

А. М. ЛЕСТЕВ, А. В. ЕФИМОВСКАЯ

О ВЛИЯНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФАКТОРОВ НА ДИНАМИКУ МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА С ДВУХМАССОВЫМ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Анализируется влияние нелинейных факторов на динамику двухмассового и одномассового микромеханических гироскопов типа L-L. Обосновывается более высокая стабильность технических характеристик двухмассовой конструкции по сравнению с одномассовой.

Ключевые слова: микромеханический гироскоп, нелинейные факторы, стабильность технических характеристик, резонансные кривые.

Повышение точности и надежности технических характеристик микромеханических гироскопов (ММГ) — актуальная научно-техническая проблема современной микросистемной техники [1]. Решение этой проблемы осуществляется конструкторско-технологическими и схемотехническими методами [2]. Одно из направлений повышения точности и стабильности технических характеристик ММГ — разработка многомассовых конструкций приборов этого типа (некоторые конструктивные схемы многомассовых ММГ представлены в работе [3]). В настоящей статье приводятся результаты исследований влияния нелинейных факторов — нелинейной зависимости сил упругости подвеса инерционных масс и электростатических сил контура подстройки частот колебательной системы ММГ — на динамику чувствительного элемента ММГ типа L-L [4] и обосновывается более высокая стабильность технических характеристик ММГ с двумя инерционными массами по сравнению с одномассовой конструкцией прибора. В линейной постановке аналогичная задача рассматривалась в работе [5].

Описание конструкции ММГ приведено в патенте [4]. Конструкция прибора содержит две инерционные массы, подвешенные на упругих элементах в рамке, которая, в свою очередь, упругими элементами связана с корпусом прибора. Конструкция упругого подвеса обеспечивает перемещение рамки вместе с инерционными массами вдоль оси X (первичные колебания), а инерционных масс относительно рамки — вдоль оси Y (вторичные колебания). Ось чувствительности ММГ ортогональна плоскости рамки. В конструкции прибора предусмотрена система вибровозбуждения и стабилизации параметров первичных колебаний чувствительного элемента ММГ и контур подстройки частот, позволяющий электростатическим способом осуществлять изменение спектра частот колебательной системы ММГ.

Кинематическая схема и конечно-элементная модель колебательной системы ММГ в программном комплексе ANSYS приведены на рис. 1, *а*, *б*, соответственно. На основе конечно-элементной модели производится выбор параметров конструкции ММГ [6]. Первые три собственные частоты колебательной системы ММГ равны 5 659, 6 920 и 6 936 Гц.

Приведем дифференциальные уравнения движения инерционных масс ММГ при вращении основания прибора вокруг оси чувствительности с угловой скоростью Ω . С рамкой ММГ свяжем систему координат $OXYZ$, направив ось X в направлении перемещения рамки, ось Y — в направлении перемещений инерционных масс, ось Z — вдоль оси чувствительности прибора. Примем, что рамка ММГ вместе с инерционными массами приводится электростатическим виброприводом в колебания вдоль оси по закону $x = -a_x \sin \omega t$ и реализуется режим стабилизации параметров колебаний рамки. Обозначим через y_1 и y_2 перемещения инерционных масс вдоль оси Y относительно рамки, отсчитываемые от положений статического равновесия. Силы упругости подвеса инерционных масс определим выражениями

$C_{yj}(y_j) = C_{yj}y_j + \chi_{yj}y_j^3$, $j = 1, 2$, где C_{yj} и χ_{yj} — коэффициенты линейной и нелинейной составляющих сил упругости. Учитывая введенные обозначения, дифференциальные уравнения движения инерционных масс запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + \mu_{y1}\dot{y}_1 + (C_{y1} + C_{y2} - m_1\Omega^2)y_1 - C_{y2}y_2 &= 2m_1\Omega a_x \omega \cos \omega t - (\chi_{y1} + \chi_{y2})y_1^3 + \chi_{y2}y_2^3; \\ m_2\ddot{y}_2 + \mu_{y2}\dot{y}_2 + (C_{y2} - m_2\Omega^2)y_2 - C_{y2}y_1 &= 2m_2\Omega a_x \omega \cos \omega t - \chi_{y2}y_2^3 + \chi_{y2}y_1^3 - \\ &- E(\Delta - y_2) + E(\Delta + y_2), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где m_1, m_2 — массы инерционных элементов, μ_{y1}, μ_{y2} — коэффициенты демпфирования, а электростатические силы контура подстройки частот ММГ определяются выражениями [3]

$$E(\Delta \pm y_2) = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2(\Delta \pm y_2)^2},$$

где ε_0 — диэлектрическая постоянная вакуума, ε — относительная диэлектрическая постоянная среды между электродами датчика силы, S — площадь взаимного перекрытия электродов датчика силы, U — напряжение, подаваемое на электроды датчика силы, Δ — номинальный зазор между электродами датчика силы.

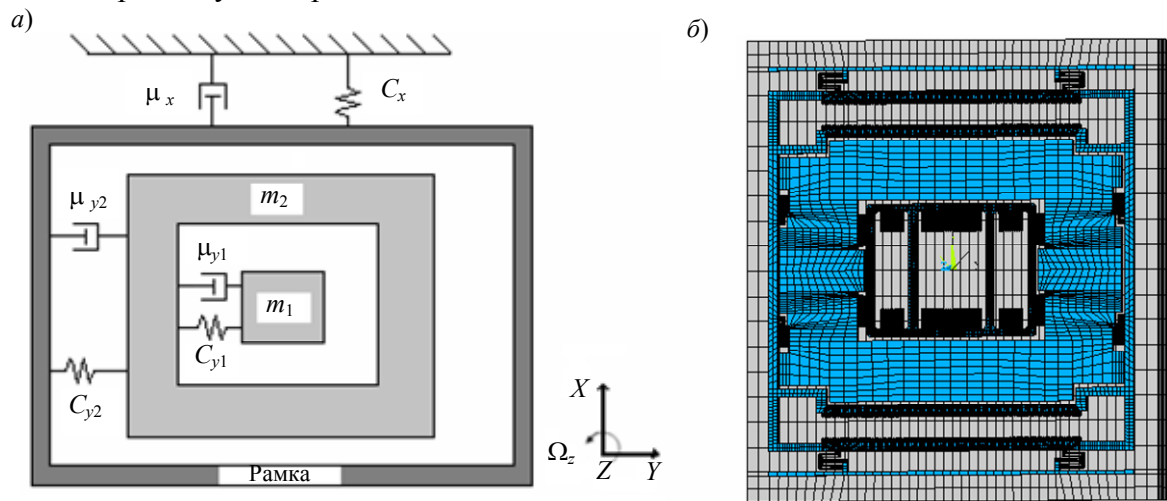


Рис. 1

Учитывая, что параметры ММГ удовлетворяют условию $y_2/\Delta < 1$, разложим функции $E(\Delta \pm y_2)$ в степенные ряды и ограничимся членами не выше третьего порядка по отношению к y_2/Δ :

$$E(\Delta + y_2) - E(\Delta - y_2) = \frac{4l_0}{\Delta^3} y_2 + \frac{8l_0}{\Delta^5} y_2^3, \quad l_0 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S U^2}{2}. \quad (2)$$

Решение системы уравнений (1) с учетом выражения (2) найдем в виде $y_j = A_j \sin \omega t + \varphi_j$, $j = 1, 2$, используя метод гармонической линеаризации [7] и полагая $y_j^3 = q_j y_j$, $q_j = \frac{3}{4} A_j^2$. Введем оператор дифференцирования по времени $p \equiv \frac{d}{dt}$ и представим систему дифференциальных уравнений движения инерционных масс ММГ в виде векторного уравнения

$$f(p)Y = 2a_x \omega \Omega \cdot \operatorname{Re} \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| e^{i\omega t} \right\}, \quad (3)$$

где

$$Y = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right\|, \quad f(p) = \left\| \begin{matrix} p^2 + 2h_1 p + n_1^2 & -s_1 \\ -s_2 & p^2 + 2h_2 p + n_2^2 \end{matrix} \right\|;$$

$$n_1^2 = \frac{1}{m_1} \left(C_{y1} + C_{y2} + \frac{3}{4} \chi_{y1} A_1^2 \right), \quad n_2^2 = \frac{1}{m_2} \left[C_{y2} - \frac{4l_0}{\Delta^3} + \frac{3}{4} \left(\chi_{y2} - \frac{8l_0}{\Delta^5} \right) A_2^2 \right];$$

$$s_1 = \frac{1}{m_1} \left(C_{y2} + \frac{3}{4} \chi_{y2} A_2^2 \right), \quad s_2 = \frac{1}{m_2} \left(C_{y2} + \frac{3}{4} \chi_{y2} A_1^2 \right), \quad 2h_j = \frac{\mu_j}{m_j}, \quad j = 1, 2.$$

При записи уравнения (3) учтено, что для реальных конструкций ММГ и условий эксплуатации $\Omega/\omega \ll 1$.

Из уравнения (3) следует

$$Y = 2a_x \omega \Omega \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{F(p)}{D(p)} \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| e^{i\omega t} \right\}, \quad (4)$$

где $F(p)$ — присоединенная матрица для матрицы $f(p)$:

$$F(p) = \left\| \begin{matrix} p^2 + 2h_2 p + n_2^2 & s_2 \\ s_1 & p^2 + 2h_1 p + n_1^2 \end{matrix} \right\|;$$

$$D(p) \equiv \det f(p) = \sum_{j=0}^4 d_j p^{4-j}, \quad d_0 = 1, \quad d_1 = 2(h_1 + h_2), \quad d_2 = n_1^2 + n_2^2 + 4h_1 h_2,$$

$$d_3 = 2(h_1 n_2^2 + h_2 n_1^2), \quad d_4 = n_1^2 n_2^2 - s_1 s_2.$$

Выполнив вычисления в соответствии с выражением (4), получим уравнения, определяющие резонансные кривые колебаний инерционных масс ММГ:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \left[(\omega^4 - d_2 \omega^2 + d_4)^2 + \omega^2 (d_3 - d_1 \omega^2)^2 \right] &= 2a_x \omega \Omega \left\{ \left[(n_2^2 + s_2 - \omega^2)(\omega^4 - d_2 \omega^2 + d_4) + \right. \right. \\ &\left. \left. + 2h_2 \omega^2 (d_3 - d_1 \omega^2) \right]^2 + \left[2h_2 \omega (\omega^4 - d_2 \omega^2 + d_4) - \omega (d_3 - d_1 \omega^2) (n_2^2 + s_2 - \omega^2) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ A_2 \left[(\omega^4 - d_2 \omega^2 + d_4)^2 + \omega^2 (d_3 - d_1 \omega^2)^2 \right] &= 2a_x \omega \Omega \left\{ \left[(n_2^2 + s_1 - \omega^2)(\omega^4 - d_2 \omega^2 + d_4) + \right. \right. \\ &\left. \left. + 2h_1 \omega^2 (d_3 - d_1 \omega^2) \right]^2 + \left[2h_1 \omega (\omega^4 - d_2 \omega^2 + d_4) - \omega (d_3 - d_1 \omega^2) (n_2^2 + s_1 - \omega^2) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если во втором из уравнений системы (1) положить $y_1 = 0$, получим уравнение движения чувствительного элемента одномассового ММГ типа L-L по оси измерения параметров колебаний, а из выражений (5) — уравнение резонансной кривой колебаний инерционной массы:

$$A_2 \left\{ \left[\hat{n}_2^2 - \omega^2 - \frac{3}{4m_2} \left(\chi_{y2} - \frac{8l_0}{\Delta^5} \right) A_2^2 \right]^2 + 4h_2^2 \omega^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 2a_x \omega \Omega, \quad (6)$$

$$\text{где } \hat{n}_2^2 = \frac{1}{m_2} \left(C_{y2} - \frac{4l_0}{\Delta^3} \right).$$

Определяемые уравнением (6) периодические движения с частотой ω инерционной массы ММГ устойчивы [8] при

$$Q \equiv \left[\hat{n}_2^2 - \omega^2 - \frac{3}{4m_2} \left(\chi_{y2} - \frac{8l_0}{\Delta^5} \right) A_2^2 \right] \left[\hat{n}_2^2 - \omega^2 - \frac{9}{4} \left(\chi_{y2} - \frac{8l_0}{\Delta^5} \right) A_2^2 \right] + 4h_2^2 \omega^2 > 0$$

и неустойчивы при $Q < 0$.

На рис. 2 приведены резонансные кривые ($A_2(\omega)$) колебаний инерционной массы одно-массового гироскопа ($m_2=1,02e-6$ кг), полученные численным решением уравнения (6) в пакете программ MatLab. На рисунке область неустойчивости ($Q < 0$) выделена штриховкой. Части резонансной кривой, расположенные в области $Q > 0$, соответствуют устойчивым периодическим движениям с частотой ω инерционной массы ММГ, а части резонансной кривой, расположенные в области $Q < 0$, — неустойчивым движениям. При изменении частоты возбуждения от значения $\omega > \omega_1$ (рис. 2, а) или значения $\omega < \omega_1$ (рис. 2, б) инерционная масса ММГ совершает колебания с амплитудами, соответствующими верхним частям резонансных кривых. При значении $\omega = \omega_1$ происходит скачкообразное изменение амплитуды и инерционная масса при дальнейшем уменьшении (рис. 2, а) или увеличении (рис. 2, б) частоты ω совершает движения с амплитудами, соответствующими нижним частям резонансных кривых. Таким образом, нелинейная зависимость сил упругости подвеса и электростатических сил контура подстройки частот в одномассовой конструкции ММГ приводит к появлению неустойчивых ветвей резонансных кривых, срывам колебаний и скачкам амплитуд колебаний чувствительных элементов прибора.

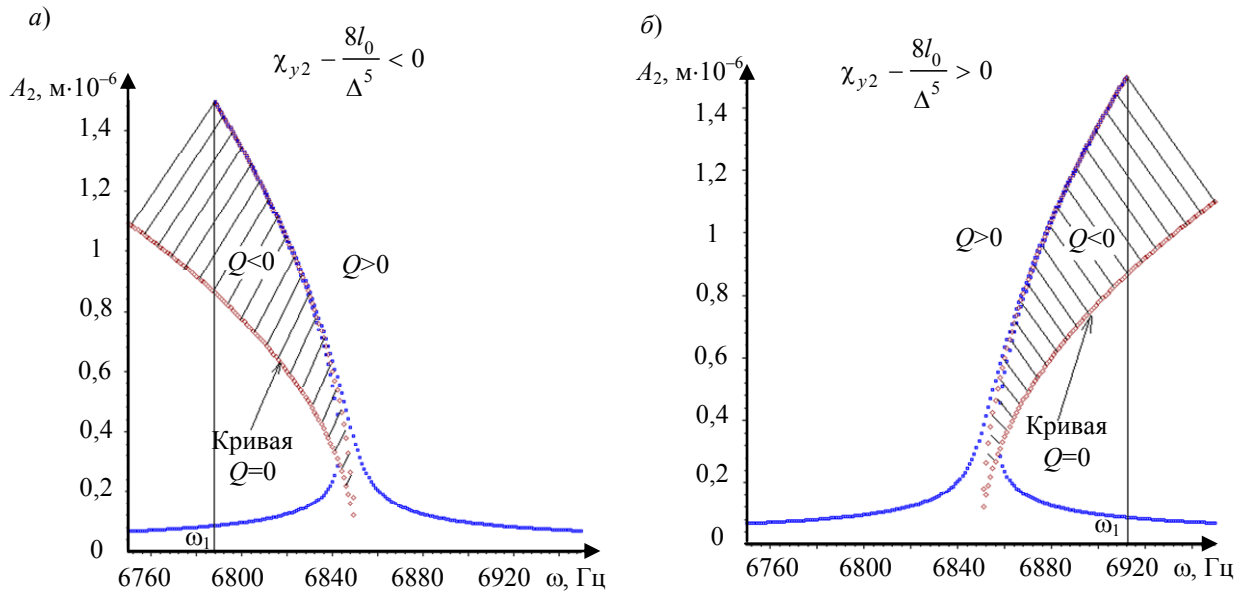


Рис. 2

На рис. 3 представлены резонансные кривые ($A_2(\omega)$) колебаний инерционной массы двухмассового ММГ ($m_1=3,95e-6$ кг, $m_2=1,02e-6$ кг), полученные численным решением уравнений (5). Здесь сплошными линиями показаны резонансные кривые линейной системы ($\chi_{y1}, \chi_{y2}, l_0 = 0$), точками — резонансные кривые нелинейной системы. Резонансные кривые $A_2(\omega)$ приведены в окрестностях значений частот вибрационного воздействия, близких к главным частотам колебательной системы ММГ. Резонансные кривые $A_1(\omega)$ аналогичны кривым $A_2(\omega)$. Нелинейная зависимость сил упругости подвеса инерционных масс и электростатических сил контура подстройки частот ММГ приводит к деформациям резонансных

кривых и смещению максимумов амплитуд колебаний инерционных масс в направлении возрастания частот ω вибрационного возбуждения при $\chi_{y2} - \frac{8l_0}{\Delta^5} > 0$ и в направлении уменьшения частот ω при $\chi_{y2} - \frac{8l_0}{\Delta^5} < 0$.

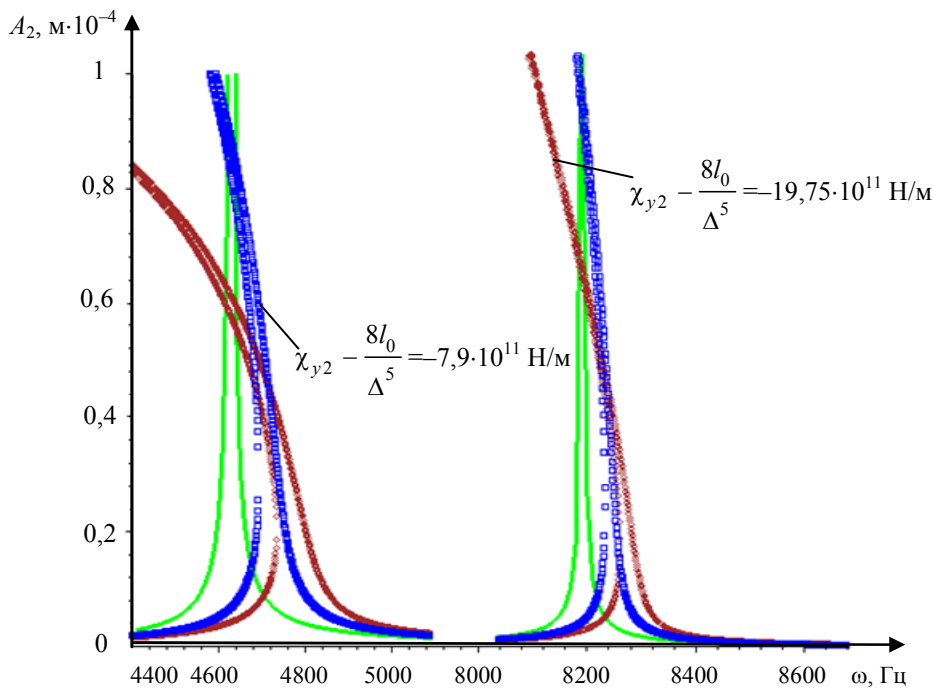
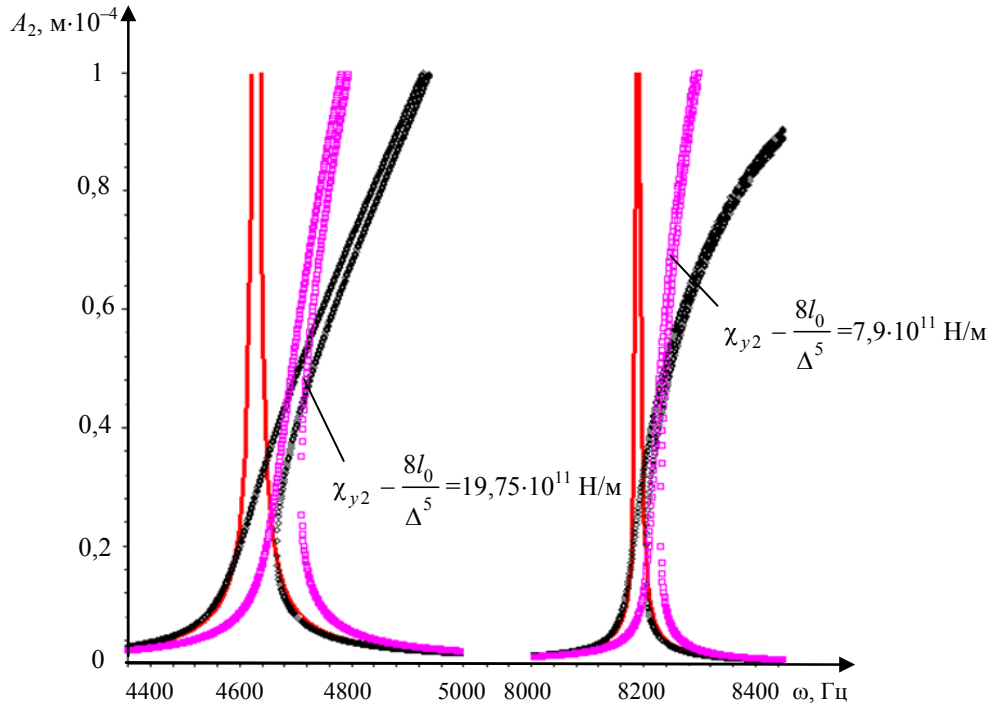


Рис. 3

При проектировании ММГ и выборе параметров конструкции прибора частота ω^* вибрационного возбуждения первичных колебаний чувствительного элемента выбирается между значениями парциальных частот n_1 и n_2 ($n_1 < \omega^* < n_2$) колебательной системы прибора. Вид резонансных кривых $A_2(\omega)$ в окрестности частоты ω^* при указанных ранее параметрах ММГ

приведен на рис. 4. Изменение частоты вибрационного воздействия в окрестности значения ω^* не приводит к скачкам амплитуд колебаний A_2 инерционной массы. Изменения напряженно-деформированного состояния конструкции чувствительного элемента ММГ и коэффициентов демпфирования, вызванные температурными или механическими воздействиями, а также технологические погрешности изготовления элементов конструкции прибора приводят к незначительному изменению вида резонансной кривой в окрестности частоты ω^* (см. рис. 4).

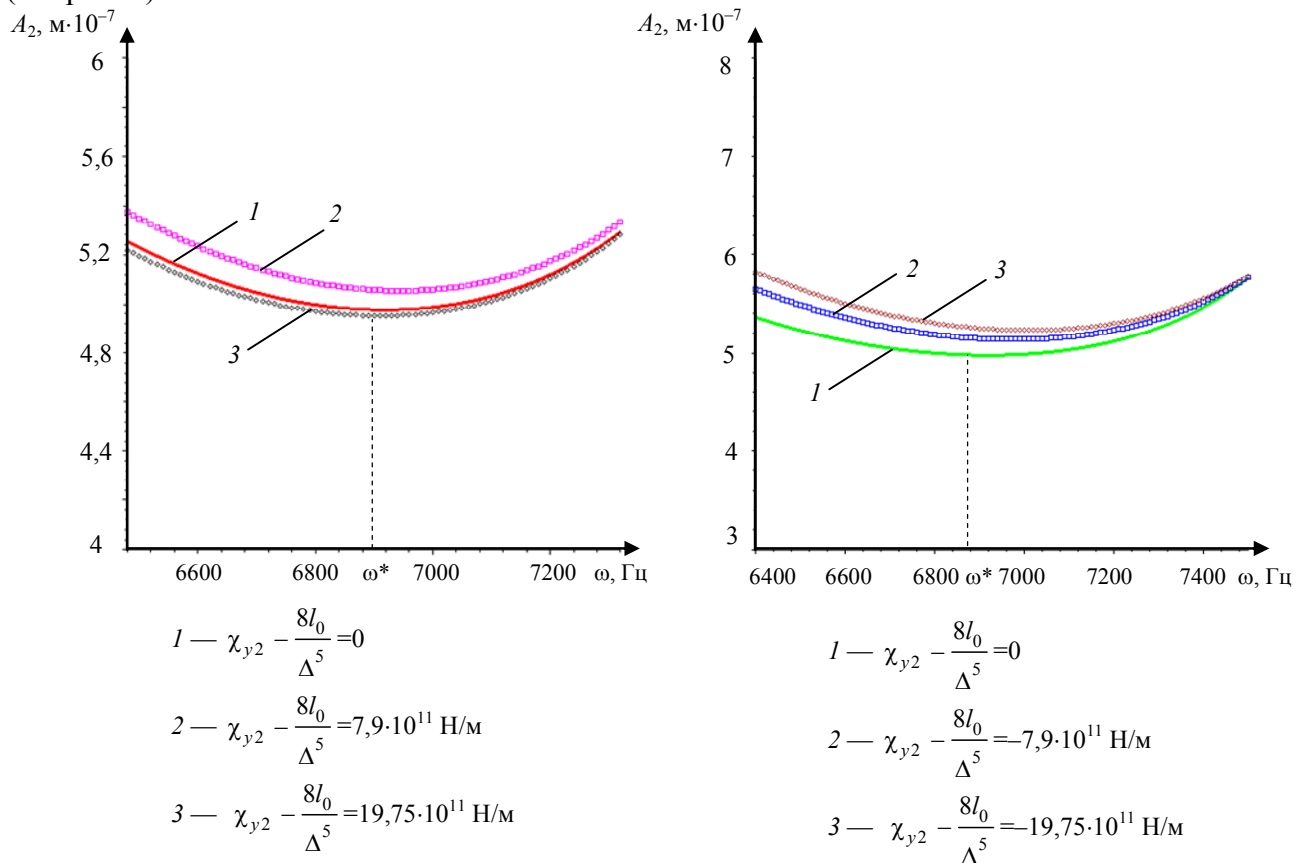


Рис. 4

Таким образом, рассматриваемая конструкция ММГ, содержащая две инерционные массы, обладает большей стабильностью технических характеристик по сравнению с одно-массовой конструкцией ММГ L-L типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пешехонов В. Г. Проблемы и перспективы современной гироскопии // Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 1—2. С. 48—55.
2. Микромеханические гироскопы: конструкции, характеристики, пути развития / Л. А. Северов, В. К. Пономарев, А. И. Панферов, С. Г. Кучерков и др. // Изв. вузов. Приборостроение. 1998. Т. 41, № 1—2. С. 57—73.
3. Распопов В. Я. Микромеханические приборы. М.: Машиностроение, 2007. 400 с.
4. Пат. 84541 РФ, G 01 С 19/56. Микромеханический гироскоп / А. М. Лестев, И. В. Попова, А. В. Ефимовская, М. В. Федоров // Бюл. № 19. Оpubл. 10.07.2009.
5. Acar C., Shkel A. M. Inherently robust micromachined gyroscope with 2-DOF sense-mode oscillator // J. of Micromechanical Systems. 2006. Vol. 15, N 2. P. 380—387.
6. Ефимовская А. В., Федоров М. В. О результатах разработки и исследования микромеханического гироскопа // Сб. докл. XI конф. молодых ученых „Навигация и управление движением“. СПб, 2009. С. 372—378.

7. Попов Е. П. Прикладная теория управления в нелинейных системах. М.: Наука, 1973. 587 с.
8. Карелин А. П., Лестев М. А. Влияние электростатической составляющей жесткости на динамику и погрешности микромеханического гироскопа // Сб. материалов Третьего Междунар. симп. „Аэрокосмические приборные технологии“. СПб, 2004. С. 285—287.

Сведения об авторах

- Александр Михайлович Лестев*** — д-р физ.-мат. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра механики; E-mail: list_@inbox.ru
- Александра Васильевна Ефимовская*** — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра механики; E-mail: lcaleksandra@gmail.com

Рекомендована кафедрой
механики

Поступила в редакцию
25.04.11 г.