

УДК 664

## Математическое моделирование пускового режима пищевого оборудования и реометров

Канд. техн. наук, доцент **Байченко Л.А.**, larabaychenko@yandex.ru ,

канд. техн. наук, доцент **Кондратов А.В.**, arkkond@mail.ru ,

**Зеленков В.К.**, mamont.sevice@mail.ru

д-р техн. наук, проф. **Арет В.А.**, valdurtera@rambler.ru

Университет ИТМО

191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

*Пусковые режимы различных механизмов и реометров обычно исследуются на основе теоремы об изменении кинетической энергии. В статье предложен несколько другой подход и рассматривается гидродинамическая задача развития поля скоростей в перерабатываемом машиной материале от состояния покоя до стационарного состояния. В математической модели учитываются вязкость и плотность пищевой среды. Среда принята реологически ньютоновской. Полагается в записи краевых условий, что среда прилипает к подвижной и неподвижной поверхности машины, поверхности геометрически представляют плоскостями. Эти и некоторые другие упрощения свойства модели позволяют значительно упростить уравнения Навье –Стокса и провести аналитические и численные расчеты.*

*Ключевые слова:* пищевые машины, реометры, математическая модель.

---

## Mathematical simulation of the food processing equipment starting mode and rheometers

PhD, associate professor, **Baitchenko L.A.**, larabaychenko@yandex.ru,

PhD, associate professor, **Kondratov A.V.**, arkkond@mail.ru,

**Zelenkov V. K.**, mamont.service@mail.ru,

D.Sc., prof. **Aret V.A.**, valdurtera@rambler.ru,

ITMO University

191002, Russia, St. Petersburg, Lomonosov str., 9

*The starting modes of the various mechanisms and rheometers are usually studied on the basis of the theorem on the change of kinetic energy. The authors propose slightly different approach and consider the task of developing the hydrodynamic velocity field in the processed material in the machine from standstill up to a steady state. In the mathematical model takes into account the viscosity and the density of the food mass. The mass adopted as a rheologically Newtonian. It is considered in the record of the boundary conditions that the environment sticks to the movable and fixed machine surfaces. Geometrically*

*the surfaces are planes. These and some other simplification of the model properties can significantly simplify the Navier-Stokes equations and conduct analytical and numerical calculations.*

**Keywords:** food machines, rheometers, mathematical model.

Одной из общих проблем работы машин переработки пищевых материалов и испытаний этих материалов на реометрах [1, 2, 3] (например, сдвигомерах – рисунок 1, пластометрах – рисунок 2), на которую иногда не обращают внимание в специальной литературе, является оценка длительности нестационарного пускового режима после приложения нагрузки к испытываемому образцу, хотя непосредственные измерения, как правило, необходимо производить при стационарном режиме деформирования или течения. Следовательно, без оценки длительности пускового режима методика расчета названных устройств не может быть признана полной.

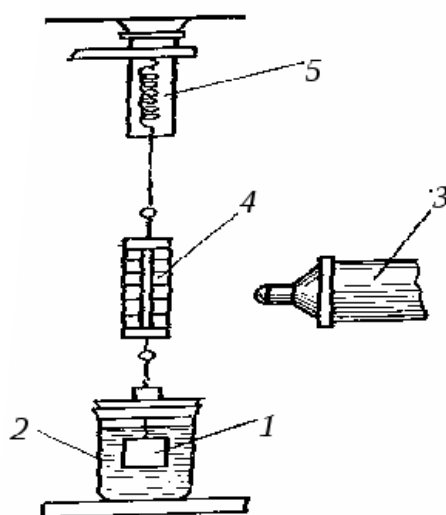


Рис. 1. Сдвигомер С.Я. Вейлера - П.А. Ребиндера

1- рифленая пластина, 2 – испытываемый материал, 3 – микроскоп,  
4 - микрошкала, 5 –пружина.

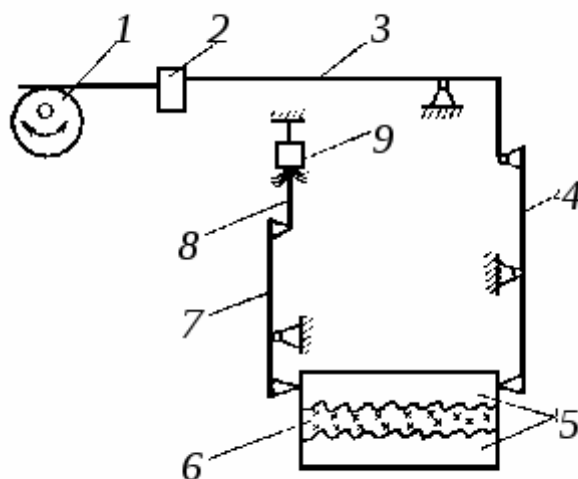


Рис. 2. Пластометр Д. М. Толстого.

1 – эксцентрик, 2- груз, 3 – нагрузочный неравноплечий рычаг,  
 4 – нагрузочный равноплечий рычаг, 5 –рифленные пластины, 6 – испытываемая масса.  
 7 – рычаг измерительный, 8 – упругая балка, 9 – тензорезисторы.

Остановимся на поставленной проблеме в достаточно общей математической постановке - рассмотрим течение среды в плоском зазоре между подвижной и неподвижной пластинами. Эту схему с большей или меньшей точностью можно применить к показанным реометрам и многим технологическим машинам. В прямоугольных координатах уравнения неразрывности и движения запишем в следующем виде (обозначения приведены в конце статьи) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0; \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) =$$

$$= - \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x. \quad (2)$$

Если принять, что во многих реометрах и технологических машинах осуществляется плоскопараллельное сдвиговое течение вязкой жидкости, тогда дополнительно к уравнениям (1) и (2) необходимо добавить реологическое уравнение,

связывающее напряжение и скорости деформаций сдвига. В простейшем случае ньютоновской вязкой жидкости [4] это уравнение имеет вид:

$$\tau_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (3)$$

Для определенности пусть эта несжимаемая вязкая жидкость находится между параллельными горизонтальными пластинами, расстояние между которыми  $H$ . Эта задача отличается геометрически от задачи Рейнольдса-Релея [5] отсутствием наклона одной из пластин, реологически от задачи определения закономерностей распределения давлений на лопасть мешалок в емкостном оборудовании [6], в которой профессор Николаев Б.Л. рассматривал перемешивание степенной жидкости. Кроме того в модель включены не только краевые условия, но и начальные. Пусть нижняя пластина неподвижна, а к верхней пластине в момент времени  $t = 0$  прикладывается постоянное напряжение при изотермических условиях. Тогда из уравнений (1)–(3), получаем следующую задачу в частных производных:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \quad (4)$$

Начальные и краевые условия :

$$v_x(0, t) = 0; \quad v_x(y, 0) = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y}(H, t) = \frac{\tau_H}{\eta}, \quad (5)$$

$$\frac{\eta}{\rho} = \mu$$

Поставленная техническая задача сведена упрощениями к известному виду (4) – (5), в интересах строгости изложения и в учебных целях покажем пошагово подробное его решение. Уравнение (4) в частных производных можно преобразовать к двум уравнениям в обычных производных, если решение искать в виде произведения двух функций:

$$v_x(y, t) = \varphi(y) \psi(t). \quad (6)$$

Тогда

$$\varphi(y) \frac{d\psi(t)}{dt} = v\psi(t) \frac{d^2\varphi(y)}{dy^2} \quad (7)$$

или

$$\frac{1}{v\psi(t)} \frac{\psi(t)}{dt} = \frac{1}{\varphi(y)} \frac{d^2\varphi(y)}{dy^2}, \quad (8)$$

откуда

$$\frac{1}{\varphi(y)} \frac{d^2\varphi(y)}{dy^2} = -k^2; \quad (9)$$

$$\frac{1}{v\psi(t)} \frac{\psi(t)}{dt} = -k^2, \quad (10)$$

В результате получаем уравнения в обычных производных :

$$\frac{d^2\varphi(y)}{dy^2} + k^2\varphi(y) = 0; \quad (11)$$

$$\frac{d\psi(t)}{\psi(t)} = -k^2 v dt. \quad (12)$$

Интегрируя (11) и (12), получим

$$\varphi(y) = C_1 \cos ky + C_2 \sin ky; \quad (13)$$

$$\psi(t) = C_3 e^{-k^2 vt}. \quad (14)$$

Тогда

$$v_x(y, t) = (C_1 \cos ky + C_2 \sin ky) C_3 e^{-k^2 vt}. \quad (15)$$

Определив константы интегрирования и величину  $k$ , получим выражение для распределения скоростей:

$$v_x(y, t) = \frac{\tau_H}{\eta} \left[ \left( \frac{y}{H} \right) - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} e^{-\frac{vn^2\pi^2 t}{4H^2}} \sin\left(\frac{n\pi y}{2H}\right) \right]. \quad (16)$$

По интегралу расхода

$$Q(t) = \int_0^H v_x(y, t) dy \quad (17)$$

можно определить время  $t_c$  асимптотического выхода профиля скоростей течения в стационарный режим. С помощью программы MathCad 7 Professional были проведены

вычисления по формулам (16) и (17) при  $\eta = 1 \frac{\text{Нс}}{\text{м}^2}$ ;  $H = 0,02 \text{ м}$ ;  $\frac{\eta}{\rho} = 0,001 \text{ с} \cdot \text{м}$ ;

$$\tau_H = 1 \frac{\text{Нс}}{\text{м}^2}; \quad y = 0 \div 0,02 \text{ м}; \quad t = 0 \div 1 \text{ с}.$$

Данные расчета показаны на рис. 3 и 4.

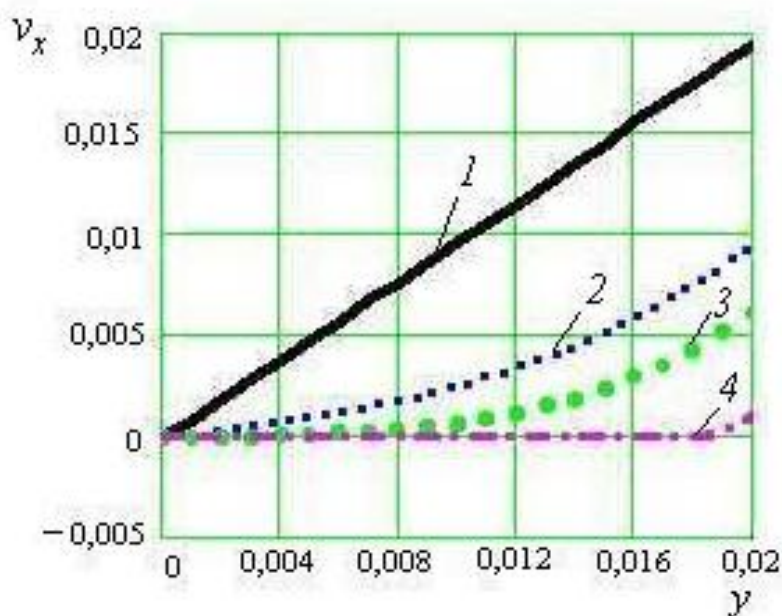


Рис. 3. График развития профиля скоростей течения при пусковом режиме установки:

1 –  $v_x(0,6, y)$ ; 2 –  $v_x(0,07, y)$ ; 3 –  $v_x(0,03, y)$ ; 4 –  $v_x(0,001, y)$

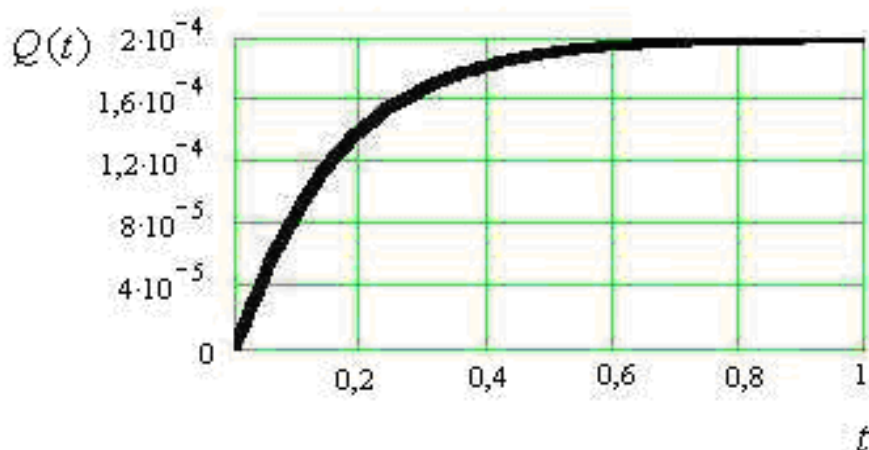


Рис. 4. Выход пускового режима в конечное стационарное состояние

Результаты математического моделирования показывают, что при анализе начальной фазы работы пищевой машины и обработке экспериментальных данных сдвиговой реометрии надо учесть период пуска от 0 до  $t_{ст}$ . На рис. 3 видно, как развивается эпюра скоростей течения в зазоре в интервале времени  $t = 0 \div 0,6$  с. На рис. 4 показано, как расход жидкости выходит асимптотически на стационарный режим при  $t_c = 0,6$  с. Согласно расчетам, при данных условиях стационарный режим наступает через 0,6 с. Приведенный алгоритм позволяет рассчитать длительность пускового режима при любых других значениях динамического коэффициента вязкости, плотности, касательных напряжениях и зазоре между пластинами. Таким образом, поставленная задача моделирования решена.

Список обозначений:

$t$  - время;  $x, y, z$  - координаты;  $V_x, V_y, V_z$  - проекции скоростей течения;  $p$  - давление;  $\mu$  - коэффициент кинематической вязкости;  $\eta$  - коэффициент динамической вязкости;  $\rho$  - плотность;  $\tau_H$  - постоянное напряжение, приложенное к верхней пластине,  $k$  - некая константа;  $g_x$  - проекция ускорения свободного падения.

### Список литературы

1. Реометрия пищевого сырья и продуктов. Справочник / Под. ред. Ю.А. Мачихина. – М.: Агропромиздат. 1990. – 271 с
2. Крусъ Г.Н., Шалыгина А.М., Волокитина З.В. Методы исследования молока и молочных продуктов. – М.: Колос, 2000. – 368 с.
3. <http://www.chem.msu.su/rus/history/Rehbinder/21.html>

4. Рейнер М. Деформация и течение.- М.: Изд-во нефтяной и горнотопливной промышленности, 1963.- с. 381.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
6. Арет В.А., Николаев Б.Л., Николаев Л.К. Теоретическое определение закономерностей распределения давления на лопасть лопастных мешалок в ёмкостном оборудовании // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Процессы и аппараты пищевых производств». 2012. № 1.
7. Арет В.А., Николаев Б.Л., Забровский Г.П., Николаев Л.К. Реологические основы расчета оборудования производства жиросодержащих пищевых продуктов.- СПб.: СПбГУНиПТ, 2004.-343 с

### References

1. Reometriya of food raw materials and products. Reference book. Pod. red. Yu.A. Machikhina. – М.: Agropromizdat. 1990. – 271 p
2. Krus' G.N., Shalygina A.M., Volokitina Z.V. Methods of research of milk and dairy products. – М.: Kolos, 2000. – 368 p.
3. <http://www.chem.msu.su/rus/history/Rehbinder/21.html>
4. Reiner M. Deformation and current.- М.: Izd-vo neftyanoi i gornotoplivnoi promyshlennosti, 1963.- p. 381.
5. Loitsyanskii L.G. Mechanics of liquid and gas. – М.: Nauka, 1973. – 848 p.
6. Aret V.A., Nikolaev B.L., Nikolaev L.K. Theoretical determination of regularities of distribution of pressure upon the blade of bladed mixers in the capacitor equipment. *Nauchnyi zhurnal NIU ITMO. Seria «Protsessy i apparaty pishchevykh proizvodstv»*. 2012. № 1.
7. Aret V.A., Nikolaev B.L., Zabrovskii G.P., Nikolaev L.K. Rheological bases of calculation of the equipment of production of fat-containing foodstuff.- SPb.: SPbGUNiPT, 2004.-343 s