УДК 681.5.01

Б. В. Видин, И. О. Жаринов, О. О. Жаринов, О. В. Ульянова

ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ В НЕРАВНОВЕСНОМ РЕЖИМЕ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕННОГО РЕСУРСА УПРАВЛЕНИЯ

Исследуется нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая движение центра масс летательного аппарата в вертикальной плоскости при прямолинейной траектории. Получены оценки скорости и дальности в зависимости от ограничений на управление.

Ключевые слова: *динамика летательного аппарата, ресурс управления, ограничения.*

Введение. Движение центра масс летательного аппарата в скоростной системе координат в вертикальной плоскости, на прямолинейном участке траектории после выбора направления, описывается следующей системой соотношений [1]:

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{dV}{dt}=P\cos\alpha-C_x\frac{\rho\mathbf{V}^2}{2}S-mg\sin\theta,\\
&\frac{d\theta}{dt}=0,\\
&\frac{dh}{dt}=\mathbf{V}\sin\theta,\\
&\frac{dx}{dt}=\mathbf{V}\cos\theta,\\
&\frac{dm}{dt}=-q,\qquad q>0.
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Здесь m — масса летательного аппарата; $\mathbf{V}$ — вектор скорости; θ — угол наклона траектории, $\theta=\mathrm{const}$; α — угол атаки, $\alpha=\mathrm{const}$; h — высота полета; x — дальность полета; q — мгновенный расход массы топлива (в секунду); P — тяга двигателя, $P\le K$, K — ресурс управления (величина, ограничивающая тягу двигателя), S — площадь крыльев, $\rho(h)$ — плотность атмосферы, зависящая от высоты полета, $\rho(h)=C\exp(-h/R)$, R — радиус Земли, C_x — коэффициент лобового сопротивления, при этом

$$\frac{dC_x}{d\alpha}>0.$$

В качестве управляющей функции выбирается тяга двигателя: необходимо найти значение $P(t)$ такое, чтобы решение системы (1) удовлетворяло

— начальным условиям, $t=t_0$:

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_0,\ h=h_0,\ x=x_0,\ m=m_0,\ P=P_0;\qquad(2)$$

— конечным $t=t'$:

$$h=h_k,\ x=x_k,\ m=m_k.$$

Предлагаемый подход к решению. Совокупность функций $\mathbf{V}(t)$, $h(t)$, $x(t)$, $m(t)$, $P(t)$ будем называть решением задачи (1)—(2).

Разделив все уравнения системы (1) на $\frac{dx}{dt}=\mathbf{V}\cos\theta$, приходим к системе

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{V}}{dx}=\frac{1}{m\mathbf{V}\cos\theta}\left(P\cos\alpha-C_x\frac{\rho\mathbf{V}^2}{2}S-mg\sin\theta\right),\\
&\frac{dh}{dx}=\mathrm{tg}\theta,\\
&\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\mathbf{V}\cos\theta},\\
&\frac{dm}{dx}=\frac{-q}{\mathbf{V}\cos\theta}.
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Требуется найти значение $P(t)$ такое, чтобы решение системы (3) удовлетворяло

— начальным условиям, $x=x_0$:

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_0,\ h=h_0,\ m=m_0,\ P=P_0;\qquad(4)$$

— конечным $x=x_k$: $h=h_k$, $m=m_k$.

Совокупность функций $V(x)$, $h(x)$, $m(x)$, $P(x)$ будем называть решением задачи (3)—(4).

Поскольку в соответствии с исходными данными $\theta = \mathrm{const}$, необходимо найти функцию $h(x)$:

$$h(x) = \mathrm{tg}\theta \int_{x_0}^{x_k} dx\,.$$

Продифференцируем обе части первого уравнения системы (3):

$$\frac{d\mathbf{V}}{dx} = \frac{1}{m\mathbf{V}\cos\theta}\left(P\cos\alpha - C_x\frac{\rho\mathbf{V}^2}{2}S - mg\sin\theta\right) = f(\mathbf{V}, h, m, P)\,,$$

$$\frac{d^2\mathbf{V}}{dx^2} = \frac{df}{d\mathbf{V}}\frac{d\mathbf{V}}{dx} + \frac{df}{dh}\frac{dh}{dx} + \frac{df}{dm}\frac{dm}{dx} + \frac{df}{dP}\frac{dP}{dx}\,,$$

откуда получим производную тяги по дальности

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\dfrac{d^2\mathbf{V}}{dx^2} - \dfrac{df}{d\mathbf{V}}\dfrac{d\mathbf{V}}{dx} - \dfrac{df}{dh}\dfrac{dh}{dx} - \dfrac{df}{dm}\dfrac{dm}{dx}}{\dfrac{df}{dP}}\,,$$

где

$$\frac{df}{d\mathbf{V}} = \frac{1}{\cos\theta}\left(-\frac{P\cos\alpha}{\mathbf{V}^2 m} - \frac{C_x\rho S}{2m} + \frac{g\sin\theta}{\mathbf{V}^2}\right)\,,$$

$$\frac{df}{dh} = -\frac{C_x\rho\mathbf{V}S}{2m\cos\theta}\frac{C}{R}\exp(-h/R)\,,$$

$$\frac{df}{dm} = \frac{1}{m^2\cos\theta}\left(-\frac{P\cos\alpha}{\mathbf{V}} + \frac{C_x\rho\mathbf{V}S}{2}\right),$$

$$\frac{df}{dP} = \frac{\cos\alpha}{m\mathbf{V}\cos\theta}\,.$$

Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dP}{dx} = \frac{\dfrac{d^2\mathbf{V}}{dx^2} - \dfrac{df}{d\mathbf{V}}\dfrac{d\mathbf{V}}{dx} - \dfrac{df}{dh}\dfrac{dh}{dx} - \dfrac{df}{dm}\dfrac{dm}{dx}}{\dfrac{df}{dP}},\\
&\frac{dh}{dx} = tg\theta,\\
&\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\mathbf{V}\cos\theta},\\
&\frac{dm}{dx} = \frac{-q}{\mathbf{V}\cos\theta}
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

с учетом начальных условий $x = x_0$:

$$t = t_0,\ h = h_0,\ m = m_0,\ P = P_0 \qquad (6)$$

на траектории $[x_0, x_k]$.

Поскольку $\theta = \mathrm{const}$, $\dfrac{d\theta}{dt} = 0$, отсюда

$$P\sin\alpha + C_y \frac{\rho \mathbf{V}^2}{2} S - mg\cos\theta = 0, \quad \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} > 0,$$

C_y — коэффициент подъемной силы,

Задав интервал $m_1 \le m \le m_2$, получим ограничения на $\mathbf{V}$:

$$C_y \frac{\rho \mathbf{V}^2}{2} S = mg\cos\theta - P\sin\alpha,$$

$$\mathbf{V}^2 = \frac{2}{C_y \rho S}\left(mg\cos\theta - P\sin\alpha\right).$$

Далее получим

$$\mathbf{V}^2 \le \frac{2}{C_{y\min}\rho S}\left(m_2 g\cos\theta - K\sin\alpha\right) = \mathbf{V}_{\max}^2,$$

$$\mathbf{V}^2 \ge \frac{2}{C_{y\max}\rho S} m_1 g\cos\theta = \mathbf{V}_{\min}^2,$$

$$\mathbf{V}_{\min}^2 \le \mathbf{V}^2 \le \mathbf{V}_{\max}^2; \ \mathbf{V}_{\min} = \sqrt{\mathbf{V}_{\min}^2}, \ \mathbf{V}_{\max} = \sqrt{\mathbf{V}_{\max}^2}; \ \mathbf{V}_{\min} \le \mathbf{V} \le \mathbf{V}_{\max}.$$

Получим оценку скорости при конечном значении дальности:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dx} = \left.\frac{d\mathbf{V}}{dx}\right|_{x=x_0} + \int_{x_0}^{x_k} \frac{d\mathbf{V}}{dx} dx,$$

$$\left.\frac{d\mathbf{V}}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{m_0 \mathbf{V}_0 \cos\theta}\left(P_0\cos\alpha - C_{x_0}\frac{\rho_0 \mathbf{V}_0^2}{2} S - m_0 g\sin\theta\right),$$

$$\mathbf{V}_{\min} \le \mathbf{V} \le \mathbf{V}_{\max},$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \int_{x_0}^{x_k} \frac{d\mathbf{V}}{dx} dx,$$

выберем $\mathbf{V}_{\min} \le \mathbf{V}_0 \le \mathbf{V}_{\max}$

$$\mathbf{V}_{\min} - \mathbf{V}_0 < \int_{x_0}^{x_k} \frac{d\mathbf{V}}{dx} dx < \mathbf{V}_{\max} - \mathbf{V}_0,$$

$$\int_{x_0}^{x_k} \frac{d\mathbf{V}}{dx} dx = \left.\int_{x_0}^{x_k} \frac{d\mathbf{V}}{dx} dx\right|_{x=x_0} + \int_{x_0}^{x_k}\int_{x_0}^{x_k} \frac{d^2\mathbf{V}}{dx^2} dx^2,$$

$$\mathbf{V}_{\min} - \mathbf{V}_0 - \int \frac{d\mathbf{V}}{dx} dx \le \frac{d^2\mathbf{V}}{dx^2}\left(x_k - x_0\right)^2 \le \mathbf{V}_{\max} - \mathbf{V}_0 - \int \frac{d\mathbf{V}}{dx} dx.$$

Введем обозначения

$$\mathbf{V}_{\min} - \mathbf{V}_0 - \int_{x_0}^{x_k} \frac{d\mathbf{V}}{dx} dx = \overline{\beta}_1, \quad \mathbf{V}_{\max} - \mathbf{V}_0 - \int_{x_0}^{x_k} \frac{d\mathbf{V}}{dx} dx = \overline{\beta}_2,$$

где фазовые координаты удовлетворяют ограничениям

$$\beta_1 \le \frac{d^2\mathbf{V}}{dx^2} \le \beta_2, \ \beta_1 = \frac{\overline{\beta}_1}{\left(x_k - x_0\right)^2}, \ \beta_2 = \frac{\overline{\beta}_2}{\left(x_k - x_0\right)^2}, \ \left|\frac{dP}{dx}\right| \le K\left(x_k - x_0\right), \ \overline{K} = \max\left|\frac{dP}{dx}\right|.$$

С учетом дополнительных соотношений

$$\rho(h) = C\exp(-h/R),$$

$$\rho_1 \le \rho(h) \le \rho_2,$$

$$\rho_1 = C(-h_2/R),\ \rho_2 = C\exp(-h_1/R),$$

аналогичным образом могут быть получены оценки угла крена

$$\gamma_1 \le \frac{d\mathbf{V}}{dx} \le \gamma_2,\ \gamma_3 \le \frac{dh}{dx} \le \gamma_4,\ \gamma_5 \le \frac{dm}{dx} \le \gamma_6,$$

$$\delta_1 \le \frac{df}{d\mathbf{V}} \le \delta_2,\ \delta_3 \le \frac{df}{dh} \le \delta_4,\ \delta_5 \le \frac{df}{dm} \le \delta_6,\ \delta_7 \le \frac{df}{dP} \le \delta_8,$$

тогда ограничение на ресурс управления составит

$$\bar{K} = \frac{\beta_2 + \gamma_2\delta_2 + \gamma_4\delta_4 + \gamma_6\delta_6}{\delta_7},\ \bar{K}(x_k - x_0) \le K,\ x_k - x_0 \le \frac{K}{\bar{K}}.$$

Заключение. Таким образом, для описания движения летательного аппарата в вертикальной плоскости в неравновесном режиме с учетом ограниченного ресурса управления получены оценки скорости и дальности, при которых управляющая функция удовлетворяет заданным ограничениям $P \le K$.

Предлагаемая модель движения летательного аппарата может быть использована при разработке программного обеспечения пилотажно-навигационных комплексов, на которые возложены задачи управления полетом в условиях ограниченного ресурса управления, с отработкой на этапе предварительных стендовых испытаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский А. А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 523 с.

2. *Остославский И. В., Стражева И. В.* Динамика полетов. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 354 с.

Сведения об авторах

Борис Викторович Видин — канд. техн. наук, профессор; ОКБ „Электроавтоматика“, Санкт-Петербург; зам. главного конструктора; E-mail: postmaster@elavt.spb.ru

Игорь Олегович Жаринов — канд. техн. наук, доцент; ОКБ „Электроавтоматика“, Санкт-Петербург; нач. отдела; E-mail: igor_rabota@pisem.net

Олег Олегович Жаринов — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра вычислительных и электронных систем; E-mail: zharinov@hotbox.ru

Ольга Владимировна Ульянова — ОКБ „Электроавтоматика“, Санкт-Петербург; E-mail: postmaster@elavt.spb.ru

Рекомендована кафедрой
вычислительных и электронных систем

Поступила в редакцию
08.07.09 г.