УДК 656.25, 621.391.82

А. В. Волынская

ОСОБЕННОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ В ЦИФРОВЫХ КАНАЛАХ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Показано, что при произвольном выборе дискретных значений сигналов (например, с помощью датчика случайных чисел при компьютерном моделировании) взаимообратные преобразования по формулам Голдмана некорректны, т.е. обратное преобразование не дает точных значений первоначального сигнала. Предложены уточненные формулы, позволяющие получить абсолютно корректный результат.

Ключевые слова: *дискретные сигналы, преобразования Фурье, ортогональность.*

При функционировании сложных информационно-измерительных комплексов в условиях высокого уровня помех в широком спектре частот необходимо применять взаимные преобразования сигналов с временной области на частотную и обратно. Иными словами, в зависимости от решаемой задачи сигналы в каналах передачи информации можно рассматривать и как функции времени, и как функции частоты, которые однозначно связаны между собой преобразованиями Фурье [1]. Для дискретных сигналов это преобразование можно осуществлять по формулам, предложенным Голдманом [2]:

$$\dot{S}_k = \frac{1}{2F}\sum_{n=0}^{2FT} s(n)\, e^{-j\frac{2\pi kn}{2FT}}\ ; \qquad (1)$$

$$s(n) = \frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT} \dot{S}_k\, e^{j\frac{2\pi kn}{2FT}}\ , \qquad (2)$$

где $\dot{S}_k \equiv \dot{S}\left(\frac{2\pi k}{T}\right)$, $s(n) \equiv s\left(\frac{n}{2F}\right)$ — отсчетные значения сигнала на оси частот и на оси времени соответственно; F — ширина спектра сигнала; T — длительность сигнала.

Однако в выражениях (1) и (2) не учтены ограничения, связанные со свободой выбора отсчетных значений сигнала на осях времени и частот. При произвольном выборе отсчетных значений взаимообратный пересчет по этим формулам не дает совпадающих результатов. В настоящей статье предложены скорректированные формулы, позволяющие получить однозначное соответствие при взаимном пересчете произвольно выбранных отсчетных значений сигнала либо его фурье-образа.

Для того чтобы преобразования были ортогональными, они должны сохранять меру преобразования [1]. Преобразование может быть выполнено с сохранением меры, если в формуле для вычисления квадратичного эффекта сигнала

$$\int_0^T \left[s(t)\right]^2 dt = \frac{1}{2F}\sum_{n=0}^{2FT}\left[S\left(\frac{n}{2F}\right)\right]^2 = \frac{1}{T}a_0^2 + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{FT}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \qquad (3)$$

переменные a_0, a и b заменить на новые переменные a'_0, a' и b' по формулам

$$a'_0 = \sqrt{\frac{2F}{T}}\cdot a_0, \quad a' = 2\sqrt{\frac{F}{T}}\cdot a, \quad b' = 2\sqrt{\frac{F}{T}}\cdot b. \qquad (4)$$

Зависимости (1) и (2) можно записать в виде системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n;\\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где $n = 2FT + 1$ — число отсчетных значений; y_i — отсчетные значения вещественной и мнимой составляющих спектральной функции сигнала; x_i — отсчетные значения сигнала на оси времени; a_{ik} — постоянные коэффициенты, пропорциональные значениям синусов и косинусов кратных частот в отсчетных точках.

Рассматривая y_i и x_i как проекции векторов, можно сказать, что для произвольного задания отсчетных значений сигнала на оси частот необходимо, чтобы векторы y_i были ортогональны, т.е. скалярное произведение любых двух различных векторов системы (5) должно равняться нулю:

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{in}a_{jn} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j,\\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \qquad (6)$$

Однако последнее уравнение системы (5) этому условию не удовлетворяет, так как его коэффициенты имеют множители типа $\sin \pi k$ и, следовательно, все они равны нулю (квадратная матрица коэффициентов a_{ij} выражения (6) вырождена). Это значит, что условие независимого выбора всех отсчетных значений не является безоговорочным. То же самое можно сказать и о векторах x_i. Требуется установить ограничения на свободу выбора отсчетных значений сигнала на оси частот и оси времени, однозначно связанных между собой.

Вводя ортогональные составляющие спектральной функции

$$A_k \equiv A\left(\frac{2\pi k}{T}\right)=\frac{1}{2F}\sum_{n=0}^{2FT} s(n)\cos\frac{2\pi kn}{2FT}\,; \qquad (7)$$

$$B_k \equiv B\left(\frac{2\pi k}{T}\right)=\frac{1}{2F}\sum_{n=0}^{2FT} s(n)\sin\frac{2\pi kn}{2FT}\,, \qquad (8)$$

рассмотрим следующую сумму:

$$s(n)=\frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT}(A_k-jB_k)\,e^{j\frac{2\pi kn}{2FT}}=\frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT-1}\frac{1}{2F}\sum_{i=1}^{2FT}s(i)\,e^{j\frac{2\pi k(n-i)}{2FT}}=$$

$$=\frac{1}{2FT}\sum_{i=0}^{2FT}s(i)\sum_{k=-FT}^{FT-1}\cos\frac{2\pi k(n-i)}{2FT}+j\frac{1}{2FT}\sum_{i=0}^{2FT}s(i)\sum_{k=-FT}^{FT-1}\sin\frac{2\pi k(n-i)}{2FT}. \qquad (9)$$

Второе слагаемое последнего равенства обращается в нуль, так как

$$\sum_{k=-FT}^{FT-1}\sin\frac{2\pi kn}{2FT}=\sum_{k=-FT}^{FT}\sin\frac{2\pi kn}{2FT}-\sin\,\pi n\,,$$

где каждое из двух слагаемых равно нулю.

Первое слагаемое равенства (9) можно выразить следующим образом:

$$\frac{1}{2FT}\sum_{i=0}^{2FT}s(i)\sum_{k=-FT}^{FT-1}\cos\frac{2\pi k(n-i)}{2FT}=$$

$$=\frac{1}{2FT}\sum_{i=0}^{2FT}s(n)\sum_{k=-FT}^{FT-1}\cos 0+\frac{1}{2FT}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{2FT}s(i)\sum_{k=-FT}^{FT-1}\cos\frac{2\pi k(n-i)}{2FT}. \qquad (10)$$

В свою очередь, первое слагаемое равенства (10) равно $s(n)$. Второе слагаемое обращается в нуль при любых n, кроме $n = 0$ и $n = 2FT$, при которых оно равно $s(2FT)$ и $s(0)$ соответственно. Следовательно, равенство (9) обращается в тождество типа $s(n) \equiv s(n)$ при любых $n =$ $=0, 1, 2 \ldots 2FT$, если принять, что $s(0) = s(2FT) = 0$. Только при этом условии второе слагаемое в уравнении (10) обращается в нуль при всех n.

Таким образом, точный пересчет отсчетных значений должен производиться по формулам

$$s(n)=\frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT-1}\dot{S}_k\,e^{j\frac{2\pi kn}{2FT}}=\frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT-1}(A_k-jB_k)\,e^{j\frac{2\pi kn}{2FT}}\,. \qquad (11)$$

Принцип произвольного выбора отсчетных значений сигнала на оси времени распространяется на все значения $s(n)$, кроме $s(0)$ и $s(2FT)$, которые должны приниматься равными нулю.

Для выяснения ограничений по выбору отсчетных значений на оси частот преобразуем выражение (11):

$$s(n)=\frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT-1}A_k\cos\frac{2\pi kn}{2FT}+j\frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT-1}A_k\sin\frac{2\pi kn}{2FT}-$$

$$-j\frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT-1}B_k\cos\frac{2\pi kn}{2FT}+\frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT-1}B_k\sin\frac{2\pi kn}{2FT}. \qquad (12)$$

Второе слагаемое, как было показано выше, обращается в нуль. Чтобы правая часть была вещественной, третье слагаемое должно быть равно нулю, его можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT-1} B_k \cos\frac{2\pi kn}{2FT} = \frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT} B_k \cos\frac{2\pi kn}{2FT} - (-1)^n \frac{1}{T} B_{FT}.$$

С учетом того, что $B_0 = 0$, первое слагаемое этого равенства обращается в нуль. Следовательно, для обращения в нуль третьего слагаемого равенства (12) необходимо выбирать $B_{FT} = 0$. Кроме этого, при выборе отсчетных значений необходимо соблюсти четность A_k и нечетность $B_{k.}$

Учитывая эти свойства, выражение (12) можно преобразовать следующим образом:

$$s(n) = \frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT-1}\left(A_k \cos\frac{2\pi kn}{2FT} + B_k \sin\frac{2\pi kn}{2FT}\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{FT-1}\left(A_k \cos\frac{2\pi kn}{2FT} + B_k \sin\frac{2\pi kn}{2FT}\right) + \frac{1}{T}\sum_{k=-FT}^{FT}\left(A_k \cos\frac{2\pi kn}{2FT} + B_k \sin\frac{2\pi kn}{2FT}\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{A_0}{2} + (-1)^n \frac{A_{FT}}{2} + \sum_{k=1}^{FT-1}\left(A_k \cos\frac{2\pi kn}{2FT} + B_k \sin\frac{2\pi kn}{2FT}\right)\right]. \qquad (13)$$

В формуле (13) отрицательные составляющие не содержатся. Поэтому при выборе отсчетных значений на положительной полуоси частот можно не соблюдать четность. Однако этот выбор должен быть таким, чтобы в соответствии с выражением (13) $s(0)$ и $s(2FT)$ равнялись нулю. Подставив в него $n = 0$ и $n = 2FT$, получим два уравнения, из которых найдем ограничения, накладываемые на выбор отсчетных значений A_k:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A_0}{2} + \frac{A_{FT}}{2} + \sum_{k=1}^{FT-1} A_k = 0, \\ &\frac{A_0}{2} + (-1)^{2FT} \frac{A_{FT}}{2} + \sum_{k=1}^{FT-1} A_k = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

В соответствии с системой уравнений (14) все значения A_k могут быть выбраны произвольно, кроме A_0 и A_{FT}, которые определяются из ее решения. При этом возможны два варианта. Если $2FT$ четное число, то решение неоднозначно, и один из коэффициентов может быть задан произвольно. Если $2FT$ нечетное число, то FT и $FT - 1$ нецелые числа, и в формулах (7), (8), (13) и (14) k принимает значения 0, 1, 2, ..., $FT - 1$, FT, где два последних значения — нецелые числа. Это приводит к нарушению условия ортогональности векторов и, как следствие, к нарушению однозначного соответствия между отсчетными значениями в полученных формулах.

На рис. 1 показано расположение отсчетных значений A_k и B_k на интервале 2π на оси частот при четном и нечетном значениях $2FT$. Когда k принимает значение FT, частота принимает значение π. При четном значении $2FT$ (см. рис. 1, *а*) все частоты кратны относительно низшей частоты, а при нечетном (см. рис. 1, *б*) — последняя частота (при $k = FT$) некратна относительно низшей частоты, что и нарушает ортогональность.

Для восстановления ортогональности преобразуем аргумент в формулах (7) и (8) следующим образом:

$$\frac{2\pi kn}{2FT} = \frac{\pi}{FT_{ц+}}\frac{FT_{ц+}}{FT}k\pi = \frac{\pi k'n}{FT_{ц+}}; \quad 0 \le k' \le FT_{ц+}; \quad k = \frac{FT}{FT_{ц+}}k', \qquad (15)$$

где FT — нецелое число, а $FT_{ц+}$ — ближайшее к нему сверху целое число.

С учетом этого преобразования аргумента формулы (7) и (8) перепишем следующим образом:

$$A_{k'} = C\frac{1}{2F}\sum_{n=0}^{2FT} s(n)\cos\frac{\pi k'n}{FT_{\text{ц}+}}; \tag{16}$$

$$B_{k'} = C\frac{1}{2F}\sum_{n=0}^{2FT} s(n)\sin\frac{\pi k'n}{FT_{\text{ц}+}}, \tag{17}$$

где $C = \dfrac{FT_{\text{ц}+} - 1}{FT_{\text{ц}+}}$, $k' = 0, 1, 2, \ldots, FT_{\text{ц}+} - 1, FT_{\text{ц}+}$.

Точки расположения отсчетных значений на оси частот для этого случая показаны на рис. 1, *в*. Как видно из рисунка, все частоты кратны относительно низшей частоты. Приведение к прежнему расположению частот осуществляется с использованием формулы (15).

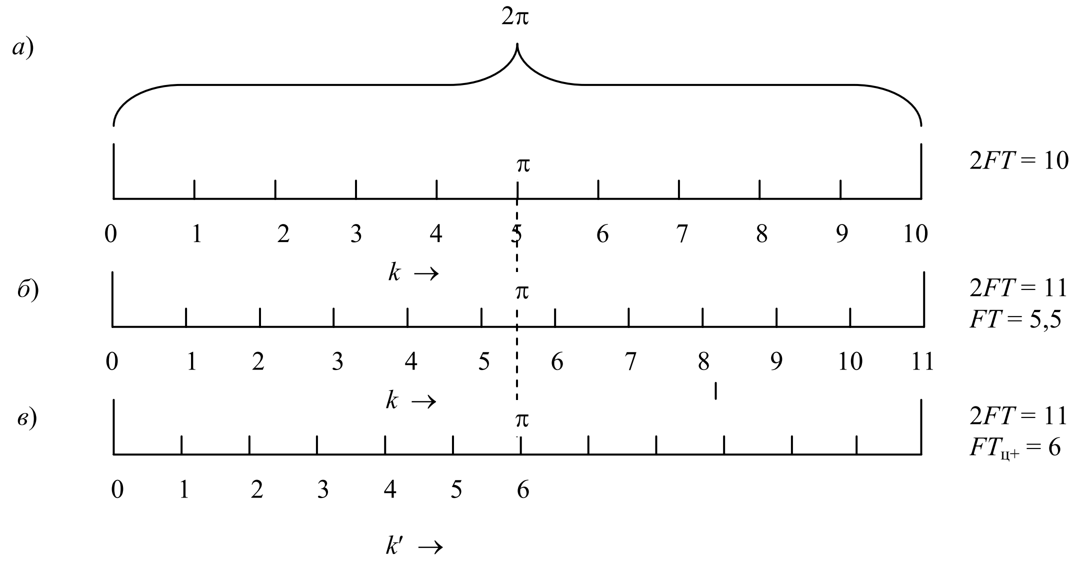

Рис. 1

Появление в формулах коэффициента пропорциональности C обусловлено тем, что амплитуды составляющих сигнала зависят от изменившегося интервала между точками расположения отсчетных значений на оси частот. Значения коэффициентов A_0 и $A_{FT_{\text{ц}+}}$ при выборе отсчетных значений на оси частот находим из системы уравнений (14), которая преобразуется к виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A_0}{2} + \frac{A_{FT_{\text{ц}+}}}{2} + \sum_{k'=1}^{FT_{\text{ц}+}-1} A_k = 0,\\ &\frac{A_0}{2} - \frac{A_{FT_{\text{ц}+}}}{2} + \sum_{k'=1}^{FT_{\text{ц}+}-1}\left(A_{k'}\cos\frac{2\pi FT}{FT_{\text{ц}+}}k' + B_{k'}\sin\frac{2\pi FT}{FT_{\text{ц}+}}k'\right) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Как следует из системы (18), в отличие от четного случая, ни один из коэффициентов A_0 и $A_{FT_{\text{ц}+}}$ не может быть выбран произвольно, они определяются однозначно из решения системы. Кроме того, коэффициенты A_0 и $A_{FT_{\text{ц}+}}$ в данном случае зависят не только от произвольно выбираемых $A_{k'}$, но имеют слабую зависимость и от всех коэффициентов $B_{k'}$.

По выбранным значениям A и B находим отсчетные значения сигнала на оси времени:

$$s(n)=\frac{2}{T}\left[\frac{A_0}{2}+(-1)^n\frac{A_{FT_{ц+}}}{2}+\sum_{k'=1}^{FT_{ц+}-1}\left(A_{k'}\cos\frac{\pi k'n}{FT_{ц+}}k'+B_{k'}\sin\frac{\pi k'n}{FT_{ц+}}\right)\right],\ n=0,1,2,\ldots,2FT. \quad (19)$$

Математическое моделирование для конкретного достаточно сложного сигнала подтверждает правильность полученных соотношений и ограничений. На рис. 2 показаны графики восстановления сигнала на оси времени по формулам Голдмана (кривые *1*) и уточненным формулам (кривые *2*) при четном (рис. 2, *а*) и нечетном (рис. 2, *б*) значениях $2FT$. Расчет коэффициентов A_k и B_k по формулам (7) и (8) и обратный пересчет их по формуле (11) или (12) дает точное совпадение отсчетных значений на оси времени с выбранными ранее (кривая *1* на рис. 2, *а*), а полученные коэффициенты A_k удовлетворяют системе (14). При этом $A_0 = 0{,}0219$ и $A_{FT} = 0{,}127$. Если все коэффициенты A_k и B_k сохранить, а коэффициент A_{FT} выбрать таким, чтобы система уравнений (14) не выполнялась (например, $A_{FT} = 0{,}28$), то пересчет по формуле (11) или (13) дает отсчетные значения (кривая *2* на рис. 2, *а*), не совпадающие с ранее выбранными. Если принять эти отсчетные значения за исходные, то не удается найти отсчетные значения на оси частот, однозначно им соответствующие. Это очевидно из того, что $s(0)$ и $s(2FT)$ не равны нулю.

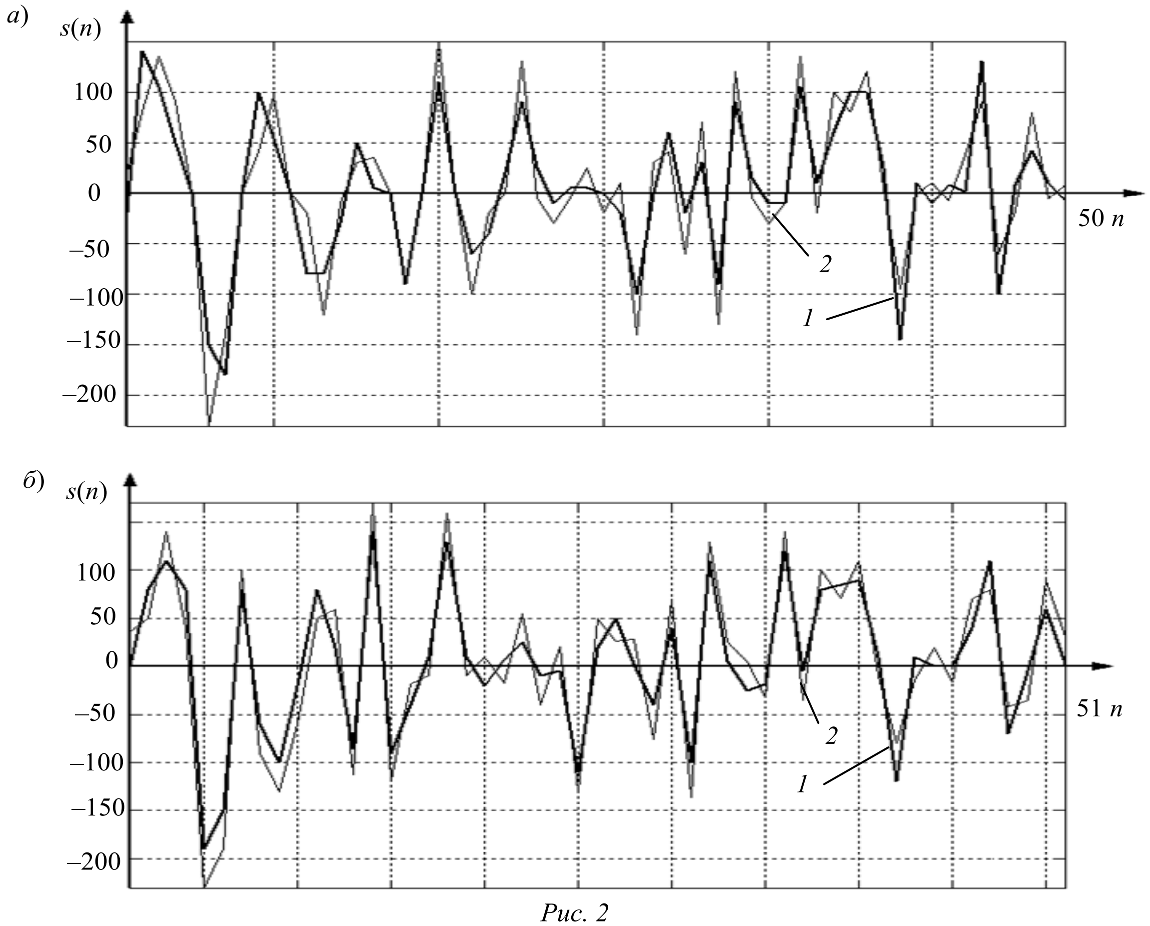

Рис. 2

В случае когда $2FT$ нечетное число, взаимообратный пересчет отсчетных значений по формулам (7), (8) и (13) приводит к несовпадению результатов (кривая *2* на рис. 2, *б*), а пересчет по формулам (16), (17) и (19) дает точное совпадение, и получаемые при этом коэффициенты $A_{k'}$ и $B_{k'}$ удовлетворяют системе уравнений (14).

Итак, для отсчетных значений сигнала на оси времени осуществляется свободный выбор всех отсчетов, кроме $s(0)$ и $s(2FT)$, которые должны быть выбраны равными нулю. Для отсчетных значений сигнала на оси частот осуществляется свободный выбор всех коэффициентов A_k и B_k, кроме B_0 и B_{FT}, которые должны быть выбраны равными нулю, а коэффициенты A_0 и A_{FT} определяются из решения системы уравнений (14) или (18), как и при нечетном значении $2FT$. В последнем случае необходимо изменить расположение отсчетных точек на оси частот.

Приведенные скорректированные выражения позволяют получать более точные результаты при взаимных преобразованиях сигналов, в частности при математическом моделировании [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андре Анго*. Математика для электро- и радиоинженеров М.: Наука, 1965. С. 109.

2. *Голдман С.* Теория информации. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. С. 99.

3. *Волынская А. В., Сергеев Б. С.* Моделирование метода весового накопления сигнала для сетей передачи информации транспорта // Электроника и электрооборудование транспорта. 2008. № 3. С. 2—6.

4. *Волынская А. В.* Результаты математического моделирования процесса поиска кодовых последовательностей с заданными корреляционными свойствами // Вестн. Урал. гос. ун-та путей сообщения: Науч.-техн. журнал. Екатеринбург: УрГУПС, 2009. № 3—4. С. 64—71.

Сведения об авторе

Анна Владимировна Волынская — канд. техн. наук, доцент; Уральский государственный университет путей сообщения, кафедра связи, Екатеринбург;
E-mail: anna-volinskaya@mail.ru

Рекомендована кафедрой связи

Поступила в редакцию 12.12.10 г.