УДК-681.513.5

Разработка математической модели и алгоритма определения среднего качества мукомольного сырья в процессе загрузки и выгрузки накопительного пирамидоидального бункера

Д-р тех. наук Закирничный В.С. aiapp@mail.ru

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Институт холода и биотехнологий
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

Поступающее сырье для хлебопекарной промышленности не обладает стабильными характеристиками и поэтому на процесс хлебопечения действуют достаточно значительные возмущения по составу сырья. Дополнительная возмущенность вносит дискретность отбора и анализ проб, которые осуществляются заводскими лабораториями.

Ключевые слова: алгоритм, среднее качество муки, бункер-накопитель

The algorithm development for the determining the average quality of the raw flour during the loading and unloading the storage hopper

Ph.D. Zackirnichnyi V.S.

Saint-Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics.
Institute of Refrigeration and Biotechnology
191002, St. Petersburg, Lomonosov str., 9

The storage hoppers, used for loading and unloading in the baking industry can have the shape of a pyramid. The article deals with the problem of the development of the algorithm for determining the average quality of milling raw materials on the basis of the developed mathematical model for pyramidal type hopper.

Key words: Algorithm, average quality of flour, storage hopper

---

Поступающее сырье для хлебопекарной промышленности не обладает стабильными характеристиками и поэтому на процесс хлебопечения действуют достаточно значительные возмущения по составу сырья. Дополнительная возмущенность вносит дискретность отбора и анализ проб, которые осуществляются заводскими лабораториями . [1, 2, 3, 4]

Для уменьшения влияний такого вида воздействий, связанных с изменением состава мукомольного сырья возможны несколько путей. Одним, из которых является разработка математической модели бункера, на основе которой определяется алгоритм определения среднего качества мукомольного сырья.

Определение математической модели и алгоритма среднего качества мукомольного сырья в процессе загрузки и разгрузки бункера в виде пирамиды в хлебопекарном производстве. В [1] была получена математическая модель процессов загрузки и разгрузки мукомольного сырья для бункера в виде конической емкости. Подобную математическую модель можно разработать и для бункера, имеющего в сечении квадрат (рис. 1), стороны которого равны величине C_0.

Пусть сторона сечения будет равна $C = C_0/2$, тогда следуя рассуждениям в [1], можно получить соотношения, аналогично ранее рассмотренным для конического бункера [1]. Из рис.1 можно определить сторону C следующим образом

$$C = \frac{h \cdot ctg(\varphi) \cdot ctg(\varphi_0)}{(ctg(\varphi) + ctg(\varphi_0))} = h \cdot ctg(\varphi) \cdot (1 + tg(\varphi_0) \cdot ctg(\varphi))^{-1}$$

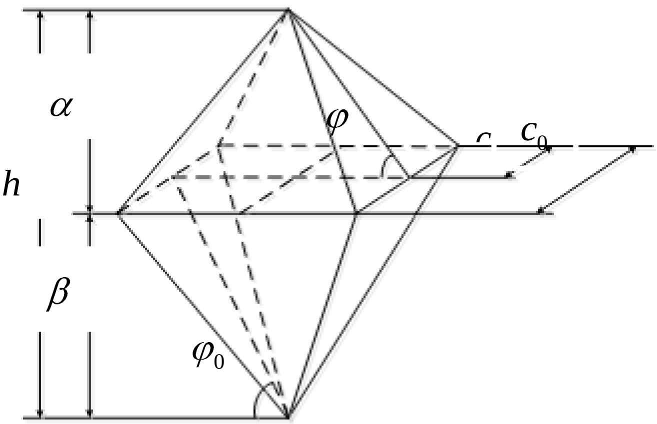


Рис.1. Загрузка бункера в виде пирамиды

Обратимся к уравнению баланса количества сырья для процесса загрузки

$$q_{bx} d\tau = \rho \cdot C_0^2 \cdot h \cdot dh = 4 \cdot \rho \cdot C^2 \cdot h \cdot dh = 4 \cdot \rho \cdot h^3 \cdot M \cdot dh,$$

где (1) обозначим $M = ctg(\varphi) \cdot (1 + ctg(\varphi) \cdot tg(\varphi_0))^{-1}$

Проинтегрируем обе части выражения (1) и после интегрирования получим

$$q_{bx} d\tau = \frac{3}{4} \cdot h^3 \cdot M \text{ или } h = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot q_{bx} \tau}{4 \cdot \rho \cdot h^3 \cdot M}} \qquad (2)$$

т.е. за время загрузки будет достигнута высота

$$H = 3\sqrt{\frac{4 \cdot q_{bx} d\tau}{3 \cdot \rho \cdot M}} \qquad (3)$$

Учитывая асимметричность фигуры загрузки можно принять, что $\alpha(h) = \alpha(\tau)$. где α - параметр, характеризующий качество загружаемого мукомольного сырья.

Таким образом, каждому моменту загрузки можно поставить в соответствие определенную высоту пирамиды загрузки h, причем во всех точках боковой поверхности пирамиды высотой h качество сырья одинаково.

Следует отметить, что соотношения (1), (2) являются приближенными, поскольку реальная фигура загрузки будет отличаться от пирамиды вследствие закругленности углов. Это же замечание также относится к процессу разгрузки.

Рассмотрим теперь процесс разгрузки бункера. Будем считать, что этот процесс происходит с постоянной производительностью $q_{вых}$.

Для этого определим элементарное изменение количества материала за определенное время t:

$$q_{вых} dt = -\rho \cdot C_0^2 \cdot dh_1 = -4 \cdot \rho \cdot C_0^2 \cdot dh$$

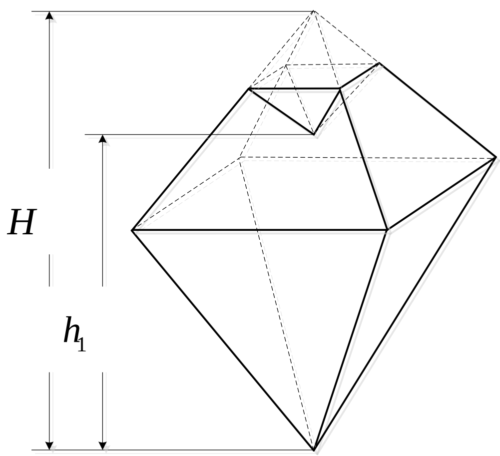


Рис.2. Разгрузка бункера в виде пирамиды

Где согласно рис.2

$C = (\frac{H-h}{3})^3 \cdot ctg(\varphi)$

где H - высота вершины воронки, образующейся при разгрузке за время t . Проинтегрируем обе части этого соотношения по соответствующим переменным при начальных условиях $h_1(0) = H$, тогда получим после преобразования

$q_{вых} t = \rho \cdot \frac{(H-h_1)}{3} \cdot ctg^2(\alpha)$

откуда,

$$h_1 = H - \sqrt{\frac{3 \cdot q_{вых}}{\rho} \cdot tg^2(\varphi)} \qquad (3)$$

Характеристика среднего качества сырья $\alpha(h_1)$, попадающего в выходной поток с поверхности воронки с высотой h_1 определиться как средняя величина по поверхности воронки

$\bar{\alpha}(h_1) = \frac{1}{S} \iint \alpha(C,h) ds$ (4)

Определим приращение площади боковой поверхности пирамиды ds , исходя из того, что площадь боковой поверхности пирамиды

$S = 4 \cdot l \cdot c = 2 \cdot l \cdot c_0$,

тогда

$$dS = 4 \cdot (ldc + cdl) \qquad (5)$$

Определим значение длины l из соотношения сторон геометрической фигуры

$$l=\sqrt{h_1^2+c^2}\text{ , а } dl=\sqrt{1+tg^2(\varphi)}\cdot dc \qquad (6)$$

С учетом (6) в выражениях (5), получим

$$S=4\cdot c^2\cdot\sqrt{1+tg^2(\varphi)}\ ;\ ds=8\cdot c\cdot\sqrt{1+tg^2(\varphi)}\cdot dc \qquad (7)$$

Так как $c=\dfrac{h_1'}{tg(\varphi)}=\dfrac{0{,}5(H-h_1)}{tg(\varphi)}$, (8)

то $S=\dfrac{H-h_1}{tg^2(\varphi)}\cdot\sqrt{1+tg^2(\varphi)}$ (9)

Подставим (7) и (8) в выражение (4) и после преобразований будем иметь

$$\bar{\alpha}(h_1)=\frac{8\cdot tg^2(\varphi)}{(H-h_1)}\cdot\int_0^c 2\cdot(h_1\cdot c)\cdot cdc\ ,$$

где $c=\dfrac{H-h_1}{2\cdot tg(\varphi)}=\dfrac{H-h_1}{2}\cdot ctg(\varphi)$, $h=h_1+2\cdot ctg(\varphi)$ (10)

Поставим задачу определить связь среднего значения качества сырья при разгрузке с качеством сырья при загрузке $\alpha(\tau)$:

$$\bar{\alpha}(h_1)=\bar{\alpha}(t)=\frac{8\cdot tg^2(\varphi)}{(H-h_1)^2}\cdot\int_0^{0,5\cdot(H-h_1)\cdot ctg(\varphi)} c\cdot\alpha\cdot(1+ctg(\varphi)\cdot ctg(\varphi_0))\cdot dc \qquad (11)$$

Теперь согласно (1) и (10) будем иметь:

$$\bar{\alpha}(h_1)=\bar{\alpha}(t)=\alpha\cdot(\frac{\pi\cdot\rho}{3\cdot q_{вых}}\cdot ctg(\varphi)\cdot tg(\varphi_0))^{-2} \qquad (12)$$

Преобразуем выражение (11) введя обозначения для величин, которые являются постоянными для рассматриваемой конструкции бункера

$$\beta=\sqrt{2\cdot tg(\varphi)}\ ;\ æ=\sqrt[3]{3\cdot tg^2(\frac{\varphi}{\rho})}\ ;\ \mu=(1+ctg(\varphi)\cdot tg(\varphi_0))^{-1}$$

$$H=\sqrt{\frac{3\cdot q_{вх}\cdot T\cdot tg^2(\alpha)\cdot(1+ctg(\varphi)\cdot tg(\varphi_0))^2}{4\cdot\rho}}\ , \qquad (13)$$

где T - время загрузки бункера до высоты H.

Преобразуем выражение для $\bar{\alpha}(h_1)=\bar{\alpha}(t)$ с учетом введенных обозначений (13):

$$\bar{\alpha}(t)=\frac{2\cdot\beta^4}{\ae^2\cdot(q_{вых}\cdot t)^{\frac{2}{3}}}\int\limits_0^{\beta^2\cdot\ae\cdot(q_{вых}\cdot t)^{\frac{1}{3}}} c\cdot\{\frac{4\cdot\mu^2}{\ae^3\cdot q_{вх}}[H-\ae\cdot(q_{вых}\cdot t)^{\frac{1}{3}}+\beta^2\cdot c]\}\cdot dc \quad (14)$$

Так как из соотношений (3), (8), (13) следуют следующие соотношения

$$c=0{,}5\cdot(H-h_1)\cdot ctg(\varphi)=\beta^{-2}\cdot\ae\cdot(q_{вых}\cdot t)^{\frac{1}{3}}$$

$$8\cdot tg^2(\varphi)=2\cdot\beta$$

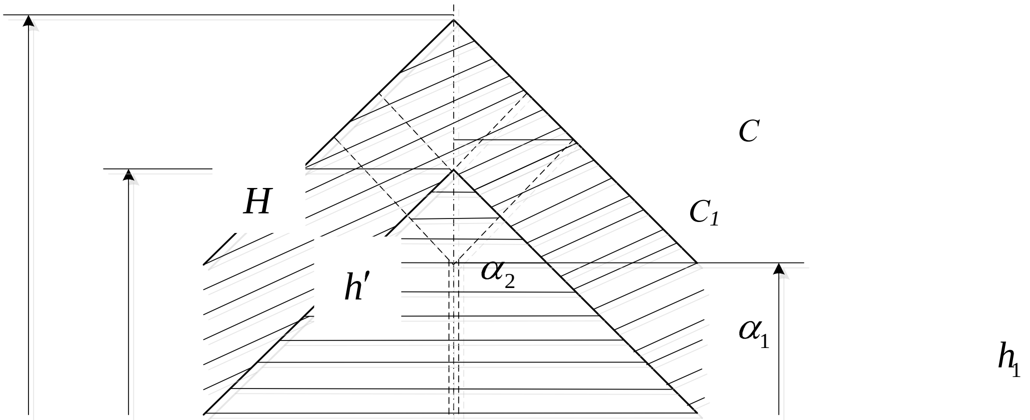
$$(H-h_1)^2=\ae^2\cdot(q_{вых}\cdot t)^{\frac{2}{3}}$$

$$\tau=\frac{4\cdot\mu^2\cdot(H-\ae\cdot q_{вых}\cdot t)^{\frac{1}{3}}+\beta^2\cdot c}{\ae\cdot q_{вх}}$$

$$h=H-\ae\cdot(q_{вых}\cdot t)^{\frac{1}{3}}+\beta^2\cdot c$$

Используем выражение (14) для определения изменений среднего качества сырья в выходном потоке для частичного случая изменения качества сырья при загрузке, а именно, рассмотрим изменение одного из показателей качества скачком (ступенчатое изменение).

Пусть сначала при загрузке поступает сырье качества α_1 до высоты бункера h_1, (рис.3) качества α_2 , от высоты H до высоты h' .При дальнейшей разгрузке, когда $h<h'$сырье двух качеств будет смешиваться.



Рассмотрим процесс разгрузки, начиная от высоты h'. Для этого найдем приращение площадей боковой поверхности пирамиды для каждого из двух качеств (видов) сырья. Часть поверхности пирамиды будет иметь сырье α_1 другая часть - α_2.

Приращение площади поверхности dS_2 с сырьем может быть найдено как разность приращений площадей поверхностей двух пирамид состороны основания $c_0 = 2c$ и $2c_1$ соответственно.

$$dS_2 = 8 \cdot c \cdot \sqrt{1 + tg^2(\varphi)} \cdot (c \cdot dc - c_1 dc_1)$$

Используя выражение (14), определим среднее значение качества на выходе бункера

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{S} \cdot \left(\int_0^{c_1} c_1 \cdot \alpha_1 \cdot dc_1 + \int_0^{c} c \cdot \alpha_2 \cdot dc + \int_0^{c_1} c_1 \cdot \alpha_2 \cdot dc_1\right)$$

где $S = S_1 + S_2$ - есть общая площадь боковой поверхности пирамиды разгрузки со стороны основания $c_0 = 2c$, а $S = 4 \cdot l \cdot c$. Используя выражение (14) получим

$$\bar{\alpha} = \frac{2 \cdot \beta^4}{æ^2 \cdot (q_{вых} \cdot t)^{\frac{2}{3}}} \int_0^{\beta^{-2} \cdot æ \cdot [q_{вых} \cdot (t - t_1)]^{\frac{1}{3}}} (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot c_1 \cdot dc_1 + \alpha_2$$

так как $\frac{1}{S} \cdot \int_0^{c} c \cdot \alpha_2 \cdot dc = \alpha_2$

то после интегрирования придем к выражению вида:

$$\bar{\alpha}(t) = (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \frac{[q_{вых} \cdot (t - t_1)]^{\frac{2}{3}}}{(q_{вых} \cdot t)^{\frac{2}{3}}} + \alpha_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot (1 - \frac{t_1}{t}) + \alpha_2, \quad (15)$$

где t_1- момент времени соответствующий разгрузке до уровня h' ,соответствующего границе раздела двух видов сырья с разным качеством. Этот момент времени может быть определен из соотношения (3)

$$t_1 = \left(\frac{H - h'}{æ}\right)^3 \cdot \frac{1}{q_{вых}}$$

таким образом, изменение среднего качества сырья $\bar{\alpha}(t)$ при $t > t_1$ определится соотношением (15).

Выполним пример.

Пусть имеем следующие исходные данные: $q_{вых}$= 30кг/мин; ρ = 0,9к/см = 900кг/м; бункер имеет высоту 2,5м, со стороной основания c_0=2м; угол примем равным 45°, тогда $tg(\varphi_0)=\frac{2,5}{1}=2,5$, т.е. φ_0 = 68°

С учетом заданных параметров определим значения и ∂e , β:

$$\partial e=\sqrt{\frac{3}{\rho}\cdot tg^2(\varphi)}=\sqrt{\frac{3}{900}\cdot 1}=0,15\ ;\quad \beta=\sqrt{2\cdot tg(\varphi)}=1,41$$

тогда согласно (14)

$$\bar{\alpha}(t)=\frac{8}{(0,15)^2\cdot(30\cdot t)^{\frac{2}{3}}}\int_0^{0,075\cdot(30\cdot t)^{\frac{1}{3}}} c\cdot\alpha(c)\cdot dc$$

Определим время разгрузки t_1сырья одного качества до достижения границы сырья с другим качеством

$$t_1=(\frac{H-h_1}{\partial e})^3\cdot\frac{1}{q_{вых}}$$

Пусть при разгрузке изменение качества сырья происходит при высоте вершины пирамиды загрузки h' = 3,5м при общей высоте пирамиды загрузки H = 4,5м, тогда

$$t_1=(\frac{4,5-3,5}{0,15})^3\cdot\frac{1}{30}=9,9\ мин$$

Зная t_1,построим графическую зависимость изменения среднего качества сырья при разгрузке

$$\bar{\alpha}(t)=(\alpha_1-\alpha_2)\cdot(1-\frac{9,9}{t})^{\frac{2}{3}}+\alpha_2$$

На рис.4 покажем два случая изменения качества: при уменьшении показателя качества и увеличении времени разгрузки $t>t_1$среднее значение качества сырья стремиться к α_1, что вполне согласуется с физическими представлениями сущности поставленной задачи.

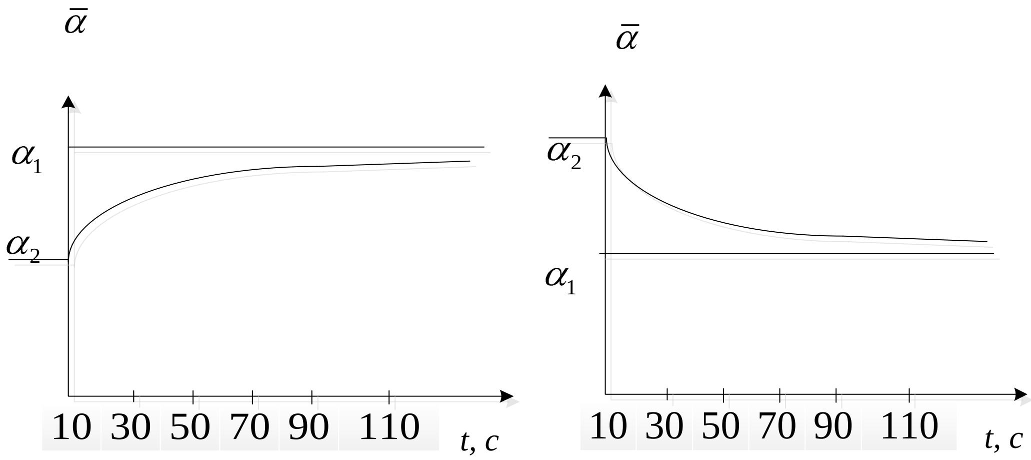


Рис.4. Графики изменения среднего качества: а) $\alpha_1 > \alpha_2$ б) $\alpha_1 < \alpha_2$

Аналогичным образом выполним расчеты при неоднократном изменении качества загружаемого сырья.

Для этого определим зависимость изменения среднего качества сырья в общем случае для слоев сырья с различным качеством

$\alpha_i, (i=1,\overline{m})$, при $t > t_{m-1}$

$$\bar{\alpha}(t) = \frac{2\cdot\beta^4}{\text{æ}^2\cdot(q_{вых}\cdot t)^{\frac{2}{3}}}\cdot\Bigg[\int\limits_0^{\beta^{-2}\cdot\text{æ}\cdot[q_{вых}\cdot(t-t_1)]^{\frac{1}{3}}}(\alpha_{m-1}-\alpha_m)\cdot c_m\cdot dc_{m-1}+$$

$$+\int\limits_0^{\beta^{-2}\cdot\text{æ}\cdot[q_{вых}\cdot(t-t_1)]^{\frac{1}{3}}}(\alpha_{m-2}-\alpha_{m-1})\cdot c_{m-2}\cdot dc_{m-2}+\ldots+$$

$$+\int\limits_0^{\beta^{2}\cdot\text{æ}\cdot[q_{вых}\cdot(t-t_1)]^{\frac{1}{3}}}(\alpha_1-\alpha_2)\cdot c_1\cdot dc_1\Bigg]+\alpha_m=$$

$$=(\alpha_{m-1}-\alpha_m)\cdot\left(1-\frac{t_1}{t}\right)^{\frac{2}{3}}+(\alpha_{m-2}-\alpha_{m-1})\cdot\left(1-\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{2}{3}}+\ldots+(\alpha_1-\alpha_2)\cdot\left(1-\frac{t_{m-1}}{t}\right)^{\frac{2}{3}}+\alpha_m,$$

где t_iопределяется, если известно значение высот пирамид загрузки, как

$$t_i = (\frac{H - h_i}{\partial e})^3 \cdot \frac{1}{q_{вых}}, i = (1, \overline{m} - 1)$$

Определим выражения для среднего качества сырья для каждого из отрезков временипри загрузке бункера. Сначала будет сырье с качеством $\bar{\alpha} = \alpha_m \cdot t = [0, t_1]$. Затем при $t_1 < t < t_2$

$$\bar{\alpha}(t) = (\alpha_{m-1} - \alpha_m) \cdot (1 - \frac{t_1}{t})^{\frac{2}{3}} + \alpha_m,$$

при $t_2 < t < t_3$

$$\bar{\alpha}(t) = (\alpha_{m-1} - \alpha_m) \cdot (1 - \frac{t_1}{t})^{\frac{2}{3}} + (\alpha_{m-2} - \alpha_{m-1}) \cdot (1 - \frac{t_2}{t})^{\frac{2}{3}} + \alpha_m$$

и т.д.; при $t > t_{m-1}$

$$\bar{\alpha}(t) = (\alpha_{m-1} - \alpha_m) \cdot (1 - \frac{t_1}{t})^{\frac{2}{3}} + (\alpha_{m-2} - \alpha_{m-1}) \cdot (1 - \frac{t_2}{t})^{\frac{2}{3}} + \ldots + (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot (1 - \frac{t_{m-1}}{t})^{\frac{2}{3}} + \alpha_m$$

Используя полученные выше соотношения для определения среднего качества сырья на выходе бункера, можно построить блок-схему алгоритма, позволяющую определитьвеличину среднего качества сырья $\bar{\alpha}(t)$ впроцессе эксплуатации (загрузка и разгрузка)бункера пирамидоидальной формы (рис.5)

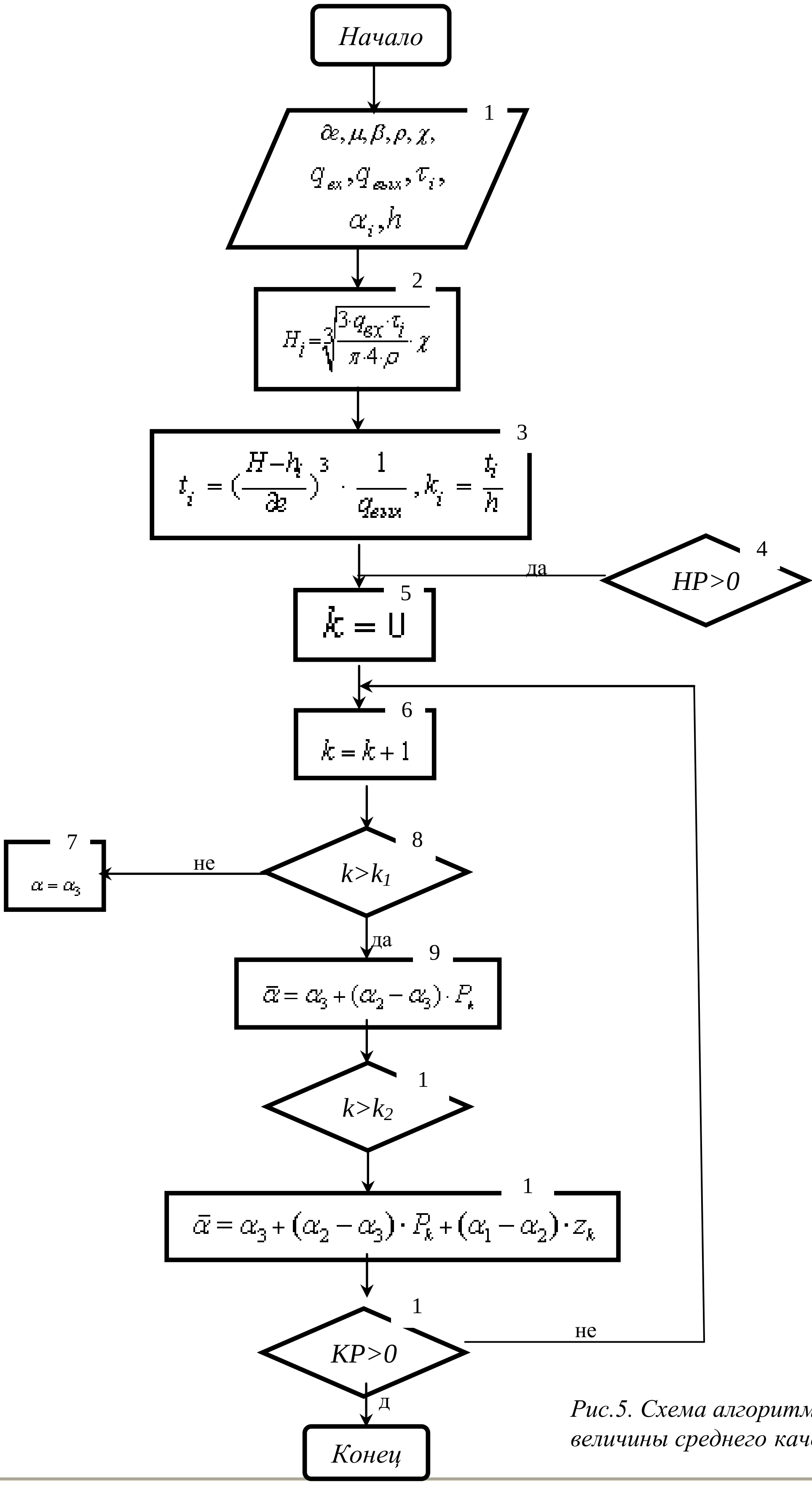


Рис.5. Схема алгоритма определения величины среднего качества сырья

Список литературы:

1. Соколов Н.С. Проектирование систем автоматизации в пищевой промышленности. Учебник для ВУЗов.: М. Агропром 1999. 421с.
2. Экспресс-определение белка, влажности, зольности, белезны, количества и качества сырой клейковины в пищевой муке.:Методика М04-43-2006 Люмэкс www.lumex.ru 2006
3. Попов М. Разработка метода контроля влажности муки целевого назначения, полученных из нее полуфабрикатов готового хлеба.: НГУПП, 2009
4. Филатов В.В. Агломозов А.Л. Способ определения электрофизических характеристик дисперсных материалов: Патент 2180687(13) с2, 2010