УДК 621.396:681.323

С. И. Зиатдинов

ДИСКРЕТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМ СГЛАЖИВАНИЕМ ОТСЧЕТОВ ВХОДНОГО СИГНАЛА

Рассмотрены цифровые дифференцирующие фильтры. Показано, что с ростом порядка фильтра резко увеличивается дисперсия шумов квантования. Исследована возможность промежуточного суммирования отсчетов входного сигнала с целью снижения влияния шумов квантования на ошибки вычисления производной.

Ключевые слова: *дискретизация сигнала, промежуточное суммирование, алгоритм дифференцирования.*

Общие положения. Задача дифференцирования импульсных последовательностей достаточно часто возникает при построении измерителей линейных и угловых скоростей движения объекта. В работе „Микропроцессорные системы…“ [см. лит.] рассмотрен вопрос дифференцирования цифровой последовательности $g[n]$, являющейся результатом квантования по уровню и дискретизации по времени с периодом T непрерывной функции времени $g(t)$. В ней был разработан следующий алгоритм для вычисления первой производной

$$\dot{g}[n] = T^{-1}\sum_{i=0}^{m} a_i g[n-i], \qquad (1)$$

где весовые коэффициенты

$$a_i = (-1)^i \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l!} C_l^i ,$$

C_l^i — биномиальные коэффициенты, причем $C_l^i=0$, если $i > k$.

Частотная передаточная функция дифференцирующего фильтра с алгоритмом (1) определяется следующим соотношением:

$$K_{\text{м}}(j\omega) = T^{-1}\sum_{i=0}^{m} a_i e^{-j\omega iT},$$

ей соответствует амплитудно-частотная (АЧХ) и фазочастотная (ФЧХ) характеристики

$$K_{\text{м}}(\omega) = T^{-1}\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{m} a_i \cos\omega iT\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{m} a_i \sin\omega iT\right)^2},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\sum_{i=0}^{m} a_i \sin\omega iT}{\sum_{i=0}^{m} a_i \cos\omega iT}.$$

Относительное отклонение АЧХ рассматриваемого дифференцирующего фильтра от частотной характеристики идеального дифференциатора с АЧХ вида $K(\omega) = \omega$ можно определить с помощью выражения

$$\Delta = \frac{K(\omega) - K_{\text{м}}(\omega)}{K(\omega)} = \frac{\Delta K(\omega)}{K(\omega)}.$$

В табл. 1 представлены результаты расчетов зависимости абсолютной величины относительной ошибки $|\Delta|$ от частоты $f = \omega / 2\pi$ гармонического входного сигнала для дифференцирующих фильтров различных порядков при периоде дискретизации T=0,001 с.

Таблица 1

f, Гц	$\|\Delta\|$, %					
	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
20	0,066	0,52	$0{,}75\cdot10^{-2}$	$0{,}49\cdot10^{-3}$	$0{,}14\cdot10^{-3}$	$0{,}53\cdot10^{-4}$
40	0,26	2,06	0,12	0,072	$0{,}85\cdot10^{-2}$	$0{,}28\cdot10^{-2}$
60	0,59	4,51	0,58	0,32	0,089	0,022
80	1,05	7,74	1,78	0,82	0,45	0,054
100	1,64	11,6	4,14	1,43	1,47	0,058

В табл. 2 представлены результаты расчетов абсолютной величины отклонения ФЧХ рассматриваемых фильтров от ФЧХ идеального дифференциатора.

Таблица 2

f, Гц	$\|\Delta\varphi\|$, …°					
	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
20	3,6	0,0282	0,028	$5{,}92\cdot10^{-4}$	$2{,}87\cdot10^{-4}$	$1{,}04\cdot10^{-5}$
40	7,2	0,2205	0,2153	0,0184	0,0081	0,0012
60	10,8	0,7171	0,6754	0,1334	0,0489	0,0189
80	14,4	1,6189	1,4310	0,5262	0,1387	0,12
100	18	2,9896	2,3813	1,4726	0,1961	0,4552

Проанализировав представленные данные, можно сделать следующие выводы. С ростом порядка дифференцирующего фильтра отклонение его АЧХ от АЧХ идеального дифференциатора резко уменьшается. Так, относительная ошибка $|\Delta|<0{,}1$ % при T=0,001 с для фильтра первого порядка обеспечивается на частоте меньше 30 Гц; третьего — меньше 40 Гц; четвертого — меньше 45 Гц; пятого — меньше 60 Гц; шестого — меньше 120 Гц. Вместе с тем дифференцирующий фильтр второго порядка имеет гораздо худшие амплитудно-частотные характеристики даже по сравнению с фильтром первого порядка. Аналогичное происходит с фильтром третьего порядка при частоте входного сигнала выше 60 Гц.

Из данных табл. 2 следует, что с ростом порядка дифференцирующего фильтра происходит резкое уменьшение фазовой ошибки.

Методические ошибки дифференцирования. Среднеквадратическая ошибка определения производной случайного стационарного сигнала в дискретные моменты времени может быть найдена как математическое ожидание квадрата разности между значением производной и вычисленным с помощью выражения (1) значением [1]:

$$\sigma^2 = M\left\{\left(\dot{g}[n]-T^{-1}\sum_{i=0}^{m} a_i g[n-i]\right)^2\right\} = -\ddot{R}(0) - 2T^{-1}\sum_{i=0}^{m} a_i \dot{R}[iT] + T^{-2}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_i a_j R[i-j], \quad (2)$$

где $R(\tau)$ — корреляционная функция сигнала $g(t)$; $\ddot{R}(\tau)$ — корреляционная функция производной сигнала $\dot{g}(t)$; $\dot{R}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция сигнала и его производной. При этом относительная среднеквадратичная ошибка дифференцирования

$$\Delta = \sigma / \sigma_{\dot{g}}. \quad (3)$$

Соотношения (2) и (3) позволяют находить необходимое значение m при заданном периоде дискретности T или выбирать период дискретности по заданным значению методической ошибки и порядку дифференцирующего фильтра.

На практике весьма важен случай дифференцирования входного сигнала гармонического вида

$$g(t) = A\sin(\beta t + \psi)$$

с амплитудой A, круговой частотой β и с равномерно распределенной на интервале случайной фазой ψ. Для данного сигнала

$$\sigma_g^2 = 0{,}5A^2;\ \sigma_{\dot{g}}^2 = 0{,}5\beta^2 A^2;\ K(\tau) = 0{,}5A^2\cos\beta\tau;$$

$$\dot{R}(\tau) = -0{,}5\beta A^2 \sin\beta\tau;\ \ddot{R}(\tau) = -0{,}5\beta^2 A^2\cos\beta\tau. \quad (4)$$

Результаты расчетов относительной среднеквадратичной ошибки с использованием соотношений (2)—(4) при $T = 10^{-3}$ с для различных значений частоты входного сигнала $f = \beta/2\pi$ и порядка дифференцирующего фильтра m представлены в табл. 3.

Таблица 3

f, Гц	Δ, %					
	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
20	6,28	0,53	0,049	0,005	$5{,}18\cdot10^{-4}$	—
40	12,54	2,11	0,394	0,079	$1{,}65\cdot10^{-2}$	$0{,}35\cdot10^{-2}$
60	18,77	4,69	1,32	0,395	0,123	$3{,}96\cdot10^{-6}$
80	22,96	8,28	3,08	1,23	0,508	0,216
100	31,07	12,81	5,93	2,93	1,51	0,796

Анализ полученных данных показывает, что относительная среднеквадратичная ошибка дифференцирования $\Delta \le 0{,}1$ % может быть получена для фильтра первого порядка при частоте входного сигнала $f < 3$ Гц, второго — при $f < 10$ Гц, третьего — при $f < 30$ Гц, четвертого — при $f < 45$ Гц, пятого — при $f < 60$ Гц, шестого — при $f < 120$ Гц.

Очевидно, что при одной и той же ошибке дифференцирования фильтрам различного порядка будет соответствовать различный период дискретизации входного сигнала. В табл. 4 приведены значения периода дискретизации для фильтров различного порядка, при которых ошибка дифференцирования $\Delta \le 0{,}1\,\%$ при $\beta = 1$ рад/с.

Таблица 4

m	1	2	3	4	5	6
T, мс	2,1	54,8	159	266,7	361,4	441

Влияние шумов квантования. Квантование по уровню приводит к появлению дополнительных случайных ошибок, которые в большинстве случаев представляются дискретным белым шумом, имеющим равномерное распределение и дисперсию $D_{\text{к}} = \delta^2/12$, где δ — цена единицы младшего разряда.

При этом в случае вычисления первой производной, согласно выражению (1), суммарная дисперсия ошибки квантования будет равна

$$D_{\text{к}} = T^{-2}\delta^2 \sum_{i=0}^{m} a_i^2/12 = T^{-2}\delta^2 F(m).$$

Значения функции $F(m)$ и среднеквадратичной ошибки квантования $\sigma_{\text{к}}$, отнесенной к величине δ/T, при различном порядке дифференцирующего фильтра приведены в табл. 5.

Таблица 5

m	1	2	3	4	5	6
$F(m)$	2	6,5	14,7	31	68	160
$\sigma_{\text{к}}T/\delta$	0,407	0,738	1,11	1,61	2,38	3,66

Из представленных данных видно, что рост порядка фильтра приводит к резкому увеличению результирующей ошибки квантования.

Рассмотрим вопрос компенсации роста случайной ошибки, вызванной квантованием, путем дополнительного суммирования (сглаживания) отсчетов входного сигнала дифференцирующего фильтра. Пусть на вход дифференцирующего фильтра с периодом T поступает непрерывная последовательность отсчетов входного сигнала $g[n]$. С помощью сумматора осуществляется текущее суммирование k отсчетов входного сигнала $g[n]$, $g[n-1]$, …, $g[n-(k-1)]$ и формируются промежуточные суммы

$$g_\Sigma[n] = \sum_{i=0}^{k-1} g[n-i]. \tag{5}$$

Промежуточные суммы (5) далее с периодом $T_\Sigma = LT$ ($L \ge k$) поступают в дискретный дифференцирующий фильтр, алгоритм работы которого определяется соотношением (1). В результате выражение, соответствующее алгоритму работы рассматриваемого дифференцирующего фильтра, можно записать следующим образом:

$$\dot{g}[n] = T_\Sigma^{-1}k^{-1}\sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{k-1} g[n-(Li+j)].$$

Проанализируем влияние числа суммируемых отсчетов k на ошибки вычисления производной $\dot{g}[n]$ входной последовательности $g[n]$. При этом среднеквадратичная ошибка вычисления первой производной находится из соотношения

$$\sigma^2 = M\left\{\left(\dot{g}[n] = T_\Sigma^{-1}k^{-1}\sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{k-1} g[n-(Li+j)]\right)^2\right\} =$$

$$= -\ddot{R}(0) - 2T_\Sigma^{-1}\dot{g}[n] = T_\Sigma^{-1}k^{-1}\sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{k-1} \dot{R}[Li+j] + T_\Sigma^{-2}\sum_{i=0}^{m}\sum_{p=0}^{m} a_i a_p \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{c=0}^{k-1} R[L(i-p)+(j-c)]. \tag{6}$$

Для компенсации увеличивающихся с ростом порядка дифференцирующего фильтра ошибок квантования необходимо формировать промежуточные суммы из $k \geq F(m)$ отсчетов входного сигнала. При этом возникает дополнительная методическая ошибка $\Delta_{\text{доп}}$, которую в дальнейшем положим равной, например, $\Delta_{\text{доп}}=\Delta$. Данное требование можно выполнить правильным выбором периода дискретности T взятия дополнительных отсчетов при сохранении основного периода дискретности $T_\Sigma = LT$.

Основной период дискретности T_Σ определяется заданной величиной методической ошибки и для $\Delta \leq 0{,}1\,\%$, $\beta = 1$ рад/с находится из табл. 4.

Результаты расчетов по формуле (6) периода дискретности T взятия дополнительных отсчетов при $\Delta_{\text{доп}}=\Delta=0{,}1$ % и $\beta = 1$ рад/с с учетом данных табл. 4 приведены в табл. 6.

Таблица 6

m	1	2	3	4	5	6
k	2	6,5	14,7	31	68	160
T_Σ, мс	2,1	54,8	159	266,7	361,4	441
T, мс	1,95	0,56	0,425	0,145	0,035	0,0135

Из полученных данных следует, что в случае использования фильтров высокого порядка для снижения уровня шумов, вызванных квантованием, необходимо брать большое количество дополнительных отсчетов входного сигнала. Это приводит к резкому увеличению методической ошибки дифференцирования.

Выводы

1. Использование дифференцирующих фильтров высокого порядка приводит к резкому росту ошибок, связанных с шумами квантования.

2. Промежуточное суммирование отсчетов входного сигнала позволяет снизить влияние шумов квантования на ошибки вычисления производной.

ЛИТЕРАТУРА

Микропроцессорные системы автоматического управления / Под ред. *В. А. Бесекерского*. Л.: Машиностроение, 1988. 365 с.

Сведения об авторе

Сергей Ильич Зиатдинов — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: kaf53@GUAP.ru

Рекомендована кафедрой информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию 29.09.10 г.