УДК 681.326

В. И. Сеньченков, Д. Р. Абсалямов

ВЫБОР МИНИМАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА КОНТРОЛИРУЕМЫХ ПРИЗНАКОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

Рассматривается задача выбора минимального множества контролируемых признаков, обеспечивающих наблюдаемость заданных видов технического состояния системы, а следовательно, и требуемую достоверность принятия решений о ее функциональной пригодности. В основе решения указанной задачи — использование свойств ортогональных векторных систем.

Ключевые слова: *техническое состояние, контролируемый признак, скалярное произведение, ортогональная система.*

Введение. Для получения информации о техническом состоянии системы следует зарегистрировать траектории ее выходного процесса, которые затем подвергаются преобразованию с целью получения вектора контролируемых признаков $\mathbf{Y}_{<n'>}$. Этот вектор называется наблюдаемым состоянием системы как объекта контроля (ОК) технического состояния. В работе [1] предложен новый подход к преобразованию траекторий выходных процессов ОК, основанный на теории пространств измеримых функций и интеграла Лебега.

В общем случае размерность вектора $\mathbf{Y}_{<n'>}$ является избыточной. Это означает, что существует такой вектор контролируемых признаков $\mathbf{Y}_{<n>}$ меньшей размерности ($n< n'$), на котором все виды технического состояния ОК являются наблюдаемыми.

Выделение минимального множества контролируемых признаков — это важнейшая задача, решение которой позволяет снизить размерность математической модели ОК и повысить ее обозримость. Кроме того, повышается достоверность контроля технического состояния ОК благодаря снижению количества измерений на ОК, каждое из которых сопровождается методическими и метрологическими погрешностями.

Теоретико-множественная формулировка задачи выбора минимального множества контролируемых признаков. На множестве векторов $\mathbf{Y}_{<n'>}$ может быть задана структура n'-мерного евклидова пространства Y. В данном пространстве выделяются подмножества (области) Y^i ($i=\overline{1,m}$) наблюдаемых состояний, которые принадлежат i-му виду технического состояния ОК. В общем случае области Y^i частично пересекаются между собой, иначе — элементы $\mathbf{Y}_{<n'>}$ находятся между собой в отношении толерантности

$$\Omega\subset Y\times Y,$$

которое обладает следующими свойствами [2]:

а) рефлексивность: $\forall\,\mathbf{Y}\in Y,\ (\mathbf{Y},\mathbf{Y})\in\Omega$;

б) симметричность: $\forall\,\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2\in Y$: $(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2)\in\Omega\Rightarrow(\mathbf{Y}_2,\mathbf{Y}_1)\in\Omega$;

в) антитранзитивность: $\exists\,\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\mathbf{Y}_3\in Y$: $(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2)\in\Omega,\ (\mathbf{Y}_2,\mathbf{Y}_3)\in\Omega\Rightarrow(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_3)\notin\Omega$.

Выражение $(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) \in \Omega$ означает, что наблюдаемые состояния $\mathbf{Y}_i$ и $\mathbf{Y}_j$ находятся между собой в отношении толерантности Ω, а $(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) \notin \Omega$ указывает на то, что данные состояния в этом отношении Ω не находятся.

Из приведенных свойств следует, что области Y^i $(i = \overline{1, m})$ могут рассматриваться как классы толерантности, а фактор-пространство $Y/\Omega = \{Y^i |\ i = \overline{1, m}\}$ является покрытием пространства Y.

Процесс отнесения текущего состояния ОК к той или иной области Y^i в покрытии Y/Ω характеризуется значительной степенью неопределенности из-за пересечений областей и может давать ошибочные результаты.

Необходимо таким образом преобразовать области Y^i $(i = \overline{1, m})$, чтобы максимально исключить возможность их пересечения, т.е. отношение толерантности нужно трансформировать в отношение эквивалентности

$$\Sigma \subset Y \times Y,$$

обладающее следующими свойствами [2]:

а) рефлексивность: $\forall\, \mathbf{Y} \in Y, (\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) \in \Sigma$;

б) симметричность: $\forall\, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \in Y$: $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) \in \Sigma \Rightarrow (\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_1) \in \Sigma$;

в) транзитивность: $\forall\ \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3 \in Y$: $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) \in \Sigma, (\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3) \in \Sigma \Rightarrow (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_3) \in \Sigma$.

Данные свойства показывают, что отношение эквивалентности задает факторизацию пространства Y на непересекающиеся области Y^i, а фактор-пространство $Y/\Sigma = \{\ Y^i |\ i = \overline{1, m}\}$ является разбиением пространства Y.

Очевидно, что в предлагаемой постановке задачи трансформация отношения Ω в отношение Σ означает снижение размерности пространства Y. При этом снижение должно быть достигнуто за счет исключения тех координат из наблюдаемых состояний $\mathbf{Y}_{<n'>} \in Y$, по которым области Y^i $(i = \overline{1, m})$ пересекаются между собой. В результате снижения размерности пространства Y наблюдаемое состояние $\mathbf{Y}_{<n>} \in Y$ $(n < n')$ будет содержать только те координаты (контролируемые признаки), на которых все виды технического состояния являются наблюдаемыми.

Для того чтобы снизить размерность пространства Y и при этом исключить пересечение областей Y^i, необходимо знать, какие контролируемые признаки недостаточно информативны для определения текущего технического состояния ОК. Поэтому в настоящей статье рассматривается подход к снижению размерности пространства Y, связанный со сжатием изображений видов технического состояния ОК. Под изображением понимается формальное представление вида технического состояния как составной части математической модели ОК. Предлагаемая процедура сжатия изображений позволяет выявлять и исключать малоинформативные контролируемые признаки.

Решение задачи выбора минимального множества контролируемых признаков системы. Построение исходных (несжатых) изображений

$$\mathbf{E}_i = (e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{in'})^T,\ i = \overline{1, m}, \tag{1}$$

производится на основе следующих данных:

— перечень всех видов технического состояния ОК

$$Q = \{q_i \mid i = \overline{1, m}\}; \tag{2}$$

— состав контролируемых признаков

$$\mathbf{Y} = \{y_j \mid j = \overline{1, n'}\}; \tag{3}$$

— ограниченная по объему обучающая выборка реализаций наблюдаемых состояний, принадлежность которых каждому виду технического состояния ОК известна:

$$\begin{aligned}
&\left\{\mathbf{Y}^1_{<n'>k} \mid k=\overline{1,N^1}\right\} \subset Y^1;\\
&\left\{\mathbf{Y}^2_{<n'>k} \mid k=\overline{1,N^2}\right\} \subset Y^2;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\left\{\mathbf{Y}^m_{<n'>k} \mid k=\overline{1,N^m}\right\} \subset Y^m,
\end{aligned} \qquad (4)$$

где N^i ($i=\overline{1,m}$) — мощность множества элементов, принадлежащих подмножеству Y^i. Построение изображений (1) на основе исходных данных (2)—(4) с применением процедуры обучения рассматривается в работе [3].

Сжатие предполагает исключение из изображений $\mathbf{E}_{<n'>\,i}$ ($i=\overline{1,m}$) тех координат, по которым они неразличимы между собой (а соответствующие области $Y_{,}^{i}$ $i=\overline{1,m}$, пересекаются в пространстве Y по этим координатам). Таким образом, из наблюдаемых состояний исключаются и соответствующие указанным координатам контролируемые признаки.

Известно [4], что минимальная различимость двух векторов одинаковой размерности обеспечивается при условии их линейной независимости, степень различимости увеличивается при возрастании меры обладания векторами свойством ортогональности. Следовательно, для обеспечения наблюдаемости видов технического состояния требуется выполнение двух условий.

1. Матрица $\mathbf{E}$ транспонированных векторов изображений $\mathbf{E}_i$ ($i=\overline{1,m}$) не должна содержать одинаковых или пропорциональных строк:

$$\mathbf{E}_i \neq a_1\mathbf{E}_k,\ \forall\, a_1 \in \{\mathsf{R}\backslash 0\},\ i,k=\overline{1,m},\ i\neq k,$$

где R — множество вещественных чисел. Данное условие указывает на линейную независимость строк матрицы $\mathbf{E}$.

2. Значение скалярного произведения векторов $\mathbf{E}_i$ и $\mathbf{E}_k$ должно стремиться к нулю:

$$(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_k) \to 0,\ i,k=\overline{1,m},\ i\neq k.$$

Чем ближе к нулю значение скалярного произведения, тем больше мера обладания векторами $\mathbf{E}_i$ и $\mathbf{E}_k$ свойством ортогональности.

В зависимости от требований к достоверности контроля технического состояния необходимо задаваться некоторым пороговым значением a_2, чтобы выполнялось условие

$$(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_k) < a_2,\ i,k=\overline{1,m},\ i\neq k,\ a_2 \in \mathsf{R}^+, \qquad (5)$$

где R^+ — множество положительных вещественных чисел.

Для вывода правила задания a_2 и определения минимального состава контролируемых признаков следует рассмотреть механизм получения ортогональных систем векторов при условии, что имеются исходные линейно независимые, но не ортогональные системы. К ним относится и система векторов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, …, $\mathbf{E}_m$. Наиболее эффективна для решения подобных задач процедура ортогонализации Грама—Шмидта [4]. Она позволяет путем линейного преобразования системы $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2,\ldots,\mathbf{E}_m$ получить ортогональную систему $\mathbf{E}_1^{\perp}$, $\mathbf{E}_2^{\perp},\ldots,\mathbf{E}_m^{\perp}$, если общее число векторов m меньше их размерности n': $m < n'$. С помощью указанной процедуры связь между исходными и преобразованными векторами задается следующими выражениями:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1^{\perp} = a_{11}\mathbf{E}_1, \\ \mathbf{E}_2^{\perp} = \mathbf{E}_2 - a_{21}\mathbf{E}_1^{\perp}, \\ \mathbf{E}_3^{\perp} = \mathbf{E}_3 - a_{31}\mathbf{E}_1^{\perp} - a_{32}\mathbf{E}_2^{\perp}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathbf{E}_m^{\perp} = \mathbf{E}_m - \sum\limits_{k=1}^{m-1} a_{mk}\mathbf{E}_k^{\perp}, \end{cases} \qquad (6)$$

где

$$a_{11} = 1,\ a_{ik} = \frac{(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_k^{\perp})}{(\mathbf{E}_k^{\perp}, \mathbf{E}_k^{\perp})},\ i = \overline{2, m},\ k = \overline{1, m-1}. \qquad (7)$$

Из выражений (6) видно, что каждый вектор $\mathbf{E}_i^{\perp}$ ($i = \overline{1, m}$) ортогональной системы представляет собой некоторую линейную комбинацию векторов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2,\dots,\mathbf{E}_m$ и, следовательно, является ненулевым. В противном случае оказались бы линейно зависимыми векторы $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2,\dots,\mathbf{E}_m$, что не соответствует начальному условию.

Векторы $\mathbf{E}_i^{\perp}$ ($i = \overline{1, m}$) образуют матрицу $\mathbf{E}^{\perp}$, которая связана с исходной матрицей $\mathbf{E}$ соотношением $\mathbf{E}^{\perp}=\mathbf{AE}$. Очевидно, что матрица преобразования $\mathbf{A}$ является левой треугольной матрицей, диагональные элементы которой равны единице, а внедиагональные определяются по формулам (7), т.е.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\dots\dots\dots0 \\ -a_{21} & 1 & 0\dots\dots\dots0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 1\dots\dots\dots0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & -a_{m3}\dots\dots\dots1 \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Матрица $\overline{\mathbf{E}}^{\perp}$, составленная из скалярных произведений вида $(\mathbf{E}_i^{\perp}, \mathbf{E}_k^{\perp})$, i, $k = \overline{1, m}$, называется матрицей Грама. Определитель этой матрицы (определитель Грама) имеет вид

$$\det\overline{\mathbf{E}}^{\perp} = \begin{vmatrix} (\mathbf{E}_1^{\perp}, \mathbf{E}_1^{\perp}) & (\mathbf{E}_1^{\perp}, \mathbf{E}_2^{\perp})\dots\dots(\mathbf{E}_1^{\perp}, \mathbf{E}_m^{\perp}) \\ (\mathbf{E}_2^{\perp}, \mathbf{E}_1^{\perp}) & (\mathbf{E}_2^{\perp}, \mathbf{E}_2^{\perp})\dots\dots(\mathbf{E}_2^{\perp}, \mathbf{E}_m^{\perp}) \\ \dots\dots\dots & \\ (\mathbf{E}_m^{\perp}, \mathbf{E}_1^{\perp}) & (\mathbf{E}_m^{\perp}, \mathbf{E}_2^{\perp})\dots\dots(\mathbf{E}_m^{\perp}, \mathbf{E}_m^{\perp}) \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

Все внедиагональные элементы определителя (9) равны нулю:

$$(\mathbf{E}_i^{\perp}, \mathbf{E}_k^{\perp}) = 0,\ i,\ k = \overline{1, m},\ i \neq k, \qquad (10)$$

поскольку векторы $\mathbf{E}_i^{\perp}$ и $\mathbf{E}_k^{\perp}$ взаимно ортогональны. Для диагональных элементов справедливо неравенство

$$(\mathbf{E}_i^{\perp}, \mathbf{E}_i^{\perp}) > 0,\ i = \overline{1, m}, \qquad (11)$$

так как в матрице $\overline{\mathbf{E}}^{\perp}$ нет нулевых строк. По этой причине $\det\overline{\mathbf{E}}^{\perp} > 0$, следовательно, ранг матрицы $\overline{\mathbf{E}}^{\perp}$ равен m:

$$\operatorname{rang}\overline{\mathbf{E}}^{\perp} = m. \qquad (12)$$

В работе [5] показано, что если матрица Грама системы векторов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, …, $\mathbf{E}_m$ имеет ненулевые ведущие миноры и в каждой i-й строке данной матрицы диагональный элемент имеет наибольшее значение среди всех других элементов данной строки, то справедливы следующие утверждения.

1. Существует n таких координат ($m \le n < n'$), что сформированные из них векторы $\mathbf{E}_i = (e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{in})^T$, $i = \overline{1, m}$, будут попарно ортогональны.

2. Для обеспечения ортогональности не требуется линейного преобразования исходной системы векторов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$,…,$\mathbf{E}_m$, так как матрица преобразования вырождается в единичную матрицу. Если в качестве линейного преобразования применяется процедура Грамма—Шмидта, то в единичную обращается матрица (8):

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0............0 \\ 0 & 1 & 0............0 \\ \multicolumn{3}{c}{.....................................} \\ 0 & 0 & 0............1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, для обеспечения наблюдаемости всех видов технического состояния ОК на множестве из n контролируемых признаков необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\text{М}_\text{в} \neq 0$, где $\text{М}_\text{в}$ — ведущие миноры матрицы Грамма;

2) $(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_i) > (\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_k)$, $i, k = \overline{1,m}$, $i \neq k$.

Первое условие выполняется всегда, так как справедливо равенство (12). Второе условие также выполняется в силу справедливости соотношений (10)—(12). Кроме того, данное условие можно использовать при задании порогового значения a_2 в неравенстве (5):

$$a_2 = \min\{(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_i)\},\ i = \overline{1, m}.$$

Таким образом, из исходного множества контролируемых признаков может быть выбрано n ($m \le n < n'$) таких, которые обеспечивают наблюдаемость всех видов технического состояния ОК. Практически необходимо реализовать случай, когда $n = m$, поскольку именно тогда достигается минимально возможное множество контролируемых признаков.

Из вышеизложенного следует, что процедура сжатия изображений представляется совокупностью следующих этапов.

1. Вычисляются попарные скалярные произведения столбцов матрицы $\mathbf{E}$:

$$(\mathbf{E}_{j_p}, \mathbf{E}_{j_q}),\ p = \overline{1, n'-1},\ q = \overline{2, n'},\ p < q, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{E}_{j_p} = (e_{1j_p}, e_{2j_p}, ..., e_{ij_p}, ..., e_{mj_p}),\ \mathbf{E}_{j_q} = (e_{1j_q}, e_{2j_q}, ..., e_{ij_q}, ..., e_{mj_q}). \tag{14}$$

Из выражений (14) очевидно, что каждый столбец $\mathbf{E}_{j_p}$ матрицы $\mathbf{E}$ включает j_p-ю координату всех изображений $\mathbf{E}_{<n'>i}$ ($i = \overline{1, m}$).

Количество полученных скалярных произведений определяется из комбинаторной формулы

$$C_{n'}^2 = \frac{n'!}{2!(n'-2)!} = 0{,}5n'(n'-1),$$

где $C_{n'}^2$ — число сочетаний из n' по два.

2. Скалярные произведения (13) ранжируются по неубыванию:

$$(\mathbf{E}_{j_1}, \mathbf{E}_{j_2})_1 \le (\mathbf{E}_{j_1}, \mathbf{E}_{j_3})_2 \le ... \le (\mathbf{E}_{j_p}, \mathbf{E}_{j_q})_c,\ c = C_{n'}^2. \tag{15}$$

3. Из последовательности (15) скалярных произведений, начиная с первого ее элемента и далее подряд, выбираются столбцы без повторения номеров, входящие в состав произведений. Как только количество выбранных столбцов становится равным m, процесс заканчивается. Данные столбцы в наибольшей степени приближаются к попарно ортогональным. Их номера указывают и на номера контролируемых признаков, которые войдут в минимальное множество.

Полученные строки, т.е. сжатые изображения видов технического состояния

$$\mathbf{E}_i = (e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{in})^T,\ i = \overline{1, m},\ n = m,$$

также будут в наибольшей степени приближаться к попарно ортогональным, поскольку они включают элементы выбранных столбцов.

Реализация указанного этапа означает, что размерность евклидова пространства Y снижена до величины n за счет исключения тех координат из элементов данного пространства, по которым области Y^i пересекаются в наибольшей степени.

4. Выполняется проверка неравенств (5): если они выполняются, то сформированные изображения включаются в состав модели контроля технического состояния.

5. При невыполнении условий (5) следует изменить состав контролируемых признаков, так как ни исходное множество этих признаков, ни какое-либо из его подмножеств не обеспечивает наблюдаемости видов технического состояния ОК, а следовательно и требуемой достоверности контроля.

В том случае, когда состав контролируемых признаков изменяется, необходимо повторить процедуру обучения [3] на основе исходных данных (2)—(4) и сформировать новое множество несжатых изображений, которое затем также подвергается сжатию.

Таким образом, в настоящей работе показано, что использование минимального множества информативных контролируемых признаков является важнейшим условием повышения достоверности принятия решений о функциональной пригодности системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сеньченков В. И.* Математическое обеспечение контроля технического состояния мехатронных комплексов // Авиакосмическое приборостроение. 2005. № 10. С. 27—32.

2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2009.

3. *Сеньченков В. И.* Процедура обучения при разработке моделей контроля технического состояния сложных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2010. Т. 53, № 1. С. 3—8.

4. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.

5. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.

Сведения об авторах

Валентин Иванович Сеньченков — д-р техн. наук, профессор; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра специальных технических систем космических комплексов, Санкт-Петербург; E-mail: svi9@rambler.ru

Дамир Расимович Абсалямов — канд. техн. наук; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра специальных технических систем космических комплексов, Санкт-Петербург; E-mail: damir73@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
специальных технических систем
космических комплексов

Поступила в редакцию
22.09.10 г.