

С. П. ПИРОГОВ, А. Ю. ЧУБА

РАСЧЕТ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МАНОМЕТРИЧЕСКИХ ТРУБЧАТЫХ ПРУЖИН

Представлен вывод уравнений движения манометрической трубчатой пружины. Пружина рассматривается как изогнутый стержень, совершающий колебания в плоскости кривизны центральной оси. Приведены зависимости частоты собственных колебаний трубчатых пружин от геометрических параметров.

Ключевые слова: собственные колебания, манометрическая трубчатая пружина.

Манометрические приборы часто работают в условиях вибраций, при этом их основные упругие чувствительные элементы — трубчатые пружины — совершают колебательное движение, что негативно сказывается на точности приборов.

Важной характеристикой виброустойчивости приборов является частота собственных колебаний трубчатых пружин, поэтому необходимо определить влияние их геометрических размеров на данный параметр.

Существуют запатентованные конструкции манометрических пружин, обладающих повышенной вибростойкостью. Все эти пружины имеют поперечное сечение, переменное по длине трубки. В настоящей статье предлагается метод расчета частот собственных колебаний, применимый и для пружин, имеющих переменное поперечное сечение.

Будем рассматривать трубку Бурдона как изогнутый стержень, совершающий колебания в плоскости кривизны центральной оси. Уравнения колебаний (в соответствии с принципом Даламбера) получены из равенств нулю сумм проекций на нормаль и касательную всех сил, приложенных к элементу пружины (с учетом силы инерции) [1] (рис. 1):

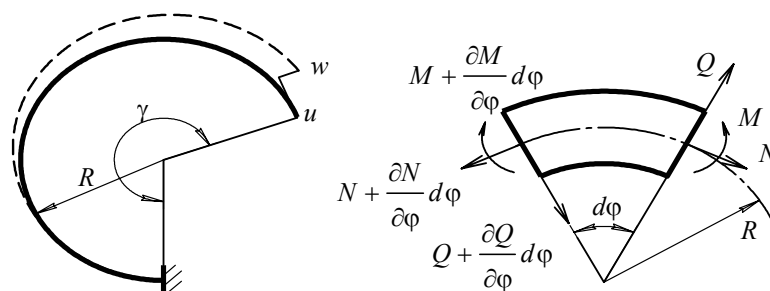


Рис. 1

$$\left. \begin{aligned} -\frac{N}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} &= m_i(\varphi) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \varphi} - \frac{Q}{R} &= m_i(\varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где N — продольная сила; Q — поперечная сила; $m_i(\varphi)$ — масса единицы длины трубки (масса поперечного сечения с координатой φ); w, u — соответственно радиальная и окружная составляющие перемещения центра тяжести поперечного сечения с координатой φ .

Система уравнений (1) для перемещений u и w имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ D_R \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ H_R \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right\} &= m_i(\varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ -D_R \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left\{ H_R \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right\} &= m_i(\varphi) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$D_R = \frac{ES(\varphi)}{(1-\mu^2)R^2}, \quad H_R = \frac{EJ(\varphi)K_K(\varphi)}{R^4(1-\mu^2)}, \quad m_i(\varphi) = \rho S(\varphi),$$

где E — модуль упругости материала трубки; $S(\varphi)$ — площадь поперечного сечения трубки; μ — коэффициент Пуассона; $J(\varphi)$ — момент инерции сечения; $K_K(\varphi)$ — коэффициент Кармана (определяется методом, предложенным в работе [2]); величины $S(\varphi)$, $J(\varphi)$, $K_K(\varphi)$ зависят от угловой координаты φ сечения и его геометрических размеров.

Система уравнений (2) решается при следующих граничных условиях: в сечении жесткого закрепления пружины (при $\varphi=0$) касательное и нормальное перемещения и угол поворота γ поперечного сечения трубки равны нулю, а на противоположном конце (при $\varphi=\gamma$) изгибающий момент (M), перерезывающие и растягивающие усилия обращаются в нуль.

Собственные изгибные колебания подчиняются гармоническому закону с частотой k , поэтому решение системы уравнений (2) можно представить в виде

$$u(\varphi, t) = u(\varphi) \sin(kt + \beta), \quad w(\varphi, t) = w(\varphi) \sin(kt + \beta), \quad (3)$$

где k — круговая частота колебаний.

При решении системы (2) применялся приближенный метод Бубнова — Галеркина. В соответствии с этим методом зададим искомые функции составляющих перемещений:

$$u(\varphi) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \sum_{i=1}^n a_i u_i; \quad w(\varphi) = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_n w_n = \sum_{j=1}^n b_j w_j, \quad (4)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ — неопределенные коэффициенты; $u_1, u_2, u_n, w_1, w_2, w_n$ — базисные функции переменной φ .

Подстановка выражений (4) в преобразованную методом Галеркина систему (2) приводит к системе из $2n$ уравнений, при этом в силу граничных условий часть слагаемых равны нулю:

$$\begin{aligned} & a_1 \int_0^\gamma \left(-D_R \frac{du_1}{d\varphi} - H_R \frac{du_1}{d\varphi} \right) \frac{du_i}{d\varphi} d\varphi + \dots + a_n \int_0^\gamma \left(-D_R \frac{du_n}{d\varphi} - H_R \frac{du_n}{d\varphi} \right) \frac{du_i}{d\varphi} d\varphi + \\ & + b_1 \int_0^\gamma \left(-D_R w_1 + H_R \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} \right) \frac{du_i}{d\varphi} d\varphi + \dots + b_n \int_0^\gamma \left(-D_R w_n + H_R \frac{d^2 w_n}{d\varphi^2} \right) \frac{du_i}{d\varphi} d\varphi = \\ & = -a_1 k^2 \int_0^\gamma m_0 u_1 u_j d\varphi - \dots - a_n k^2 \int_0^\gamma m_0 u_n u_j d\varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_1 \int_0^\gamma \left(-D_R \frac{du_1}{d\varphi} w_j + H_R \frac{du_1}{d\varphi} \frac{d^2 w_j}{d\varphi^2} \right) d\varphi + \dots + a_n \int_0^\gamma \left(-D_R \frac{du_n}{d\varphi} w_i + H_R \frac{du_n}{d\varphi} \frac{d^2 w_j}{d\varphi^2} \right) d\varphi + \\
 & + b_1 \int_0^\gamma \left(-D_R w_1 w_j - H_R \frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} \frac{d^2 w_j}{d\varphi^2} \right) d\varphi + \dots + b_n \int_0^\gamma \left(-D_R w_n w_j - H_R \frac{d^2 w_n}{d\varphi^2} \frac{d^2 w_j}{d\varphi^2} \right) d\varphi = \\
 & = -b_1 k^2 \int_0^\gamma m_0 w_1 w_j d\varphi - \dots - b_n k^2 \int_0^\gamma m_0 w_n w_i d\varphi .
 \end{aligned}$$

Выберем базисные функции u_i и w_j :

$$u_i(\varphi) = \varphi^i, \quad i = 1, \dots, n; \quad w_j(\varphi) = \varphi^{j+1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Легко проверить, что выбранные функции удовлетворяют главным граничным условиям. Получим однородную систему алгебраических уравнений порядка $2n$ относительно неизвестных $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. Данная система уравнений имеет ненулевое решение только в том случае, если определитель матрицы этой системы равен нулю. Запишем его в виде

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & B_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{2n,1} & \dots & B_{2n,n} \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{1,1} &= \int_0^\gamma (-D_R - H_R) d\varphi + k^2 \int_0^\gamma m_0 \varphi^2 d\varphi, \quad B_{1,n} = \int_0^\gamma (-D_R \varphi^{n+1} + H_R n(n+1) \varphi^{n-1}) d\varphi; \\
 A_{2n,1} &= \int_0^\gamma (-D_R \varphi^{n+1} + H_R n(n+1) \varphi^{n-1}) d\varphi, \\
 B_{2n,n} &= \int_0^\gamma (-D_R \varphi^{2n+2} - H_R n^2 (n+1)^2 \varphi^{2n-2}) d\varphi + k^2 \int_0^\gamma m_0 \varphi^{2n+2} d\varphi.
 \end{aligned}$$

Условие равенства нулю определителя (5) можно рассматривать как уравнение для определения частот колебаний k . Поскольку порядок определителя равен $2n$, то уравнение будет иметь $2n$ корней, которые являются частотами собственных колебаний трубчатой пружины. Те значения k , при которых определитель равен нулю, являются круговыми частотами собственных колебаний [3].

Результаты численного эксперимента показали, что с увеличением количества базисных функций u_i и w_j частота колебаний стремится к некоторому предельному значению. Согласно расчетам для получения удовлетворительных результатов по первой собственной частоте колебаний достаточно вычислять по пять базисных функций.

На основе рассмотренного способа определения частот собственных колебаний составлены алгоритм и программа для ЭВМ [4], с помощью которой проведены расчеты частот собственных колебаний. По результатам расчетов построены графики зависимости частот собственных колебаний от геометрических параметров трубчатых пружин (рис. 2): радиуса изгиба

трубки (R), толщины стенки трубки (h), радиуса трубки-заготовки (r), угла поворота (γ) и отношения полуосей эллиптической трубки-заготовки (a/b).

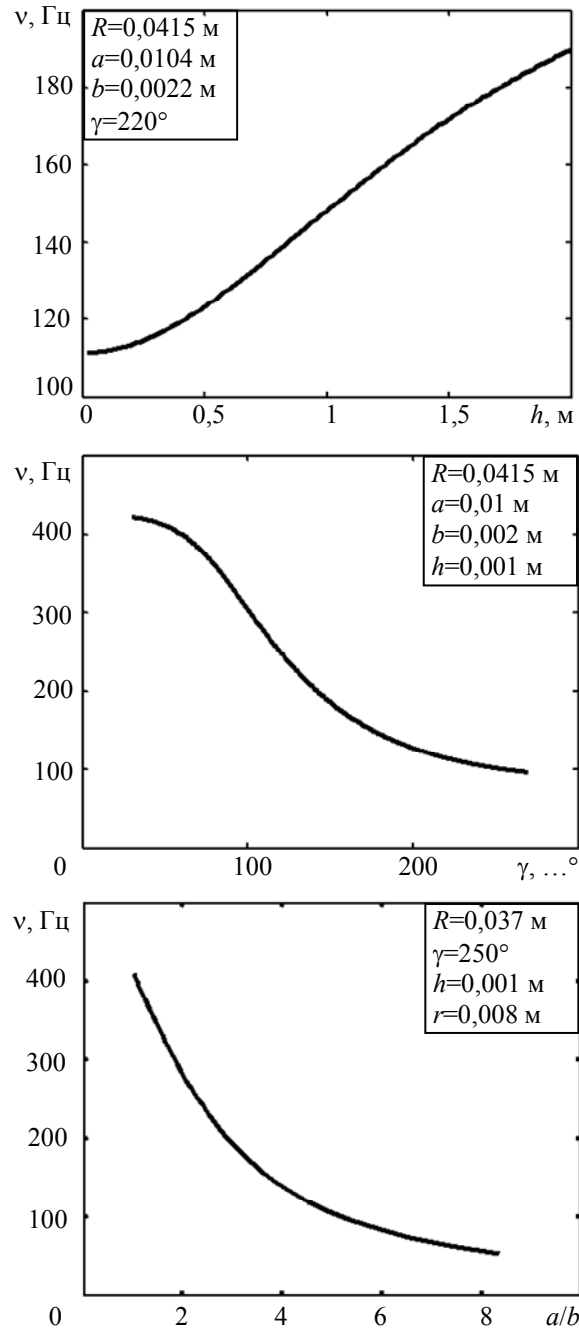


Рис. 2

Для пружин с переменным по длине поперечным сечением установлено, что уменьшение толщины стенки трубки от закрепленного конца к свободному, а также уменьшение радиуса трубки-заготовки от закрепленного конца к свободному приводит к увеличению частоты собственных колебаний. Сравнение манометрических пружин разных конструкций показало, что наибольшей частотой собственных колебаний обладают манометрические пружины, сечения которых изменяются от восьмеркообразного (в закреплении) до плоскоовального (на свободном конце). Частоты собственных колебаний трубчатых пружин переменного по длине поперечного сечения на 20 — 40 % превышают частоты собственных колебаний пружин обычных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высш. школа, 1980. 408 с.
2. Дорофеев С. М., Пирогов С. П., Самакалев С. С. Приближенное решение задачи об изгибе манометрической пружины переменного сечения // Мегапаскаль: Сб. науч. тр. Тюмень: ТюмГНГУ, 2006. № 2. С. 46—48.
3. Чуба А. Ю., Пирогов С. П., Дорофеев С. М. Определение собственных частот колебаний манометрических трубчатых пружин // Изв. вузов. Нефть и газ. 2007. № 2. С. 70—74.
4. Свид. об официальной регистрации программы ЭВМ, 2007612005 РФ. Программный комплекс „ПКРМТП“ для расчета манометрических трубчатых пружин / А. Ю. Чуба, С. С. Самакалев, С. П. Пирогов. 2007611194; Заявл. 2.04.2007; Опубл. 17.05.2007.

Сведения об авторах

- Сергей Петрович Пирогов** — канд. техн. наук, доцент; Тюменский государственный нефтегазовый университет, кафедра теоретической и прикладной механики;
E-mail: piro-gow@yandex.ru
- Александр Юрьевич Чуба** — канд. техн. наук, доцент; Тюменская государственная сельскохозяйственная академия, кафедра общетехнических дисциплин;
E-mail: aleksandr-chuba@mail.ru

Рекомендована кафедрой
теоретической и прикладной
механики ТюмГНГУ

Поступила в редакцию
24.12.10 г.