10. *Ремизова О. А., Рудакова И. В., Сырокташин В. В., Фокин А. Л.* Робастное управление линейным объектом с запаздыванием с применением квадратичных методов синтеза системы // Изв. вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54, № 12. С. 22—30.

11. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 3. Синтез регуляторов систем автоматического управления / Под ред. *К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова*. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 616 с.

12. *Дудников Е. Г.* Автоматическое управление в химической промышленности. М.: Химия, 1987. 368 с.

13. *Спорягин К. В.* Математическое моделирование, разработка методов и программного комплекса для настройки параметров типовых законов регулирования динамических систем с запаздыванием: Дис. … канд. техн. наук. СПб: СПбГПУ, 2010. 237 с.

Сведения об авторах

Олег Юрьевич Камкин — аспирант; Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), кафедра автоматизации процессов химической промышленности; E-mail: iluckyi@mail.ru

Ольга Александровна Ремизова — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), кафедра автоматизации процессов химической промышленности; E-mail: remizova-oa@yandex.ru

***Владислав Викторович Сырокваши*н** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), кафедра автоматизации процессов химической промышленности

Александр Леонидович Фокин — д-р техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), кафедра автоматизации процессов химической промышленности; E-mail: fokin_sa@mail.ru

Рекомендована кафедрой автоматизации процессов химической промышленности

Поступила в редакцию 24.05.12 г.

УДК 519.271

В. Н. Арсеньев, А. С. Фадеев

МЕТОДИКА ПРОВЕРКИ СООТВЕТСТВИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАДАННЫМ ТРЕБОВАНИЯМ ПО ОГРАНИЧЕННОМУ ЧИСЛУ ИСПЫТАНИЙ

Рассматривается задача проверки соответствия характеристик системы управления объекта требованиям технического задания при ограниченном числе опытных образцов. Показано, что эта задача может быть сведена к задаче проверки многомерной статистической гипотезы о параметрах распределений. Предложена методика ее приближенного решения, позволяющая повысить достоверность принимаемых решений о соответствии или несоответствии различных характеристик системы управления требованиям технического задания при ограниченном числе натурных испытаний.

Ключевые слова: *система управления, натурные испытания, надежность, гипотеза, отношение правдоподобия.*

Введение. Для решения широкого круга задач в различных областях теоретической и практической деятельности активно используются управляемые объекты (ОУ). Возможность решения этих задач во многом зависит от качества функционирования системы управления

(СУ) ОУ. В связи с расширением области применения ОУ, возрастанием объема и сложности стоящих перед ними задач ужесточаются требования к СУ. Возрастает стоимость ОУ и СУ, сокращаются сроки, отводимые на их разработку, появляются уникальные образцы, предназначенные для решения наиболее сложных задач. Вследствие этого возникает необходимость проведения полномасштабных испытаний таких систем.

Для оценивания характеристик СУ с целью проверки их соответствия требованиям заказчика проводятся единичные испытания опытных образцов. Полученные по ним опытные (экспериментальные) данные весьма ограничены и не позволяют принять решение с заданной достоверностью.

К настоящему времени разработаны статистические методы принятия решений в случаях, когда объем экспериментальных данных велик. Из них следует отметить критерий отношения правдоподобия, являющийся наиболее мощным среди всех известных методов решения данной задачи, критерий χ^2, введенный К. Пирсоном, и некоторые их модификации [1]. Применение этих методов при ограниченных объемах испытаний может привести к ошибочному заключению о характеристиках СУ, поскольку в их основе используются асимптотические свойства специально подобранных статистик. При ограниченных выборках некоторого успеха в решении рассматриваемой задачи можно добиться путем выбора подходящих аппроксимирующих функций для распределений данных статистик [2].

Постановка задачи. Полагается, что требования к СУ заданы в виде n-мерного вектора требуемых значений характеристик системы $\boldsymbol{\mu}_{\text{т}}$, а результаты экспериментального исследования (испытаний) ОУ представлены в виде реализаций $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_N$ в общем случае векторной величины $\widehat{\mathbf{X}}$, характеризующей качество процессов в СУ. В дальнейшем случайные величины помечаются значком «$\widehat{\ }$».

Вектор реальных значений характеристик СУ $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{R}^n$ является функцией вероятностных характеристик величины $\widehat{\mathbf{X}}$. Поэтому, не снижая общности, в качестве элементов вектора $\boldsymbol{\mu}$ можно использовать параметры закона распределения $\widehat{\mathbf{X}}$.

При известном виде закона распределения $\varphi_{\widehat{\mathbf{X}}}(\mathbf{X};\boldsymbol{\mu})$ величины $\widehat{\mathbf{X}}$ задача выявления соответствия характеристик СУ определенным требованиям сводится к проверке многомерной статистической гипотезы о параметрах распределения

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{\text{т}}. \tag{1}$$

Отношение правдоподобия для проверки гипотезы H_0, согласно [1], определяется выражением

$$\nu = \prod_{i=1}^{N} \varphi_{\widehat{\mathbf{X}}}(\mathbf{X}_i;\boldsymbol{\mu}_{\text{T}}) \big/ \varphi_{\widehat{\mathbf{X}}}(\mathbf{X}_i;\tilde{\boldsymbol{\mu}}), \tag{2}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ — оценка максимального правдоподобия вектора характеристик СУ $\boldsymbol{\mu}$, полученная по выборке $\mathbf{X}_i \left(i \in \overline{1,N}\right)$.

Если функция $\varphi_{\widehat{\mathbf{X}}}(\mathbf{X};\boldsymbol{\mu})$ является регулярной в смысле первой и второй производных по $\boldsymbol{\mu}$ в области параметров $\Omega_{\boldsymbol{\mu}}$, то при $N \to \infty$ распределение случайной величины $\widehat{z} = -2\ln(\widehat{\nu})$ асимптотически стремится к χ^2-распределению с n степенями свободы при условии, что справедлива нулевая гипотеза H_0. Поэтому при большом числе испытаний N можно положить, что плотность распределения $\varphi_{\widehat{z}}(z)$ случайной величины $\widehat{z}$ совпадает с плотностью χ^2-распределения с n степенями свободы, тогда проверка соответствия анализируемых характеристик заданным требованиям не вызывает особых трудностей.

При ограниченных выборках χ^2 -распределение не может быть использовано в качестве распределения случайной величины $\hat{z}$, а следовательно и для решения поставленной задачи, поскольку такая аппроксимация является достаточно грубой и может привести к принятию неверного решения. Выбор более точной аппроксимирующей зависимости $\tilde{\varphi}_{\hat{z}}(z)$ для распределения $\hat{z}$ при малом числе испытаний позволит повысить уверенность в правильности принятого решения.

Выбор аппроксимирующей функции. В качестве аппроксимирующей функции для плотности распределения меры $\hat{z} = -2\ln(\hat{\nu})$ берется модель в виде линейной комбинации двух Г-распределений:

$$\tilde{\varphi}_{\hat{z}}(z) = c_1 \frac{1}{\beta_1^{\rho_1}\Gamma(\rho_1)} z^{\rho_1 - 1} \exp\left\{-\frac{z}{\beta_1}\right\} + (1-c_1)\frac{1}{\beta_2^{\rho_2}\Gamma(\rho_2)} z^{\rho_2 - 1} \exp\left\{-\frac{z}{\beta_2}\right\}. \tag{3}$$

Определение неизвестных параметров функции (3) c_1, β_1, β_2, ρ_1, ρ_2 осуществляется методом моментов [3]. Для этого приравниваются первые пять начальных моментов $\tilde{\alpha}_j$ величины $\hat{z}$, найденные по функции (1), к соответствующим точным значениям α_j $(j = 1, 2, ..., 5)$ этих параметров, которые зависят от вида распределения $\varphi_{\hat{\mathbf{X}}}(\mathbf{X};\boldsymbol{\mu})$ и числа натурных испытаний *N*.

Можно показать, что для плотности распределения (3) начальный момент *j*-го порядка $\tilde{\alpha}_j$ величины $\hat{z}$ определяется по формуле

$$\tilde{\alpha}_j = M\left[\hat{z}^j\right] = c_1\beta_1^j \prod_{i=0}^{j-1}(\rho_1 + i) + (1-c_1)\beta_2^j \prod_{i=0}^{j-1}(\rho_2 + i),\ j = 1, 2, ..., 5. \tag{4}$$

Если ввести обозначения

$$f_j = c_1\beta_1^j \prod_{i=0}^{j-1}(\rho_1 + i) + (1-c_1)\beta_2^j \prod_{i=0}^{j-1}(\rho_2 + i) - \alpha_j,\ j \in \overline{1,5}, \tag{5}$$

то система уравнений для определения параметров c_1, β_1, β_2, ρ_1, ρ_2 функции $\tilde{\varphi}_{\hat{z}}(z)$ будет иметь вид $f_j = 0$ $\left(j \in \overline{1,5}\right)$.

Ее решение может быть получено, например, с помощью метода Ньютона [4]. Итерационный процесс в этом случае имеет вид

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \xi\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{P}}\right]^{-1}_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} \mathbf{F}(\mathbf{P}_k), \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{6}$$

где $\mathbf{P} = [c_1 \ \ \beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \rho_1 \ \ \rho_2]^T$ — вектор неизвестных параметров; $\mathbf{F} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5]^T$; $\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{P}}\right]^{-1}_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k}$ — матрица, обратная матрице $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{P}$, элементами которой являются частные производные $\partial f_i/\partial \mathbf{P}_j$ $\left(i, j \in \overline{1,5}\right)$, вычисленные на *k*-м шаге итерационного процесса (6); ξ — некоторый коэффициент.

В качестве начального приближения для организации вычислений в соответствии с процедурой (6) в некоторых случаях можно взять параметры предельного χ^2-распределения с n степенями свободы: $c_1 = 0{,}5$; $\beta_1 = 2$; $\beta_2 = 2$; $\rho_1 = n/2$; $\rho_2 = n/2$.

Проверка соответствия характеристик СУ заданным требованиям. Полагается, что число испытаний достаточно для обеспечения заданного качества аппроксимации функцией (3) распределения $\varphi_{\hat{z}}(z)$ случайной величины $\hat{z} = -2\ln(\hat{\nu})$.

Выбирается достаточно малая вероятность γ (уровень значимости), чтобы событие с такой вероятностью можно было считать практически невозможным. Определяется критическое значение z_γ величины $\hat{z}$:

$$\gamma = \int_{z_\gamma}^{\infty} \tilde{\varphi}_{\hat{z}}(z)dz = c_1 \int_{z_\gamma}^{\infty} \frac{1}{\beta_1^{\rho_1}\Gamma(\rho_1)} z^{\rho_1 - 1} \exp\left(-\frac{z}{\beta_1}\right)dz + (1-c_1)\int_{z_\gamma}^{\infty} \frac{1}{\beta_2^{\rho_2}\Gamma(\rho_2)} z^{\rho_2 - 1} \exp\left(-\frac{z}{\beta_2}\right)dz .$$

После введения обозначений

$$\gamma_1 = \int_{z_\gamma}^{\infty} \frac{1}{\beta_1^{\rho_1}\Gamma(\rho_1)} z^{\rho_1 - 1} \exp\left(-\frac{z}{\beta_1}\right)dz \text{ и } \gamma_2 = \int_{z_\gamma}^{\infty} \frac{1}{\beta_2^{\rho_2}\Gamma(\rho_2)} z^{\rho_2 - 1} \exp\left(-\frac{z}{\beta_2}\right)dz \qquad (7)$$

можно записать $\gamma = c_1\gamma_1 + (1-c_1)\gamma_2$, где в общем случае $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Задавшись некоторой величиной γ_1, незначительно отличающейся от вероятности γ, можно найти $\gamma_2 = (\gamma - c_1\gamma_1)/(1-c_1)$.

На основе значений γ_1 и γ_2 и параметров β_1, ρ_1, β_2, ρ_2 с помощью известных процедур вычисления процентных точек Г-распределения находятся нижние пределы в интегралах (7) z_{γ_1} и z_{γ_2}.

Если условие $z_{\gamma_1} = z_{\gamma_2}$ не выполняется, то выбирается новое значение γ_1 и описанная последовательность операций повторяется. Вычисления продолжаются до тех пор, пока это условие не будет выполнено с приемлемой точностью.

После нахождения вероятностей γ_1 и γ_2, обеспечивающих $z_{\gamma_1} = z_{\gamma_2}$, определяются критическая граница $z_\gamma = z_{\gamma_1} = z_{\gamma_2}$ и критическая область для проверки гипотезы H_0:

$$z \geq z_\gamma . \qquad (8)$$

Если реализация $z^* = -2\ln(\nu^*)$ случайной величины $\hat{z} = -2\ln(\hat{\nu})$, полученная по результатам N испытаний опытных образцов, больше или равна z_γ, то следует считать, что анализируемые характеристики СУ, представленные вектором $\boldsymbol{\mu}$, не соответствуют требуемым значениям, заданным в виде вектора $\boldsymbol{\mu}_{\text{т}}$. Вероятность того, что такая ситуация возникнет, когда гипотеза H_0 на самом деле верна, равна γ.

Если по результатам испытаний получено $z^* < z_\gamma$, то гипотеза H_0 принимается и считается, что система удовлетворяет требованиям заказчика.

Для удобства практического использования полученных результатов последовательность действий для проверки соответствия характеристик СУ заданным требованиям можно представить в виде *методики*, которая включает:

1) определение точных значений начальных моментов α_j ($j = 1, 2, ..., 5$) случайной величины $\hat{z} = -2\ln(\hat{\nu})$ по заданному распределению $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{X};\boldsymbol{\mu})$ и числу испытаний N;

2) расчет параметров c_1, β_1, β_2, ρ_1, ρ_2 аппроксимирующего распределения $\tilde{\varphi}_{\hat{z}}(z)$ путем решения системы из пяти нелинейных алгебраических уравнений;

3) назначение уровня значимости γ;

4) определение критической границы z_γ;

5) проведение испытаний N образцов СУ;

6) вычисление реализации ν^* отношения правдоподобия $\hat{\nu}$ и величины $z^* = -2\ln(\nu^*)$;

7) проверку условия (8) и принятие решения о соответствии или несоответствии характеристик СУ заданным требованиям.

Пример применения методики. Проводятся испытания N опытных образцов СУ на надежность. Требуется сделать заключение о соответствии или несоответствии среднего времени ее безотказной работы μ заданному значению $\mu_т$.

Полагается, что время безотказной работы СУ $\hat{X}$ распределено по экспоненциальному закону $\varphi_{\hat{X}}(X;\mu) = \exp(-X/\mu)/\mu$, в котором параметр μ является средним временем безотказной работы системы.

В этом случае отношение правдоподобия для проверки гипотезы $H_0 : \mu = \mu_т$, согласно [2], определяется по формуле

$$\nu^* = (\mu_с/\mu_т)^N \exp\left[-N(\mu_с/\mu_т - 1)\right],$$

где $\mu_с = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i \Big/ N$ — оценка максимально правдоподобия среднего времени безотказной работы системы, полученная по результатам испытаний.

Точные значения α_j $(j = 1, 2, ..., 5)$ первых пяти начальных моментов величины $\hat{z} = -2\ln(\hat{\nu})$ найти непосредственно по распределению $\varphi_{\hat{z}}(z)$ оказалось достаточно сложно. Гораздо проще определяются семиинварианты $\hat{z}$ по характеристической функции

$$\kappa_r = 2^r N\left[(-1)^r N^{r-1}\Psi^{(r-1)}(N) - (r-2)!\right], r > 1;\ \kappa_1 = 2N\left[\ln N - \Psi(N)\right],$$

где $\Psi(\cdot)$ — пси-функция [3].

Семиинварианты и начальные моменты связаны известными зависимостями [3]

$$\alpha_1 = \kappa_1;\ \alpha_2 = \kappa_2 + \kappa_1^2;\ \alpha_3 = \kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^3;\ \alpha_4 = \kappa_4 + 3\kappa_2^2 + 4\kappa_1\kappa_3 + 6\kappa_1^2\kappa_2 + \kappa_1^4;$$

$$\alpha_5 = \kappa_5 + 10\kappa_2\kappa_3 + 5\kappa_1\kappa_4 + 15\kappa_1\kappa_2^2 + 10\kappa_1^2\kappa_3 + 10\kappa_1^3\kappa_2 + \kappa_1^5.$$

Пусть, например, число опытных образцов $N = 7$. Тогда первые пять начальных моментов случайной величины $\hat{z}$ принимают следующие значения: $\alpha_1 = 1{,}0238$; $\alpha_2 = 3{,}1429$; $\alpha_3 = 16{,}0745$; $\alpha_4 = 115{,}0481$; $\alpha_5 = 1058{,}2212$.

Параметры аппроксимирующего распределения $\tilde{\varphi}_{\hat{z}}(z)$, найденные путем решения системы нелинейных уравнений (5), имеют вид: $c_1 = 0{,}5012$; $\beta_1 = 2{,}0450$; $\beta_2 = 2{,}0451$; $\rho_1 = 0{,}5010$; $\rho_2 = 0{,}5000$.

Уровень значимости γ, как правило, берется из диапазона [0,01; 0,1]. Если положить, что $\gamma = 0{,}01$, то критическая граница для проверки гипотезы о том, что среднее время безотказной работы СУ $\mu = \mu_т$, $z_\gamma = 6{,}7874$. При $\gamma = 0{,}05$ получается $z_\gamma = 3{,}9305$, а при 0,1 — 2,7687.

Если число опытных образцов $N = 5$, то начальные моменты случайной величины $\hat{z}$ принимают значения $\alpha_1 = 1{,}0332$; $\alpha_2 = 3{,}1998$; $\alpha_3 = 16{,}5020$; $\alpha_4 = 119{,}0417$; $\alpha_5 = 1103{,}1362$, а параметры аппроксимирующего распределения $\tilde{\varphi}_{\hat{z}}(z)$ — $c_1 = 0{,}5000$, $\beta_1 = 2{,}0450$, $\beta_2 = 2{,}0480$, $\rho_1 = 0{,}5000$, $\rho_2 = 0{,}5001$.

В этом случае критическая граница для проверки гипотезы $H_0 : \mu = \mu_т$ $z_\gamma = 6{,}7894$ при $\gamma = 0{,}01$, $3{,}9310$ — при 0,05 и 2,7686 — при 0,1.

Аналогичные расчеты могут быть проведены по описанной схеме при других уровнях значимости и количестве опытных образцов.

Заключение. Предложенная методика позволяет повысить достоверность принимаемых решений о соответствии или несоответствии различных характеристик СУ требованиям технического задания при ограниченном числе натурных испытаний. Основные сложности в ее реализации возникают при вычислении точных значений начальных моментов α_j ($j = 1, 2, ..., 5$). В ряде случаев могут оказаться полезными расчетные соотношения, приведенные в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979. 408 с.
2. *Арсеньев В. Н.* Определение соответствия характеристик системы управления заданным требованиям по ограниченному объему испытаний // Изв. вузов. Приборостроение. 1996. № 4. С. 23—27.
3. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
4. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. Ч. 1. М.: Наука, 1973. 632 с.
5. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 416 с.

Сведения об авторах

Владимир Николаевич Арсеньев — д-р техн. наук, профессор; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра автоматики и электроники, Санкт-Петербург; E-mail: vladar56@mail.ru

Александр Сергеевич Фадеев — канд. техн. наук, доцент; Федеральное государственное унитарное предприятие „Центр эксплуатации объектов наземной космической инфраструктуры“, Москва; генеральный директор

Рекомендована кафедрой
Автоматики и электроники

Поступила в редакцию
10.07.12 г.