceil$	$-\lfloor\lfloor -X \rfloor\!\rfloor - 1$	$\lceil\lceil X \rceil\!\rceil - 1$
$\lceil X \rceil$	$\lfloor -X \rfloor$	•	$\lfloor\lfloor X \rfloor\!\rfloor + 1$	$-\lceil\lceil -X \rceil\!\rceil + 1$
$\lfloor\lfloor X \rfloor\!\rfloor$	$-\lfloor -X \rfloor - 1$	$\lceil X \rceil - 1$	•	$-\lceil\lceil -X \rceil\!\rceil$
$\lceil\lceil X \rceil\!\rceil$	$\lfloor X \rfloor + 1$	$-\lceil -X \rceil - 1$	$-\lfloor\lfloor -X \rfloor\!\rfloor$	•

С учетом сказанного примем за исходные формулы

$$\vartheta_n = \lfloor n(P/Q) - \alpha \rfloor \tag{5}$$

и

$$\vartheta_n = \lfloor\lfloor n(P/Q) - \alpha \rfloor\!\rfloor, \tag{6}$$

где $\alpha = \nu - \varepsilon$. Покажем, что соотношения (5) и (6) можно привести к общему виду

$$\vartheta_n = \lfloor \lfloor (nP - R)/Q - \alpha \rfloor. \tag{7}$$

Известно [5], что любое рациональное число можно представить в виде $X = \lfloor X \rfloor + \{ X \}$, где $0 < \{ X \} < 1$ — дробная часть числа X. При этом справедливы соотношения

$$\lfloor \lfloor NX \rfloor + 1 = -\lfloor -NX \rfloor \text{ и } \lfloor \lfloor -\lfloor -NX \rfloor /N \rfloor = -\lfloor \lfloor -NX \rfloor /N \rfloor - 1.$$

Последнее выражение равно $-\lfloor -X \rfloor - 1$ или $\lfloor \lfloor X \rfloor$. Далее можно записать

$$\lfloor n(P/Q) - \alpha \rfloor = \lfloor \lfloor (n(P/Q) - \alpha)Q \rfloor /Q \rfloor = \lfloor (nP + \lfloor Q(-\alpha) \rfloor)/Q \rfloor =$$

$$= \lfloor \lfloor (nP + \lfloor Q(-\alpha) \rfloor + 1)/Q \rfloor = \lfloor \lfloor (nP - \lfloor \lfloor Q(-\alpha) \rfloor /Q \rfloor = \lfloor \lfloor (nP - R)/Q \rfloor,$$

где $R = \lfloor \lfloor Q(-\alpha) \rfloor$ в случае (5) и $R = \lfloor Q(-\alpha) \rfloor$ — в случае (6).

Можно показать, что

$$\lfloor \lfloor n(P/Q) - \alpha \rfloor = \lfloor \lfloor (nP - R)/Q \rfloor,$$

где $R = \lfloor Q(-\alpha) \rfloor$.

Осталось доказать, что если даны две КРП с одинаковыми P и Q, но с различными значениями α, т.е. R и способом получения — по (5) или по (6), то всегда можно найти такую постоянную разность номеров $n = n_2 - n_1$, при которой разность моментов времени $\vartheta = \vartheta_{n2} - \vartheta_{n1}$, найденных для первой и второй КРП по формуле (7) будет также величиной постоянной, т.е.

$$\vartheta = \lfloor \lfloor (n_2 P - R_2)/Q \rfloor = \lfloor \lfloor (n_1 P - R_1)/Q + \vartheta \rfloor = \lfloor \lfloor n_1 (P/Q) - (R_1 - Q\vartheta)/Q \rfloor.$$

Очевидно, что последнее равенство имеет место, если $R_2 - nP = R_1 - Q\vartheta$, т.е. при $R = R_2 - R_1 = nP - Q\vartheta$. Последнее выражение представляет собой диофантово уравнение (в целых числах) первой степени, которое при взаимно простых P и Q всегда имеет решения в целых n и ϑ [5]:

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta = |S+1| + Rz, \\ &S = (-1)^{r-1}(\pm x) R_{r-1}, \\ &n = |V+1| - Qz, \\ &V = (-1)^{r-1}(\pm x) Q_{r-1}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $R = |L \pm x|$; $x = 0, 1, 2, \ldots L-1$; r — число членов разложения числа $N = P/Q$ в цепную дробь по алгоритму Евклида.

Как упоминалось выше, при синтезе частот коэффициент передачи КА по частоте N всегда можно выразить цепной дробью конечной длины, полученной разложением этого коэффициента по алгоритму Евклида. Следует заметить, что любая систематическая дробь связана с определенной системой счисления и поэтому отображает не абсолютные свойства числа, а его „взаимоотношения“ с выбранной системой счисления. Цепные дроби с системами счисления не связаны и в полной мере воспроизводят свойства изображаемых ими чисел. Более того, цепные дроби однозначно отображают действительные (вещественные) числа.

Используя модель КРП [6] и систему (8), можно, например, получить спектр цифрового треугольного колебания с равномерной дискретизацией по времени T_0:

$$A(k) = 2\lambda\mu \frac{\sin[\pi(Q \pm k)/P]}{\pi P(Q \pm k)\sin^2[\pi(R+1)/P]}, \tag{9}$$

где $A(k)$ — амплитуда спектральных составляющих $\mu = 1 \forall P \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$; $\mu = \cos[\pi(R+1)/P] \forall P \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$; $\lambda = 1\cos[\pi(R+1)]$, $k = 0, 1, 2, \ldots Q-1$; $R - (-1)^{r-1}(\pm k)P_{r-1}$; P_{r-1} — числитель предпоследнего $(r-1)$ члена разложения коэффициента деления $N = 2P/Q$ в цепную дробь по алгоритму Евклида [5].

Для квазимеандра можно записать

$$A(m) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{\sin(\pi m Q)}{\pi m},$$

где $m = -\infty, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., \infty$. Выражение для спектра будет иным, но тоже в свернутом виде:

$$A(k) = 2\frac{\sin[\pi(Q \pm 2k)/(2P)]}{\pi(Q \pm 2k)\sin[\pi(2R+1)/(2P)]}. \quad (10)$$

В заключение заметим, что активные перепады (импульсы) выходных потоков упомянутых конечных автоматов (НС и СИ) представляют собой КРП активных перепадов или импульсов [2, 6, 7].

Проведен анализ особенностей работы КА в пассивных и активных синтезаторах частот и получены аналитические выражения для временного описания импульсных потоков на выходе КА с помощью функций целочисленного аргумента; показана взаимосвязь указанных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шапиро Д. Н., Паин А. А.* Основы теории синтеза частот. М.: Радио и связь, 1981.
2. *Никитин Ю. А.* Широкополосный синтез частот с помощью цифровых структур // Изв. вузов. Приборостроение. 1990. Т. 33, № 9. С. 39—47.
3. *Гнусин А. М., Гуревич И. Н., Зарецкий М. М., Паин А. А.* К вопросу об оптимальной системе пассивного цифрового синтеза частот // Техника средств связи. Сер. ТРС. 1978. Вып. 6 (22). С. 53—62.
4. *Гуревич И. Н., Никитин Ю. А.* Управляемые устройства задержки в системах двухуровневого синтеза частот // Радиотехника. 1993. № 10—12. С. 13—20.
5. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.: Наука, 1972.
6. *Никитин Ю. А.* Спектры колебаний при пассивном цифровом синтезе частот // Радиотехника. 1990. № 7. С. 43—49.
7. *Никитин Ю. А.* Конечный автомат как элемент цифровой системы синтеза частот // X Междунар. науч.-технич. конф. „Радиолокация, навигация, связь“. Воронеж, 2004. Т. 1. С. 526—533.

Сведения об авторе

Юрий Александрович Никитин — Санкт-Петербургский филиал НИИ радио — ЛОНИИР; старший научный сотрудник; E-mail: synter@loniir.ru

Рекомендована ЛОНИИР

Поступила в редакцию 30.06.09 г.