
ЭЛЕКТРОННЫЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ УСТРОЙСТВА

УДК 621.396:681.323

С. И. ЗИАТДИНОВ

ТЕОРЕМА ОТСЧЕТОВ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО И ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО СИГНАЛОВ

Показано, что для однозначного восстановления непрерывного комплексного сигнала по его отсчетам необходимо, чтобы частота дискретизации была не меньше удвоенной наивысшей частоты в спектре сигнала. Для однозначного восстановления непрерывного действительного сигнала необходимо, чтобы частота дискретизации была больше удвоенной наивысшей частоты в спектре сигнала.

Ключевые слова: комплексный и действительный сигналы, дискретизация, восстановление, ошибки.

Фундаментальная теорема отсчетов [1, 2] (теорема В. А. Котельникова) находит самое широкое применение в задачах дискретной и цифровой обработки непрерывных сигналов. Согласно этой теореме отсчеты низкочастотного сигнала $u(t)$ с ограниченным спектром для его точного восстановления следует брать с частотой дискретизации F_d , не меньшей, чем двусторонняя (полная) ширина полосы частот, занимаемая этим сигналом: $F_d \geq 2F_{\max}$, здесь F_{\max} — наивысшая частота в спектре сигнала.

Рассмотрим справедливость теоремы отсчетов для комплексного и действительного сигналов.

Комплексный сигнал. Выражение для комплексного сигнала в общем виде можно представить следующим образом:

$$\dot{u}(t) = U(t)e^{j[\Omega t + \psi(t)]}, \quad (1)$$

где $U(t)$, Ω , $\psi(t)$ — огибающая, несущая частота и начальная фаза сигнала.

Флюктуирующий сигнал (1) при разложении в ряд Фурье представляется суммой бесконечного числа элементарных гармонических составляющих, каждая из которых имеет свою амплитуду, частоту и начальную фазу.

В дальнейшем будем рассматривать только наивысшую составляющую спектра сигнала (1), который в дискретном виде записывается следующим образом:

$$\dot{u}(t_i) = Ue^{j\Omega t_i}; \quad t_i = iT_d + \Delta T, \quad (2)$$

где $T_d = 1/F_d$ — период дискретизации; ΔT — смещение по времени при взятии текущего отсчета; $i=0, 1, 2 \dots$ — номер текущего отсчета; для простоты рассуждений начальная фаза сигнала (2) принята равной нулю.

Пусть интерполирующий сигнал является непрерывным комплексным гармоническим колебанием с частотой Ω , равной частоте сигнала:

$$\dot{i}_n(t) = U_n(t)e^{j[\Omega t + \varphi(t)]}, \quad (3)$$

где U_n , Ω , φ — огибающая, несущая частота и начальная фаза интерполирующего сигнала.

Определим, при каких значениях U_n , φ и ΔT интерполирующий сигнал (3) совпадает с исходным сигналом (2).

Пусть в точках отсчета $\dot{i}(t_i) = \dot{i}_n(t_i)$ или

$$Ue^{j\Omega t_i} = U_n e^{j[\Omega t_i + \varphi]}. \quad (4)$$

Комплексные сигналы (4) представим в тригонометрической форме:

$$U \cos \Omega t_i + jU \sin \Omega t_i = U_n \cos(\Omega t_i + \varphi) + jU_n \sin(\Omega t_i + \varphi). \quad (5)$$

Равенство (5) будет справедливо, если его вещественные части и коэффициенты мнимых частей будут равны:

$$\left. \begin{aligned} U \cos \Omega t_i &= U_n \cos(\Omega t_i + \varphi), \\ U \sin \Omega t_i &= U_n \sin(\Omega t_i + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

После подстановки в уравнения (6) значения дискретного времени $t_i = iT_d + \Delta T$ получим

$$\left. \begin{aligned} U \cos[\Omega(iT_d + \Delta T)] &= U_n \cos[\Omega(iT_d + \Delta T) + \varphi], \\ U \sin[\Omega(iT_d + \Delta T)] &= U_n \sin[\Omega(iT_d + \Delta T) + \varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Возведем в квадрат левые и правые части соотношений (7):

$$\left. \begin{aligned} U^2 \cos^2[\Omega(iT_d + \Delta T)] &= U_n^2 \cos^2[\Omega(iT_d + \Delta T) + \varphi], \\ U^2 \sin^2[\Omega(iT_d + \Delta T)] &= U_n^2 \sin^2[\Omega(iT_d + \Delta T) + \varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Складывая левые и правые части выражений (8), получаем $U^2 = U_n^2$.

Отсюда следует, что отсчеты комплексного сигнала $U \cos \Omega t_i$ и $U \sin \Omega t_i$ однозначно определяют амплитуду непрерывного интерполирующего сигнала, равную амплитуде непрерывного входного сигнала, т.е. $U_n = U$.

Согласно теореме отсчетов на нижней границе частота дискретизации F_d равна удвоенной частоте сигнала $F_c = \Omega / 2\pi$. Далее будем рассматривать именно этот случай, когда $F_d = 2F_c$. Тогда соотношения (7) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \cos(i\pi + \Omega\Delta T) &= \cos(i\pi + \Omega\Delta T + \varphi), \\ \sin(i\pi + \Omega\Delta T) &= \sin(i\pi + \Omega\Delta T + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Данные равенства будут выполняться только при условии $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ для любого значения ΔT .

Таким образом, однозначное восстановление непрерывного комплексного сигнала по его отсчетам возможно, если частота дискретизации больше удвоенной наивысшей частоты в спектре сигнала или равна ей. Этот результат полностью совпадает с теоремой отсчетов Котельникова.

Действительный сигнал. В данном случае можно воспользоваться одним из уравнений системы (7):

$$U \sin[\Omega(iT_d + \Delta T)] = U_n \sin[\Omega(iT_d + \Delta T) + \varphi]. \quad (10)$$

Определим, при каких значениях U_n , ΔT и φ будет выполняться данное равенство. Рассмотрим крайнюю точку отсчета, когда частота дискретизации равняется удвоенной частоте сигнала. Тогда соотношение (10) принимает вид

$$U \sin(i\pi + \Omega\Delta T) = U_{\text{и}} \sin(i\pi + \Omega\Delta T + \varphi). \quad (11)$$

Пусть $\Delta T = 0$. При этом отсчеты сигнала $u(t)$ берутся в точках, в которых его значения равны нулю. В результате выражение (11) преобразуется к виду

$$U_{\text{и}} \sin(i\pi + \varphi) = 0.$$

Данное соотношение справедливо для любых значений $U_{\text{и}}$ при $\varphi = 0, \pi, 2\pi, \dots$

Таким образом, при $\Delta T = 0$; $\varphi = 0, \pi, 2\pi, \dots$ и $F_{\text{д}} = 2F_{\text{с}}$ сигналу $u(t_i)$ можно поставить в соответствие бесчисленное количество интерполирующих сигналов $u_{\text{и}}(t_i)$, имеющих любую амплитуду (рис. 1).

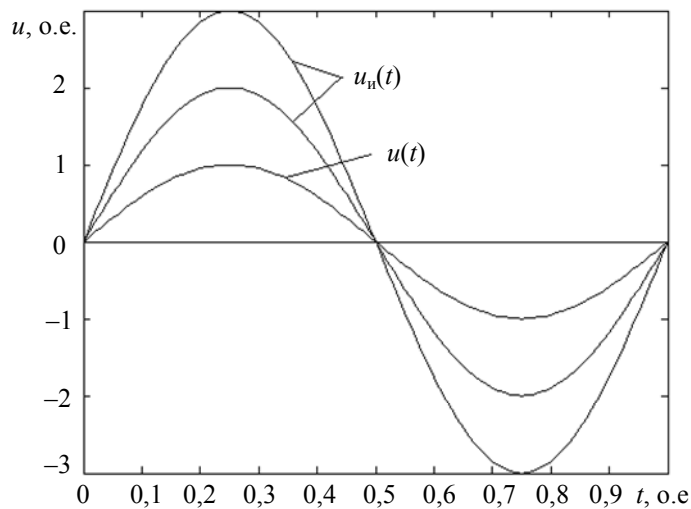


Рис. 1

При $\varphi \neq 0, \pi, 2\pi, \dots$ формула (11) записывается следующим образом:

$$U_{\text{и}} = U \frac{0}{\sin(i\pi + \varphi)}.$$

В данном случае отсутствует интерполирующий сигнал с отличной от нуля амплитудой. Следовательно, при взятии отсчетов синусоидального сигнала в точках, в которых его значения равны нулю, интерполирующий синусоидальный сигнал также проходит через эти точки и может иметь любую амплитуду. При этом восстановление исходного сигнала по его отсчетам невозможно.

Далее положим $\Delta T \neq 0$. При этом точки отсчета сигнала $u(t)$ не совпадают с моментами времени, в которых его значения равны нулю.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $F_{\text{д}} = 2F_{\text{с}}$, $\Delta T = 0,25T_{\text{с}}$ ($T_{\text{с}} = 1/F_{\text{с}}$). При этом из выражения (10) находим

$$U_{\text{и}} = U \frac{\sin[\Omega(iT_{\text{д}} + 0,25T_{\text{с}})]}{\sin[\Omega(iT_{\text{д}} + 0,25T_{\text{с}}) + \varphi]} = \frac{U}{\cos \varphi}.$$

Полученное соотношение позволяет найти амплитуду интерполирующего сигнала для различных значений φ (рис. 2); см. ниже.

φ, \dots°	0	45	60	90
$U_{\text{и}}$	U	$2U/\sqrt{2}$	$2U$	∞

Следовательно, существует бесконечное множество интерполирующих сигналов. Равенство $u_{\text{и}}(t) = u(t)$ будет выполняться при любом t только при $F_{\text{д}} > 2F_{\text{с}}$ и $\varphi = 0$. Данные

рассуждения можно распространить на более сложные сигналы с ограниченным наивысшей частотой спектром.

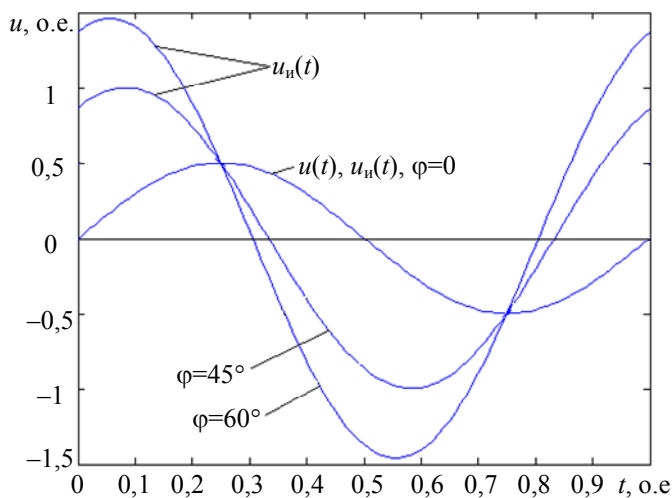


Рис. 2

Вывод. Однозначное восстановление непрерывного комплексного сигнала с ограниченным спектром по его отсчетам возможно в случае, когда частота дискретизации больше удвоенной наивысшей частоты в спектре сигнала или равна ей. В то же время для однозначного восстановления действительного сигнала частота дискретизации должна быть больше удвоенной наивысшей частоты в спектре сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котельников В. А. О пропускной способности „эфира“ и проволоки в электросвязи // Материалы к Первому Всесоюзному съезду по вопросам реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. М.: Изд-во Управления связи РККА, 1933.
2. Худяков Г. И. Теорема отсчетов теории сигналов и ее создатели // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53, № 9. С. 1157—1168.

Сведения об авторе

Сергей Ильич Зиатдинов

— д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: Kaf53@GUAP.ru

Рекомендована кафедрой
информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию
17.11.10 г.