УДК 519.2

С. Н. Воробьев, Н. В. Гирина, Л. А. Осипов

ГАУССОВЫ МАРКОВСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Устанавливается свойство ($2k+1$)-диагональности матрицы точности гауссовой марковской последовательности k-го порядка. Немарковские процессы аппроксимируются марковскими последовательностями путем сохранения главных диагоналей матрицы точности.

Ключевые слова: *гауссова марковская последовательность, свойство (*$2k+1$*)-диагональности матрицы, матрица точности, последовательности k-го порядка.*

Введение. В соответствии с классификацией марковских процессов [1] стационарная гауссова марковская последовательность может быть задана множеством отсчетов $\mathbf{X}^T=\left[x_1,x_2,...,x_n\right]$ стационарного процесса $x(t)\in N\left(m,R(\tau)\right)$, взятых с интервалом дискретизации Δ; здесь m — математическое ожидание, $R(\tau)$ — функция корреляции. Такая модель описывает, например, дискретизированный во времени шум на входе радиоэлектронной системы. Марковские последовательности в общем случае характеризуются условными функциями распределения и плотностями распределения переходов [1]. Для нормального распределения значений отсчетов можно получить другое описание марковских последовательностей, позволяющее рассчитывать условные корреляционные матрицы и генерировать марковские последовательности на компьютере.

Марковская последовательность k-го порядка (сложная последовательность [1]) определяется условной плотностью распределения

$$f\left(x_{p+1},...,x_n \mid x_1,...,x_p\right)=f\left(x_{p+1},...,x_n \mid x_{p-k+1},...,x_p\right), \qquad (1)$$

т.е. зависимостью от k предыдущих значений.

Общими для гауссовых последовательностей, в том числе марковских, являются соотношения для n-мерного нормального распределения [2]: разделению $n\times 1$-вектора отсчетов $\mathbf{X}\in N\left(\mathbf{M},\mathbf{B}\right)$ на $\mathbf{X}_1^T=\left[x_1...x_k\right]$ и $\mathbf{X}_2^T=\left[x_{k+1}...x_n\right]$ соответствует разбиение корреляционной матрицы $\mathbf{B}$ на блоки:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{22}$ — корреляционные матрицы первых k и последних $n-k$ отсчетов.

Вектор математических ожиданий $\mathbf{M}\mid\mathbf{X}_1$ и корреляционная матрица $\mathbf{B}_\mathbf{C}=\mathbf{B}\mid\mathbf{X}_1$ условной плотности распределения $f\left(\mathbf{X}_2\mid\mathbf{X}_1\right)$ определяются как

$$\mathbf{M}\mid\mathbf{X}_1=\mathbf{M}_2+\mathbf{C}\left(\mathbf{X}_1-\mathbf{M}_1\right); \qquad (3)$$

$$\mathbf{B}_\mathbf{C}=\mathbf{B}\mid\mathbf{X}_1=\mathbf{B}_{22}-\mathbf{C}\mathbf{B}_{12};$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}, \qquad (4)$$

а математические ожидания $\mathbf{M}^T=\left[\mathbf{M}_1^T;\mathbf{M}_2^T\right]=\left[m_1,...,m_k;m_{k+1},...,m_n\right]$.

Гауссовы марковские последовательности первого порядка. Корреляционная матрица $\mathbf{B}$ последовательности $\mathbf{X}$, полученной дискретизацией стационарного марковского процесса первого порядка, имеет вид [3]

$$\mathbf{B}=\sigma^2\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & ... & b^{n-1} \\ b & 1 & b & ... & b^{n-2} \\ b^2 & b & 1 & ... & b^{n-3} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b^{n-1} & ... & b^2 & b & 1 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $b=k(\Delta)$ — коэффициент корреляции между соседними значениями матрицы, σ^2 — дисперсия.

Действительно, если матрицу (5) подвергнуть согласно уравнению (1) такому разбиению, что $\mathbf{B}_{22}=b_{22}=\sigma^2$ (с выделением последних строки и столбца), то нетрудно увидеть, что матрица, обратная блоку $\mathbf{B}_{11}$, трехдиагональна:

$$\mathbf{B}_{11}^{-1}=\frac{\sigma^{-2}}{1-b^2}\begin{bmatrix} 1 & -b & 0 & 0 & ... & 0 \\ -b & 1+b^2 & -b & 0 & ... & 0 \\ 0 & -b & 1+b^2 & -b & ... & 0 \\ 0 & 0 & -b & 1+b^2 & -b & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & -b & 1 \end{bmatrix}; \tag{6}$$

блок $\mathbf{B}_{21}=\sigma^2[b^{n-1} \quad b^{n-2} \quad ... \quad b]$, так что вектор (4), определяющий условное математическое ожидание (3),

$$\mathbf{C}=\mathbf{B}_{21}\,\mathbf{B}_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & ... & 0 & b\end{bmatrix}$$

имеет один последний ненулевой элемент, равный b, а предыдущие $n-2$ элемента равны нулю.

Зависимость условного математического ожидания от одного последнего предыдущего значения характеризует одну из особенностей марковского процесса первого порядка [1].

Рассмотрим частный случай: $b=e^{-\alpha|\Delta|}$ — марковский гауссов процесс с экспоненциальной функцией корреляции (первая теорема Дж. Дуба [1]).

Для двух последних значений x_{n-1}, x_n при фиксированных $x_1,...,x_{n-2}$ блоки

$$\mathbf{B}_{21}=\sigma^2\begin{bmatrix} b^{n-2} & b^{n-3} & ... & b \\ b^{n-1} & b^{n-2} & ... & b^2 \end{bmatrix},\ \mathbf{B}_{12}=\mathbf{B}_{21}^T,\ \mathbf{B}_{22}=\begin{bmatrix} \sigma^2 & b \\ b & \sigma^2 \end{bmatrix},$$

матрица (4)

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & b \\ 0 & 0 & ... & 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

также определяет зависимость вектора условных математических ожиданий (3) от одного последнего фиксированного x_{n-2}. При фиксированных первых k значениях последовательности $(n-k)\times k$-матрица $\mathbf{C}$ для последующих $n-k$ значений равна

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b^{n-k} \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Матрица (7) по сути является матрицей связи наблюдаемых значений с предыдущими.

Фундаментальное свойство марковских последовательностей заключается в том, что любая подпоследовательность является марковской [1]. Следовательно, блок $\mathbf{B}_{11}$, так же как матрица $\mathbf{B}$, есть корреляционная матрица марковской последовательности первого порядка (укороченной по сравнению с исходной). Таким образом, марковская последовательность может описываться обратной матрицей $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}$ (матрицей точности [2]) вида (6), как и корреляционной матрицей. Однако матрица точности марковской последовательности первого порядка имеет характерную форму — она трехдиагональна. Переход от описания последовательности корреляционной матрицей к описанию матрицей точности позволяет сформулировать необходимый признак принадлежности стационарной гауссовой последовательности классу марковских первого порядка [3]: трехдиагональность матрицы точности $\mathbf{D}$.

Если матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ разбиты на блоки

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & d_{22} \end{bmatrix},$$

соответствующие условной плотности $f\left(x_n \mid x_1,...,x_{n-1}\right)$, их произведение (единичная матрица) равно

$$\mathbf{BD} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11} + \mathbf{B}_{12}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{12} + \mathbf{B}_{12}d_{22} \\ \mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{11} + \sigma_n^2\mathbf{D}_{21} & \mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{12} + \sigma_n^2 d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11} & \mathbf{I}_{12} \\ \mathbf{I}_{21} & 1 \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

где $\mathbf{I}_{21}$, $\mathbf{I}_{12}$ — строка и столбец нулей, $\mathbf{I}_{11}$ — единичная $(n-1)$-матрица, d_{22} — последний элемент матрицы точности.

Матрица связи $\mathbf{C} = \mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}$, так что $\mathbf{B}_{21} = \mathbf{CB}_{11}$; условная дисперсия

$$\sigma_{n\mathbf{C}}^2 = \sigma_n^2 \mid x_1,...,x_{n-1} = \sigma_n^2 - \mathbf{CB}_{12},$$

так что $\mathbf{CB}_{12} = \sigma_n^2 - \sigma_{n\mathbf{C}}^2$. В матричном уравнении (8) одно из соотношений $\mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11} + \mathbf{B}_{12}\mathbf{D}_{21} = \mathbf{I}$ определяет равенство $\mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11} = \mathbf{I} - \mathbf{B}_{12}\mathbf{D}_{21}$. Другое соотношение, таким образом, записывается как

$$\mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{11} + \sigma_n^2\mathbf{D}_{21} = \mathbf{CB}_{11}\mathbf{D}_{11} + \sigma_n^2\mathbf{D}_{21} = \mathbf{C}\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{12}\mathbf{D}_{21}\right) + \sigma_n^2\mathbf{D} =$$
$$= \mathbf{C} - \left(\sigma_n^2 - \sigma_{n\mathbf{C}}^2\right)\mathbf{D}_{21} + \sigma_n^2\mathbf{D}_{21} = \mathbf{C} + \sigma_{n\mathbf{C}}^2\mathbf{D}_{21} = \mathbf{0},$$

т.е. матрица

$$\mathbf{C} = -\sigma_{n\mathbf{C}}^2\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}$$

характеризует отличие от нуля одного последнего элемента в векторе связи, определяющее первый порядок последовательности. Так как вектор $\mathbf{D}_{21}$ подобен вектору $\mathbf{C}$ при трехдиагональной матрице точности, свойство ее трехдиагональности является также достаточным признаком первого порядка марковской последовательности.

Свойство трехдиагональности распространяется на нестационарные последовательности, корреляционная матрица которых имеет вид

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & b\sigma_1\sigma_2 & b^2\sigma_1\sigma_3 & \dots & b^{n-1}\sigma_1\sigma_n \\ b\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & b\sigma_2\sigma_3 & \dots & b^{n-2}\sigma_2\sigma_n \\ b^2\sigma_3\sigma_1 & b\sigma_3\sigma_2 & \sigma_3^2 & \dots & b^{n-3}\sigma_3\sigma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^{n-1}\sigma_n\sigma_1 & \dots & \dots & b\sigma_n\sigma_{n-1} & \sigma_n^2 \end{bmatrix},\ \sigma_i \ne \sigma_j,$$

а матрица точности, подобно матрице (6), трехдиагональна с элементами главной диагонали $\left\{\sigma_1^{-2} \quad \left(1+b^2\right)\sigma_2^{-2} \quad \dots \quad \left(1+b^2\right)\sigma_{n-1}^{-2} \quad \sigma_n^{-2}\right\}\Big/\left(1-b^2\right)$ и элементами следующих диагоналей $d_{ij}=-b\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}\Big/\left(1-b^2\right)$, где i, j — номера строк и столбцов.

Например, пусть корреляционная матрица $\mathbf{B}$ стационарной последовательности трансформируется в матрицу $\mathbf{B}_m$ последовательности с переменной дисперсией:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ b & 1 & b & b^2 \\ b^2 & b & 1 & b \\ b^3 & b^2 & b & 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{B}_m=\begin{bmatrix} 1 & 2b & 3b^2 & 4b^3 \\ 2b & 4 & 6b & 8b^2 \\ 3b^2 & 6b & 9 & 12b \\ 4b^3 & 8b^2 & 12b & 16 \end{bmatrix},$$

тогда матрица точности трехдиагональна:

$$\mathbf{D}=\frac{1}{1-b^2}\begin{bmatrix} 1 & -b/2 & 0 & 0 \\ -b/2 & \left(1+b^2\right)/4 & -b/6 & 0 \\ 0 & -b/6 & \left(1+b^2\right)/9 & -b/12 \\ 0 & 0 & -b/12 & 1/16 \end{bmatrix}.$$

Использование соотношения (8) позволяет получить еще один результат. Из равенства $\mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{12}+\sigma_n^2 d_{22}=1$ следует

$$\sigma^2=\frac{1-\mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{12}}{d_{22}};$$

условная дисперсия значения x_n равна

$$\sigma_{n\mathbf{C}}^2=\sigma^2-\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}=\frac{1}{d_{22}}-\frac{\mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{12}+d_{22}\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}}{d_{22}}. \qquad (9)$$

Из равенства $\mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{12}+d_{22}\mathbf{B}_{12}=\mathbf{I}_{12}=\mathbf{0}$ следует

$$\mathbf{D}_{12}=-d_{22}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}. \qquad (10)$$

Подстановка уравнения (10) в формулу (9) дает соотношение для условной дисперсии

$$\sigma_{n\mathbf{C}}^2=\frac{1}{d_{22}}-\frac{-d_{22}\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}+d_{22}\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}}{d_{22}}=\frac{1}{d_{22}},$$

которая обратна последнему элементу матрицы точности.

Этот результат справедлив также для нестационарных марковских последовательностей. Так, в предыдущем примере для $b=1/2$ матрица связи

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2/3\end{bmatrix},\ d_{22}=1/12,$$

условная дисперсия

$$\sigma_{4\mathbf{C}}^2=d_{22}^{-1}=\sigma_4^2-\mathbf{CB}_{12}=16-4=12.$$

Гауссовы марковские последовательности *k*-го порядка. Марковская последовательность *k*-го порядка определяется как последовательность с условной плотностью распределения (1), т.е. последние значения зависят от k предыдущих [1]. Такая зависимость задает общий вид матрицы связи (4): в ней отличен от нуля хотя бы один элемент каждого из k последних столбцов:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & \ldots & 0 & c_{1(p-k+1)} & \cdots & c_{1p}\\ 0 & \ldots & 0 & c_{2(p-k+1)} & \cdots & c_{2p}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0 & c_{(n-p)(p-k+1)} & \cdots & c_{(n-k)p}\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Например, при наблюдении семи значений процесса третьего порядка с нулевыми средними математическое ожидание (3) шестого и седьмого значений равно

$$\mathbf{M}\left[x_6,x_7\mid x_1,\ldots x_5\right]=\mathbf{CX}=\begin{bmatrix}c_{13}x_3+c_{14}x_4+c_{15}x_5\\ c_{23}x_3+c_{24}x_4+c_{25}x_5\end{bmatrix},$$

так как матрица связи (11) имеет вид

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & c_{13} & c_{14} & c_{15}\\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25}\end{bmatrix}.$$

При умножении (8) блочных матриц $\mathbf{BD}=\mathbf{I}$ одна их четырех сумм

$$\mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{12}+\mathbf{B}_{22}\mathbf{D}_{22}=\mathbf{I},$$

где $\mathbf{I}$ — $(n-p)\times(n-p)$-единичная матрица (p первых значений фиксированы). Отсюда

$$\mathbf{B}_{22}=\mathbf{D}_{22}^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{12}\right);\ \mathbf{D}_{22}^{-1}=\mathbf{B}_{22}+\mathbf{D}_{22}^{-1}\mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{12}, \tag{12}$$

следовательно, для матрицы связи и условной корреляционной матрицы имеют место соотношения

$$\mathbf{C}=-\mathbf{D}_{22}^{-1}\mathbf{D}_{21}; \tag{13}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{C}}=\mathbf{D}_{22}^{-1}, \tag{14}$$

так как в этом случае условная корреляционная матрица $\mathbf{B}_{\mathbf{C}}=\mathbf{B}_{22}-\mathbf{CB}_{12}$ и матрица (12) равны. Таким образом, если элементы l первых столбцов матрицы $\mathbf{D}_{21}$ равны нулю, а элементы матрицы $\mathbf{D}_{22}^{-1}$ отличны от нуля, матрица (13) имеет вид матрицы $\mathbf{D}_{21}$: l первых столбцов нулевые. Равенство (14) в общем случае справедливо для уравнения (9).

На основе этих результатов в работе [3] формулируется утверждение о том, что матрица точности марковской последовательности k-го порядка имеет $2k+1$ главных (ненулевых) диагоналей (остальные элементы матрицы точности равны нулю).

Необходимость ($2k+1$)-диагональности матрицы точности следует из того, что ее блок $\mathbf{D}_{21}$ при $k<p$ имеет $p-k$ первых нулевых и k ненулевых столбцов, следовательно, матрица связи имеет вид (11). Например, условно изображенную матрицу точности (звездочками обозначены ненулевые элементы) с семью диагоналями можно разбить на блоки следующим образом:

$$\mathbf{D}=\left[\begin{array}{ccccc|cc} * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{array}\right],\ \mathbf{D}_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Произведение (13) преобразуется к матрице связи двух значений с пятью предыдущими марковской последовательности третьего порядка:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Матрица связи (13) $\mathbf{C}=-\mathbf{D}_{22}^{-1}\mathbf{D}_{21}=-\mathbf{B_C}\mathbf{D}_{21}$, условная корреляционная матрица $\mathbf{B_C}$ — положительно-определенная: $\det\mathbf{B_C}>0$. Пусть элементы первого столбца матрицы $\mathbf{C}$ равны нулю (фиксированы первые p из n значений последовательности k-го порядка, r_{ij} — элементы матрицы $-\mathbf{B_C}$):

$$\left.\begin{array}{l} r_{(p+1)(p+1)}d_{(p+1)1}+r_{(p+1)(p+2)}d_{(p+2)1}+\ldots+r_{(p+1)n}d_{n1}=c_{11}=0; \\ r_{(p+2)(p+1)}d_{(p+1)1}+r_{(p+2)(p+2)}d_{(p+2)1}+\ldots+r_{(p+2)n}d_{n1}=c_{21}=0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n(p+1)}d_{(p+1)1}+r_{n(p+2)}d_{(p+2)1}+\ldots+r_{nn}d_{n1}=c_{(n-k)1}=0. \end{array}\right\} \qquad (15)$$

При заданных r_{ij} система (15) представляет собой систему однородных линейных уравнений относительно d_{l1}, $l=n-p$. Определитель $\mathbf{B_C}$ не равен нулю, следовательно, система (15) имеет нулевое решение. Система уравнений вида (15) существует для второго, третьего и последующих столбцов матрицы связи, если столбец равен нулю. Таким образом, столбец матрицы (11) равен нулю только в том случае, если равен нулю соответствующий столбец матрицы $\mathbf{D}_{21}$, что определяет достаточность условия $(2k+1)$-диагональности матрицы точности.

Понятие $(2k+1)$-диагональности матрицы точности распространяется на случай, когда диагонали с первой по $(k-1)$-ю нулевые: порядок гауссовой марковской последовательности определяется номером k последних ненулевых диагоналей (главная диагональ имеет номер $k=0$).

Пример 1. Отсчеты процесса с функцией корреляции $R(\tau)=e^{-|\tau|}\cos\pi\tau$, взятые с интервалом $\Delta=0,5$, образуют марковскую последовательность второго порядка. Действительно, $n=6$ осчетов описываются пятидиагональной матрицей точности

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 1,1565 & 0 & 0,4255 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1565 & 0 & 0,4255 & 0 & 0 \\ 0,4255 & 0 & 1,3130 & 0 & 0,4255 & 0 \\ 0 & 0,4255 & 0 & 1,3130 & 0 & 0,4255 \\ 0 & 0 & 0,4255 & 0 & 1,1565 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4255 & 0 & 1,1565 \end{bmatrix};$$

при фиксировании первых трех значений последовательности матрица связи и условная корреляционная матрица определяются как

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & -0,3679 & 0\\ 0 & 0 & -0,3679\\ 0 & 0,1353 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{B}_{\mathrm{C}}=\begin{bmatrix}0,8647 & 0 & 0,3181\\ 0 & 0,8647 & 0\\ -0,3181 & 0 & 0,9817\end{bmatrix}.$$

Условные математические ожидания равны

$$m_{4c}=m_4-0,3679x_2,\ m_{5c}=m_5-0,3679x_3,\ m_{6c}=m_6+0,1353x_4.$$

Этот результат обусловлен корреляционными свойствами последовательности.

Анализ четырех составляющих блочного произведения $\mathbf{BD}=\mathbf{I}$ приводит также к смешанным соотношениям для матрицы связи

$$\mathbf{C}=-\mathbf{B}_{22}\mathbf{D}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{11}^{-1}=-\mathbf{B}_{22}\mathbf{D}_{21}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_{12}\mathbf{D}_{21}\right)^{-1}$$

и вектору связи последнего значения x_n при фиксированных предыдущих [3]:

$$\mathbf{C}=-\frac{\mathbf{D}_{21}}{d_{nn}}=-\frac{1}{d_{nn}}\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & d_{p-k+1} & \dots & d_p\end{bmatrix},\ \mathbf{D}_{22}=d_{nn}.$$

Аппроксимация немарковского гауссова процесса марковской последовательностью. Марковское приближение отсчетов $\mathbf{X}$ немарковского гауссова процесса с корреляционной матрицей $\mathbf{B}_X$ реализуется приведением его матрицы точности $\mathbf{D}_X$ к многодиагональному виду $\mathbf{D}$ путем замены нулями всех элементов за исключением элементов $2k+1$ главных диагоналей. Матрица $\mathbf{D}$ при условии положительной определенности матрицы $\mathbf{B}=\mathbf{D}^{-1}$ есть матрица точности марковской последовательности k-го порядка (в общем случае нестационарной). Если обнуляются элементы $d_{ij}\approx 0$, можно ожидать, что погрешность такого представления невелика, т.е. $\mathbf{B}\approx\mathbf{B}_X$. На основе корреляционной матрицы $\mathbf{B}$ можно построить программу-генератор марковской последовательности $\mathbf{X}'$, близкой к последовательности $\mathbf{X}$ по корреляционным свойствам. Условные матрицы (13) и (14) позволяют генерировать траектории $\mathbf{X}'$ точка за точкой, парами, триадами точек и т. д. [3].

Пример 2. Рассмотрим матрицы $\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2$ точности отсчетов $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ процессов с функциями корреляции $R_1(\tau)=0,5e^{-|\tau|}+0,5e^{-2|\tau|}$; $R_2(\tau)=2e^{-|\tau|}-e^{-2|\tau|}$; $\Delta=0,5$, $n=5$:

$$\mathbf{D}_1=\begin{bmatrix}1,3118 & -0,6269 & -0,0186 & -0,0093 & -0,0060\\ -0,6269 & 1,6114 & -0,6181 & -0,0142 & -0,0093\\ -0,0186 & -0,6181 & 1,6116 & -0,6181 & -0,0186\\ -0,0093 & -0,0142 & -0,6181 & 1,6114 & -0,6269\\ -0,0060 & -0,0093 & -0,0186 & -0,6269 & 1,3118\end{bmatrix},$$

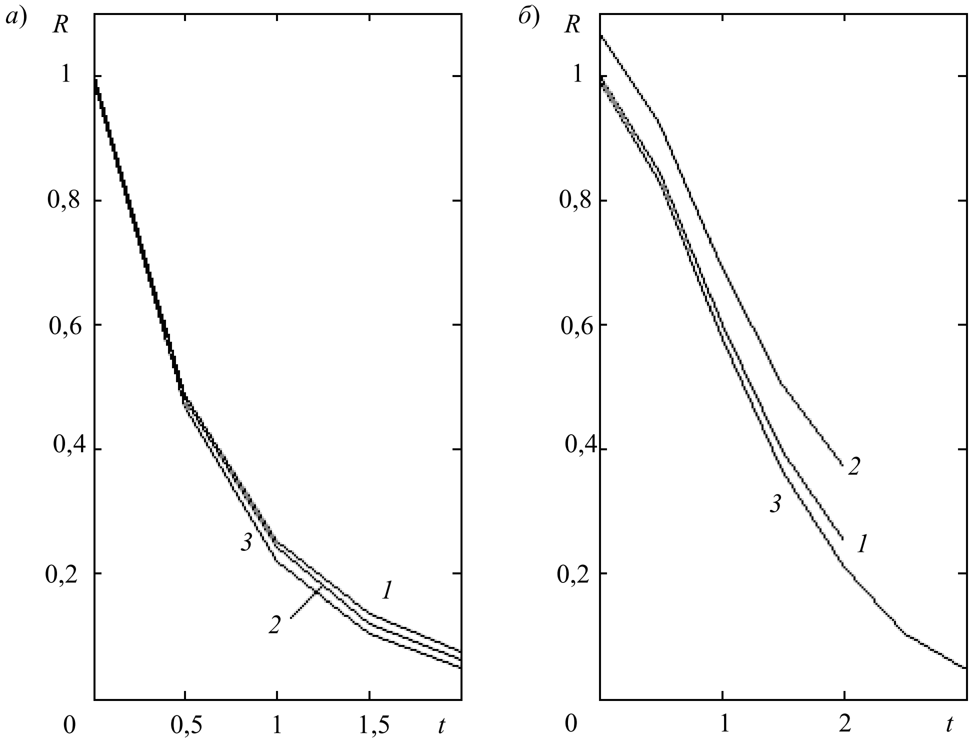
$$\mathbf{D}_2=\begin{bmatrix}4,2057 & -5,1474 & 2,2201 & -0,5406 & 0,1034\\ -5,1474 & 10,5031 & -7,8513 & 2,8272 & -0,5406\\ 2,2201 & -7,8513 & 11,6055 & -7,8513 & 2,2201\\ -0,5406 & 2,8272 & -7,8513 & 10,5031 & -5,1474\\ 0,1034 & -0,5406 & 2,2201 & -5,1474 & 4,2057\end{bmatrix}.$$

Элементы d_{15}, d_{14}, d_{13}, d_{24}, d_{25}, d_{35} матрицы $\mathbf{D}_1$ по абсолютной величине значительно меньше предыдущих, следовательно, можно, обнуляя их и оставляя пять или три ненулевые диагонали, аппроксимировать $\mathbf{X}_1$ марковской последовательностью второго или первого порядка. Результаты аппроксимации показаны в таблице и на рисунке, *а*, где кривая *1* соответствует функции корреляции исходной немарковской последовательности (в таблице — R), кривые *2* и *3* — функции корреляции аппроксимирующих последовательностей второго и первого порядков (в таблице — R_2 и R_1).

R	1,0000	0,4872	0,2516	0,1365	0,0768
R_2	0,9962	0,4822	0,2438	0,1218	0,0616
R_1	0,9857	0,4674	0,2188	0,1031	0,0493

Нестационарность аппроксимирующей последовательности первого порядка проиллюстрирована ниже, где представлены диагональные элементы корреляционной матрицы.

diag(B_1)	0,9857	0,9780	0,9717	0,9780	0,9857



Применение процедуры обнуления элементов к матрице $\mathbf{D}_2$ приводит к неудовлетворительным результатам: аппроксимация $\mathbf{X}_2$ последовательностью третьего порядка сопровождается заметными погрешностями воспроизведения корреляционных свойств (рисунок, *б*, кривая *2*). Если увеличить протяженность $\mathbf{X}_2$ до $n = 7$, то удовлетворительной становится аппроксимация последовательностью четвертого порядка (см. рисунок, *б*, кривая *3*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
2. *Королюк В. С.* и др. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
3. *Осипов Л. А., Воробьева Ю. Г.* Генерирование гауссовых марковских последовательностей // Информационно-управляющие системы. 2006. № 4 (23). С. 4—9.

Сведения об авторах

Станислав Николаевич Воробьев — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра информационно-сетевых технологий

Наталья Владимировна Гирина — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: natalia.girina@gmail.com

Леонид Андроникович Осипов — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра информационно-сетевых технологий

Рекомендована кафедрой
информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию
15.10.10 г.