

Научная статья

УДК 519.68:532.7:541.8:541.182.41

DOI: 10.17586/2310-1164-2021-14-2-40-52

Зависимость оптимальной толщины ножа от геометрических и упругих характеристик конструктивных элементов измельчителя

В.В. Пеленко^{1*}, В.В. Нечитайлов¹, А.П. Верболоз², В.А. Демченко³, Д.А. Куценко², Г.В. Баринов²¹Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна²Университет ИТМО³Научно-исследовательский институт (военно-системных исследований МТО ВС РФ) Военной академии МТО Санкт-Петербург, Россия, *pelenko1@rambler.ru

Аннотация. Сформирована и аналитически решена задача описания процесса изгибной деформации выходной решетки, представленной в виде круглой сплошной пластины, и лезвия ножа как консольной балки для шнекового экструдера-измельчителя. При этом осуществлена оценка влияния геометрических параметров измельчителя и упругих характеристик режущих элементов на оптимальное соотношение их толщин, которое обеспечивает отсутствие концентрации внутренних напряжений в плоскости контакта ножа и решетки. Особенностью постановки данной задачи является учет переменного характера внешнего нагружения решетки и ножа, обусловленного наличием явления обратного перетока продукта (шлюзование), а также рассмотрение перспективного варианта условий закрепления ножа и решетки на корпусе шнека волчка. Сложность движения материала в шнековых измельчителях в процессе его экструзии и резания обусловлена не только сложной винтовой формой шнека, но и наличием зазора шлюзования между внутренней винтовой поверхностью ребер противовращения корпуса экструдера и наружной винтовой поверхностью витков шнека. Существенное влияние обратного перетока материала на формирование переменного поля давлений учитывается аппроксимацией закона его изменения линейно убывающей функцией. На первом этапе представленного исследования аналитически описаны методами дифференциального исчисления процессы изгиба каждого из двух элементов режущей пары нож–решетка под действием изменяющейся нагрузки. На втором этапе сформулировано условие и критерий оптимизации соотношения толщины лезвия ножа и толщины выходной измельчительной решетки. Исходя из полученной математической модели для зависимости толщины лезвия ножа от конструктивных и упругих характеристик элементов экструдера-измельчителя, а также от толщины выходной решетки, может быть рассчитано оптимальное значение толщины лезвия, обеспечивающее исключение концентрации контактных напряжений в стыке нож–решетка и снижение скорости износа ножа, а также энергоемкости измельчительного процесса.

Ключевые слова: математическое моделирование; дифференциальное уравнение изгиба; переменное давление; скорость износа; оптимизация; режущая пара; толщина ножа

Original article

Dependence of the optimal knife thickness on the geometric and elastic characteristics of the chopper structural elements

Valery V. Pelenko^{1*}, Vasily V. Nechitaylov¹,Alexander P. Verboloz², Vera A. Demchenko³, Dmitry A. Kutsenko², Grigory V. Barinov²¹Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design²ITMO University³Research Institute of the Federal State-Owned "Military Educational Institution of Logistics named General of the Army A.V. Khrulyov" St. Petersburg, Russia, *pelenko1@rambler.ru

Abstract. The problem of describing the process of bending deformation of the output lattice, presented in the form of a round solid plate, and a knife blade as a cantilever beam for a screw extruder-grinder has been formed and analytically solved. At the same time, the influence of the geometrical parameters of the grinder and the elastic characteristics of the cutting elements on the optimal ratio of their thicknesses, which ensures the absence of concentration of internal stresses in the plane of contact between the knife and the grate, has been evaluated. A peculiarity of the problem formulation is taking into account the variable nature of the external loading of the grate and the knife due to the presence of reverse flow of the product (sluice), as well as considering a promising version of the conditions for fixing the knife and grate on the top screw body. The complexity of material movement in screw grinders during its extrusion and cutting is due not only to the complex screw shape of the screw, but also to the presence of a sluice gap between the inner screw surface of the counter-rotation ribs of the extruder body and the outer screw surface of the screw turns. The significant effect of the material

backflow on the formation of an alternating pressure field is taken into account by approximating the law of its variation with a linearly decreasing function. At the first stage of the presented study, the processes of bending of each of the two elements of the knife-lattice cutting pair under the influence of a varying load are analytically described by the methods of differential calculus. At the second stage, a condition and criterion for optimizing the ratio between the thickness of the knife blade and the thickness of the output grinding grate are formulated. Based on the obtained mathematical model for the dependence of the thickness of the knife blade on the design and elastic characteristics of the top elements, as well as on the thickness of the outlet lattice, the optimal value of the blade thickness can be calculated, which ensures the elimination of the concentration of contact stresses in the knife-lattice joint and the reduction of the knife wear rate, and also the energy consumption of the shredding process.

Keywords: mathematical modeling; differential equation of bending; variable pressure; wear rate; optimization; cutting pair; knife thickness

Введение

В настоящее время 42% производственных фондов предприятий пищевой промышленности ожидают замены, 25% подлежат модернизации и только 19% соответствует мировому уровню. По данным отечественных источников, степень износа основных средств в области пищевого оборудования составляет 70%.

Более 27% парка технологического оборудования занимает импортная техника [1], в связи с чем развитие отечественного пищевого машиностроения и совершенствование измельчительного оборудования является весьма актуальной задачей. На протяжении многих десятилетий процессы измельчения пищевого сырья исследуются отечественными и зарубежными учеными, однако не все работы подтвердили достоверность выводов, не на все вопросы по практическому применению рекомендаций при конструировании и расчете измельчительного оборудования найдены ответы.

Дальнейшее углубление теоретических исследований по совершенствованию измельчительного оборудования позволит улучшить такие его характеристики, как производительность и энергоемкость, а также повысить качество выпускаемой мясной продукции. Анализ 87 кандидатских и 14 докторских отечественных диссертаций, а также российских и зарубежных публикаций, посвященных исследованию измельчительного оборудования, показывает, что основное проблемное поле для развития и углубления теории процессов резания и экструзии составляют вопросы обоснования величины минимального давления в зоне резания пищевого материала [2–4]; оптимизации угла наклона винтовой линии последнего витка шнека [5–7]; определения количества витков шнека, обеспечивающего статистически обоснованную степень уплотнения пищевого материала; математического описания процесса взаимодействия контактных поверхностей пары нож–решетка [8, 9]; определения момента затяжки центральной зажимной гайки [10]; аналитического описания процесса взаимодействия пищевого материала с ребрами противоскольжения корпуса волчка [11, 12].

Предлагаемый в данной статье материал посвящен одному из проблемных вопросов и касается математического описания процесса контактного взаимодействия режущих элементов в кинематической паре волчка нож–решетка.

Практическая реализация сделанных выводов позволит исключить концентрацию внутренних напряжений в зоне контакта, уменьшить износ режущей пары нож–решетка и снизить энергоемкость процесса измельчения.

Цель работы – разработка математической модели зависимости толщины лезвия ножа от толщины выходной измельчительной решетки, а также от геометрических и упругих характеристик конструктивных элементов волчка, позволяющей установить оптимальное соотношение толщин в условиях переменной нагрузки, линейно изменяющейся по радиусу решетки.

Объекты и методы исследования

Объектом исследования является режущая пара нож–решетка шнекового измельчителя. В качестве предмета исследования рассматриваются процессы изгиба выходной измельчительной решетки и лезвия ножа волчка, а также их взаимодействие в условиях переменной нагрузки для исключения концентрации внутренних напряжений в плоскости контакта и снижения скорости износа.

В качестве метода исследования выбрано математическое моделирование средствами теории упругости и дифференциального исчисления процессов изгиба решетки и ножа, а также оптимизации толщины лезвия ножа на основе уравнения совместности деформаций ножа и решетки.

Результаты и обсуждение

1. Аппроксимация нагрузки на нож и решетку линейной аналитической моделью

Решение задачи минимизации контактных напряжений элементов пары нож–решетка, и снижение тем самым скорости их износа, требует обеспечения равенства прогибов лезвий ножа и прогибов перфорированной круглой решетки.

В работе [13] показано, что для обеспечения одинаковых деформаций прогиба выходной решетки и лезвия ножа, гарантирующих наименьшие контактные напряжения, минимальный износ и затупление режущей пары, следует обеспечивать эквидистантность изогнутой срединной поверхности решетки и упругой линии изгиба лезвия. В исследовании [14] разработана математическая модель прогиба перфорированной решетки, нагруженной равномерно распределенной по ее поверхности механической нагрузкой и температурным изгибающим моментом, равномерно распределенным по периферийной внешней, свободной от связей кольцевой границе решетки и линейно распределенным по ее толщине. Однако, как показывают материалы работы [15], нагрузка, распределенная по кольцевой поверхности измельчительной решетки, не является равномерной.

Оценим величину давления экструдруемого материала в центре решетки $P_{ц}$ и на ее периферии $P_{ш}$. Требуемая величина давления, создаваемого в центре измельчительной решетки и способного продавить измельчаемый материал сквозь отверстия, определяется известным соотношением [16]

$$P_{ц} = \frac{4P_{уд}}{d_0 \frac{2fv_m\delta_p}{1-\nu_m(1-f)}},$$

где $P_{ц}$ – давление в центральной части кольцевой измельчительной решетки, Па;

$P_{уд}$ – удельное усилие резания измельчаемого в экструдере материала, н/м;

d_0 – диаметр отверстий измельчительной выходной решетки, м;

ν_m – коэффициент Пуассона экструдруемого материала;

f – коэффициент трения скольжения материала по рабочим поверхностям;

δ_p – толщина выходной измельчительной решетки, м.

Необходимо заметить, что в литературе известна формула Пелеева, которая имеет более простой, но приближенный характер

$$P_{ц} = \frac{4P_{уд}}{d_0}. \quad (1)$$

На внешней периферийной границе кольцевой решетки формируется иное давление, величина которого определяется давлением шлюзования материала сквозь кольцевой зазор ξ между внутренней поверхностью корпуса экструдера (гребней буртиков противовращения) и наружной поверхностью винтового шнека. Схема и параметры кольцевого зазора представлены на рисунке 1. Давление шлюзования $P_{ш}$ может быть определено из уравнения равновесия сил в условиях продавливания экструдруемого материала сквозь кольцевой зазор высотой ξ и элементарной длиной dl

$$P_{ш} \xi dl = P_{уд} dl. \quad (2)$$

Таким образом, исходя из уравнения (2), величина давления материала на внешней периферийной границе кольцевой решетки составит значение

$$P_{ш} = \frac{P_{уд}}{\xi}. \quad (3)$$

Из анализа соотношений (1) и (3) следует, что единственный случай формирования равномерно распределенной нагрузки по площади кольцевой измельчительной решетки обеспечивается при условии равенства давлений на внутренней и наружной периферийных поверхностях, исходя из чего можно получить соответствующее этому условию соотношение

$$\xi = \frac{d_0}{4} - \frac{fv_m\delta_p}{2[1-\nu_m(1-f)]}. \quad (4)$$



Рисунок 1 – Схема и параметры кольцевого зазора в поперечном сечении экструдера
 Figure 2. Diagram and parameters for circular sluice gap at the extruder cross-section

Для конкретной конструкции элементов экструдера и при известных физико-механических характеристиках экструдруемого материала $d_0 = 3$ мм; $\nu_m = 0,43$; $f = 0,1$; $\delta_p = 5$ мм, согласно уравнению (4), величина ξ составит значение $\xi = 0,575$.

В реальных условиях технологии изготовления элементов экструдера и точности литейного производства величина зазора ξ существенно (в 1,5–2 раза) превышает полученное значение, поэтому давление на внешнюю периферийную часть кольцевой решетки, в общем случае, в соответствии с выражением (3), в 1,5–2 и более раз меньше, чем на центральную область.

Таким образом, представляется актуальной первая задача аналитического определения прогиба кольцевой перфорированной решетки в условиях воздействия нагрузки $q(r)$, линейно распределенной по радиусу.

2. Допущения, принятые при математическом моделировании процесса изгибной деформации выходной измельчительной решетки

Схема воздействия на перфорированную выходную измельчительную решетку неравномерной нагрузкой, линейно распределенной по радиусу, приведена на рисунке 2.

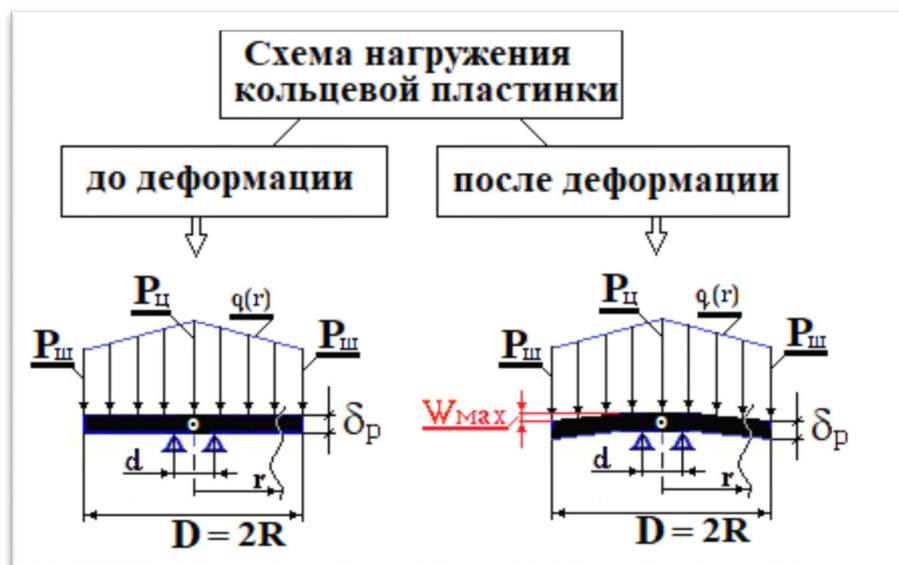


Рисунок 2 – Схема нагружения кольцевой измельчительной решетки экструдера нагрузкой, линейно распределенной по радиусу

Figure 2. Loading the circular grinding grate of extruder by a load linearly distributed along its radius

Выходная измельчительная решетка экструдера представляет собой кольцевую перфорированную пластинку диаметром $D = 2R$ и толщиной δ_p . Расчет такой пластинки будем осуществлять в соответствии с теорией, основанной на трех гипотезах, предложенных Кирхгофом для тонкой пластинки [17], так как ее геометрические и деформационные параметры удовлетворяют требуемым для этого условиям

$$\frac{1}{5} \geq \frac{\delta_p}{D} \geq \frac{1}{80}, \text{ а также } W \leq \frac{\delta_p}{4},$$

где W – величина прогиба пластинки, м;

$W(R) = W(r)_{max}$ – максимальное значение величины прогиба пластинки, м;

$R = \frac{D}{2}$ – максимальное значение радиуса кольцевой пластинки, м;

r – текущее значение радиуса кольцевой пластинки, м.

Следует учесть, что круглая перфорированная пластинка считается кольцевой при условии

$$\frac{R-b}{R} \ll 1.$$

где $b = \frac{d}{2}$ – радиус центрального отверстия пластинки, м.

Ориентировочно, для реальных конструкций экструдеров и волчков характерны следующие пропорции $R = 0,03 \text{ м}$, $b = 0,004 \text{ м}$, (m – коэффициент масштаба), поэтому $\left[\frac{R-b}{R}\right] = 0,867 \approx 1$. Так как исходное условие не выполняется, то в рассматриваемом случае круглую перфорированную пластинку можно считать перфорированной сплошной, что существенно упрощает решение задачи определения ее прогиба. При этом влияние перфорированных отверстий на прогибы пластинки учитывается, как будет показано ниже, при вычислении значения ее цилиндрической жесткости по соотношению (6).

3. Построение уравнения изогнутой срединной поверхности сплошной круглой перфорированной пластинки под действием нагрузки, линейно распределенной по радиусу, в условиях жесткой заделки ее центральной части

Задачу определения деформации и прогиба пластинки можно решать методом суперпозиции, считая пластинку нагруженной постоянной нагрузкой от действия давления $q_c = P_{II}$ и противоположно ей направленной линейно распределенной нагрузкой q_v , уменьшающейся от значения $(P_{II} - P_{III})$ при $r = R$, до нуля при $r = 0$, как это изображено на рисунке 3.

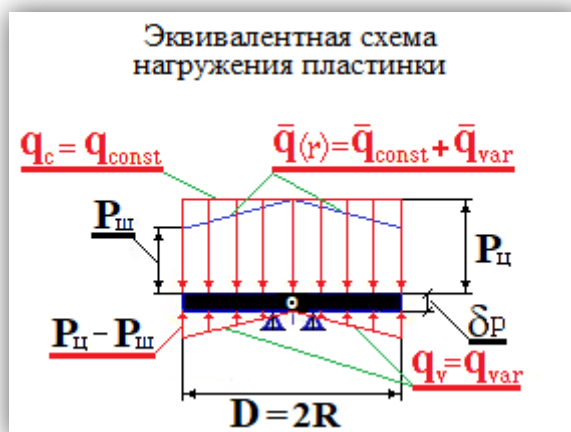


Рисунок 3 – Эквивалентная схема нагружения сплошной круглой перфорированной пластинки нагрузкой, линейно распределенной по радиусу

Figure 3. Equivalence circuit diagram for loading of a round solid perforated plate by a load linearly distributed along its radius

На первом этапе решения задачи определяется деформация пластинки от действия постоянного давления $q_c = P_{II}$. Далее определяется деформация пластинки q_v во встречном направлении от действия линейно распределенной нагрузки. Суммарная деформация дает общее решение задачи.

Учитывая достаточно простой вид функции поперечного симметричного нагружения

измельчительной решетки, будем решать поставленную задачу методом прямого интегрирования известного неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка для прогиба пластинки, имеющего следующий общий вид [17]

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{Q}{D}, \quad (5)$$

где Q – перерезывающая сила, приходящаяся на единицу длины цилиндрического сечения радиуса r , Н/м;
 D_{Π} – цилиндрическая жесткость пластинки (Н·м), определяемая известным соотношением

$$D_{\Pi} = \frac{E (\delta_p)^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (6)$$

При количественной оценке полученных математических моделей изгиба пластинки будем пользоваться уточненным значением ее цилиндрической жесткости, учитывающим влияние перфорированных отверстий

$$D_{\Pi} = \frac{E (\delta_p)^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{a - n_r d_o - b}{a} \right),$$

где n_r – количество отверстий в сечении перфорированной круглой кольцевой пластины (решетки);
 d_o – диаметр отверстий пластинки, м;
 E – модуль продольной упругости материала пластинки, Па;
 δ_p – толщина пластинки, м.

Для пластины с внешней распределенной по площади нагрузкой $q(r)$ можем получить значение $Q(r)$ из уравнения равновесия

$$Q \cdot 2\pi r = \int_0^r q(r) 2\pi r dr. \quad (7)$$

Таким образом, с учетом осесимметричности внешней нагрузки $q(r)$ и соотношений (5) и (7) дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности сплошной круглой пластинки удобнее всего для интегрирования записать в виде

$$r \cdot \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{1}{D_{\Pi}} \cdot \int_0^r q(r) \cdot r \cdot dr. \quad (8)$$

Аналитическое выражение для внешней нагрузки $q(r)$ пластинки можно представить в виде

$$q(r) = P_{\Pi} \frac{P_{\Pi} - P_{\text{ш}}}{R} r.$$

Вводя новые обозначения для удобства записей, получим

$$q(r) = q_c - k \cdot r, \quad (9)$$

где $q_c = P_{\Pi}$;
 $k = \frac{P_{\Pi} - P_{\text{ш}}}{R}$.

С учетом соотношения (9), уравнение (8) принимает вид

$$r \cdot \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{1}{D_{\Pi}} \cdot \int_0^r (q_c - k \cdot r) \cdot r \cdot dr.$$

После интегрирования правой части, получаем

$$r \cdot \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{1}{D_{\Pi}} \left(q_c \frac{r^2}{2} - k \frac{r^3}{3} \right). \quad (10)$$

Разделив обе части соотношения (10) на r , и интегрируя полученное уравнение первый раз, запишем

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dw}{dr} \right) + C_1 = \frac{1}{D_{\Pi}} \left(q_c \frac{r^2}{4} - k \frac{r^3}{9} \right). \quad (11)$$

Умножив обе части соотношения (11) на r , и интегрируя его второй раз, получим

$$r \cdot \frac{dw}{dr} + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2 = \frac{1}{D_{\Pi}} \left(q_c \frac{r^4}{16} - k \frac{r^5}{45} \right). \quad (12)$$

Разделив обе части на r , и интегрируя соотношение (12) третий раз, запишем выражение для W в виде

$$W + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3 = \frac{1}{D_n} \left(q_c \frac{r^4}{64} - k \frac{r^5}{225} \right). \quad (13)$$

Из физических условий ограниченности прогибов W очевидно, что $C_2 = 0$. Тогда уравнение (13) примет вид

$$W = q_c \frac{r^4}{64D_n} - k \frac{r^5}{225D_n} - C_1 \frac{r^2}{4} - C_3. \quad (14)$$

Из граничного условия равенства нулю прогиба пластинки в ее центре следует, что $C_3 = 0$. Тогда соотношение (14) упростится

$$W = q_c \frac{r^4}{64D} - k \frac{r^5}{225D_n} - C_1 \frac{r^2}{4}. \quad (15)$$

Неопределенный коэффициент C_1 (постоянная интегрирования) в уравнении (11) и (15) определим из граничного условия равенства нулю внутреннего изгибающего момента по внешнему окружному (тангенциальному) сечению пластинки $M_r(R) = 0$.

Учитывая известную зависимость M_r от r , в соответствии с работой [15], запишем

$$M_r(r) = \frac{d^2w}{dr^3} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \quad (16)$$

где ν – коэффициент Пуассона материала пластинки.

При $r = R$ и $M_r(R) = 0$, из соотношения (16) следует

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} = 0. \quad (17)$$

Дифференцируя соотношение (15) дважды, получаем

$$\frac{dw}{dr} = q_c \frac{r^3}{16D_n} - k \frac{r^4}{45D_n} - C_1 \frac{r}{2}; \quad (18)$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = 3q_c \frac{r^2}{16D_n} - 4k \frac{r^3}{45D_n} - \frac{C_1}{2}. \quad (19)$$

Подставляя выражения (18) и (19) в уравнение (17), и решая полученное относительно C_1 , при $r = R$, получаем

$$C_1 = q_c \frac{R^2}{8D_n} \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} - 2k \frac{R^3}{45D_n} \frac{(4+\nu)}{(1+\nu)} \quad (20)$$

Подставляя полученное выражение (20) в уравнение (15), получаем уравнение изогнутой срединной поверхности сплошной круглой перфорированной пластинки под действием нагрузки, линейно распределенной по радиусу, в условиях жесткой заделки ее центральной части

$$W(r) = W_p(r) = q_c \frac{r^4}{16D_n} - k \frac{r^5}{225D_n} - q_c \frac{R^2}{32D_n} \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} r^2 + k \frac{R^3}{90D_n} \frac{(4+\nu)}{(1+\nu)} r^2. \quad (21)$$

В этом случае максимальное значение прогиба перфорированной решетки $W_{p,max} = W(R)$ достигается при $r = R$ и составляет величину

$$W_{p,max} = W_p(R) = \frac{R^4}{D_n} \left\{ \frac{q_c}{64} \left[\frac{2(3+\nu)}{(1+\nu)} \right] - k \frac{R}{225} \left[1 - \frac{5(4+\nu)}{2(1+\nu)} \right] \right\}. \quad (22)$$

Приведя подобные члены, упростим полученное выражение до вида

$$W_{p,max} = W_p(R) = - \frac{R^4}{D_n} \cdot \frac{q_c}{64} \left[\frac{(5+\nu)}{(1+\nu)} \right] - k \frac{R}{150} \frac{(6+\nu)}{(1+\nu)}.$$

Корректность приведенного решения (22) подтверждается результатами, полученными методом суперпозиции деформаций от действия постоянной нагрузки $W_1(q_c)$ и переменной, линейно распределенной по радиусу $W_2(q_v)$. При этом названные деформации составляют следующие величины:

$$W_1(q_c) = q_c \frac{r^4}{64D} - q_c \frac{R^2}{32D_n} \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} r^2, \quad (23)$$

$$W_2(q_v) = k \frac{r^5}{225D} - k \frac{R^3}{90D_n} \frac{(4+\nu)}{(1+\nu)} r^2. \quad (24)$$

Алгебраическая сумма $[W_1(q_c) - W_2(q_v)]$ соотношений (23) и (24) дает результат, совпадающий с уравнением (21).

4. Решение дифференциального уравнения изгиба лезвия ножа под действием линейно распределенной нагрузки в условиях консольной, жесткой заделки

Как отмечалось выше, решение задачи минимизации контактных напряжений элементов пары нож–решетка, и снижения тем самым скорости их износа, требует обеспечения равенства прогибов лезвий ножа и прогибов перфорированной решетки.

Таким образом, второй актуальной задачей является решение дифференциального уравнения изгиба лезвия ножа как консольной, жестко заделанной балки, находящейся под действием линейно распределенной нагрузки интенсивностью $q(r) = [q_c - k \cdot r]$, как это следует из соотношения (9).

Расчетная схема сформулированной задачи представлена на рисунке 4.

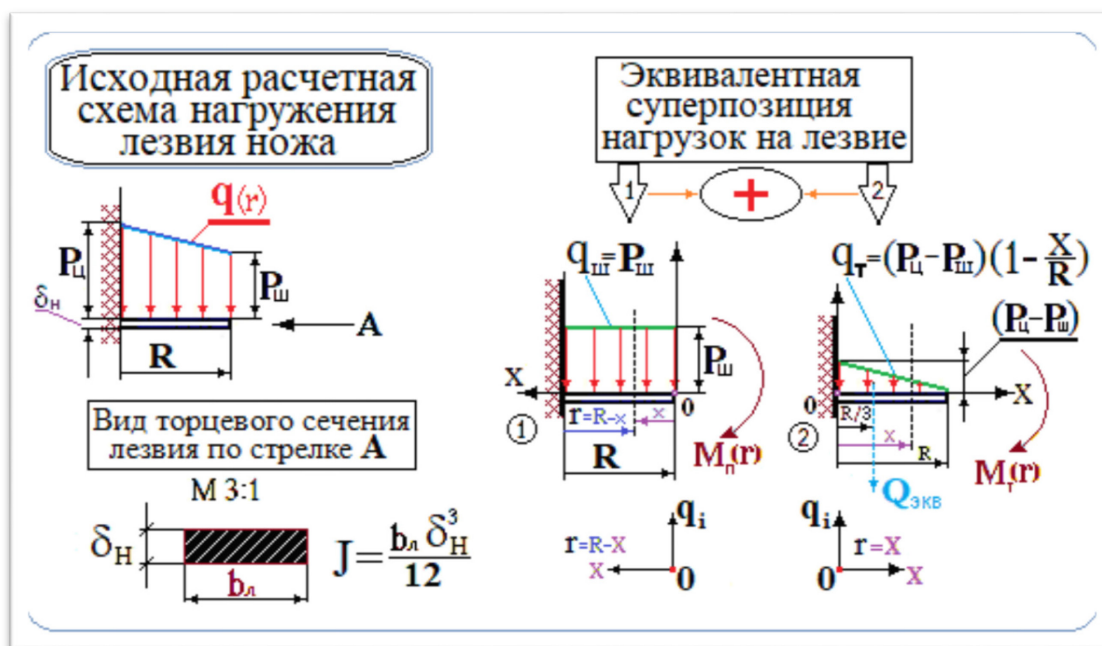


Рисунок 4 – Схема воздействия на лезвие ножа нагрузкой $q(r)$, линейно распределенной по его длине
 Figure 4. Knife blade exposed to $q(r)$ load linearly distributed along its length

Известно, например, из работы [18], что уравнение оси изогнутой балки можно записать в виде

$$\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{M(r)}{E_n J}, \tag{25}$$

где $W = W(r) = W_n(r)$ – прогиб лезвия на расстоянии r от жесткой заделки, м;

E_n – модуль упругости материала лезвия ножа, Па;

$M(r)$ – изгибающий момент, действующий в сечении балки на расстоянии r от жесткой заделки, Н·м;

J – момент инерции поперечного сечения лезвия при изгибе, м⁴.

Момент инерции прямоугольного сечения лезвия ножа определяется в соответствии с выражением

$$J = b_l \frac{\delta_n^3}{12},$$

где b_l – ширина лезвия ножа, м;

δ_n – толщина лезвия ножа, м.

Решение дифференциального уравнения (25) при постоянной изгибной жесткости ($E_n \cdot J$) имеет вид [19]

$$W_n(r) = \frac{1}{E_n J} \iint M(r) \cdot dr \cdot dr + B_1 \cdot r + B_2. \tag{26}$$

Для интегрирования этого уравнения найдем зависимость $M(r) = \varphi(r)$ исходя из расчетной схемы, приведенной на рисунке 4.

Наиболее рационально решать данную задачу представляется методом суперпозиции, в два этапа, разложив линейно распределенную поперечную перерезывающую нагрузку трапецеидальной формы на постоянную составляющую $q_{ш}$ и линейно убывающую поперечную перерезывающую нагрузку треугольной формы $q_{т}(x) = q_{т}(r)$, как это представлено на рисунке 4 (позиции ① и ②).

Как известно [18], постоянная распределенная нагрузка дает изгибающий момент в произвольном сечении с координатой X , вычисляемый в соответствии с параболическим законом

$$M_{п} = M_{п}(x) = -(\Phi_{ш} \cdot x) \cdot \frac{x}{2} = -(P_{ш} \cdot b_{л} \cdot x) \cdot \frac{x}{2} = -P_{ш} \cdot b_{л} \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Учитывая очевидную зависимость $x = (R-r)$, выразим искомую зависимость $M_{п} = M_{п}(r)$ в виде

$$M_{п} = M_{п}(r) = \frac{-P_{ш} \cdot b_{л} \cdot (R-r)^2}{2}.$$

Линейно распределенная поперечная перерезывающая нагрузка Φ , уменьшающаяся от значения $(\Phi_{ц} - \Phi_{ш}) = (P_{ц} - P_{ш}) \cdot b_{л}$ при $r = x = 0$ до нулевого значения при $r = x = R$, может быть записана аналогично соотношению (9) в виде

$$\Phi_{т}(r) = q_{т}(r) \cdot b_{л} = (P_{ц} - P_{ш}) \cdot b_{л} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

$\Phi_{т}(r)$ – эквивалентная, линейно уменьшающаяся по закону треугольника, перерезывающая нагрузка для сечения с координатой r .

Координата центра давления, отсчитываемая от края консольной балки для силы $\Phi_{т}(r)$, в соответствии с рисунком 4 (позиция ②), составляет значение $x_{т} = \frac{R}{3}$. При этом, в результате интегрирования равнодействующая $Q_{эКВ}$ составит величину

$$Q_{эКВ} = -\int_r^R \Phi(r) \cdot dr = \frac{1}{2} R \cdot (P_{ц} - P_{ш}) \cdot b_{л} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2.$$

Изгибающий момент $M_{т} = M_{т}(r)$ от нагрузки, распределенной по закону треугольника, определяется по соотношению

$$M_{т}(r) = \int_r^R Q_{эКВ} dr$$

или

$$M_{т}(r) = -\int_r^R \frac{b_{л}}{2} (P_{ц} - P_{ш}) \cdot R \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 dr = -\frac{1}{6} (P_{ц} - P_{ш}) R^2 b_{л} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^3.$$

При этом суммарный изгибающий момент составит величину

$$M_{т}(r) = M_{п}(r) + M_{т}(r) = -P_{ш} \cdot b_{л} \cdot \frac{(R-r)^2}{2} - \frac{1}{6} (P_{ц} - P_{ш}) R^2 b_{л} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^3. \quad (27)$$

С учетом полученного соотношения (27), уравнение (26) запишем в виде определенного двойного интеграла

$$W_{н}(r) = \frac{1}{E_{н} \cdot J} \iint_r^R \left[-P_{ш} \cdot b_{л} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 \frac{R^2}{2} - \frac{1}{6} (P_{ц} - P_{ш}) R^2 b_{л} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^3 \right] dr dr. \quad (28)$$

Решение интеграла (28) в квадратурах дает выражение

$$W_{н}(r) = \frac{1}{24 E_{н} \cdot J} b_{л} R^4 \left\{ P_{ш} \left[\left(1 - \frac{r}{R}\right)^4 - 1 \right] + \frac{1}{5} (P_{ц} - P_{ш}) \left[\left(1 - \frac{r}{R}\right)^5 - 1 \right] \right\}. \quad (29)$$

В этом случае максимальное значение прогиба лезвия ножа $W_{н,max} = W_{н}(R)$ достигается при $r = R$ и составляет, в соответствии с (29) величину

$$W_{н,max} = W_{н}(R) = -\frac{1}{120 \cdot E_{н} \cdot J} b_{л} R^4 (P_{ц} + 4P_{ш}). \quad (30)$$

5. Формулировка условия и критериального соотношения для оптимизации толщины лезвия ножа в зависимости от толщины выходной измельчительной решетки, а также геометрических и упругих характеристик элементов волчка

Условие оптимальности соотношения толщины ножа и решетки может быть сформулировано в виде условия совместности их деформаций и обеспечения тем самым минимальных контактных напряжений в паре нож–решетка, то есть наименьшей скорости износа режущих элементов. Критериальное уравнение для соотношения толщины ножа и решетки запишется в виде равенства правых частей уравнений (22) и (30), которое обеспечивает эквидистантность упругих линий изгиба выходной решетки и лезвий ножа

$$\frac{R^4}{D_n} \left\{ \frac{q_c}{64} \left[1 - \frac{2(3+\nu)}{(1+\nu)} \right] - k \frac{R}{225} \left[1 - \frac{5(4+\nu)}{2(1+\nu)} \right] \right\} = \frac{-1}{120 \cdot E_H J} b_L R^4 (P_{ц} + 4P_{ш}).$$

Учитывая экспликацию к формуле (9) и выражение для J , последнее соотношение можно записать в виде

$$\frac{-1}{D_n} \left\{ \frac{P_{ц}}{64} \left[1 - \frac{2(3+\nu)}{(1+\nu)} \right] - \frac{(P_{ц}-P_{ш})}{225} \left[1 - \frac{5(4+\nu)}{2(1+\nu)} \right] \right\} = \frac{1}{10 \cdot E_H \delta_n^3} (P_{ц} + 4P_{ш}).$$

Решая полученное уравнение относительно δ_n , получим

$$\delta_n^3 = \frac{(P_{ц}+4P_{ш})}{10E_H} \left\{ \frac{P_{ц}}{64} \left[1 - \frac{2(3+\nu)}{(1+\nu)} \right] - \frac{(P_{ц}-P_{ш})}{225} \left[1 - \frac{5(4+\nu)}{2(1+\nu)} \right] \right\}. \tag{31}$$

Подставив в соотношение (31) формулу (6) для цилиндрической жесткости пластинки, запишем его в виде

$$\delta_n^3 = \frac{-E \delta_p^3}{12(1-\nu^2)} \frac{(P_{ц}+4P_{ш})}{10E_H} \left\{ \frac{P_{ц}}{64} \left[1 - \frac{2(3+\nu)}{(1+\nu)} \right] - \frac{(P_{ц}-P_{ш})}{225} \left[1 - \frac{5(4+\nu)}{2(1+\nu)} \right] \right\}.$$

После несложных алгебраических преобразований последнее выражение приведем к следующему компактному виду

$$\delta_n^3 = \frac{\delta_p^3 E (P_{ц}+4P_{ш})}{60E_H(1-\nu) \left\{ \frac{P_{ц}}{32} [(5+\nu)] - \frac{(P_{ц}-P_{ш})}{75} [(6+\nu)] \right\}}.$$

Решая полученное уравнение третьей степени относительно δ_n , найдем необходимую толщину лезвия ножа, обеспечивающую прогиб лезвия, одинаковый с прогибом выходной решетки

$$\delta_n = \delta_p \cdot \sqrt[3]{\frac{E(P_{ц}+4P_{ш})}{60E_H(1-\nu) \left\{ \frac{P_{ц}}{32} [(5+\nu)] - \frac{(P_{ц}-P_{ш})}{75} [(6+\nu)] \right\}}}. \tag{32}$$

При $\xi = 0, P_{ц} = P_{ш}$ и тогда эта зависимость запишется в форме более простого уравнения

$$\delta_n = \delta_p \cdot \sqrt[3]{\frac{8E}{3E_H(1-\nu)(5+\nu)}}.$$

С учетом соотношений (1) и (3) выражение (32) примет следующий окончательный вид

$$\delta_n = \delta_p \cdot \sqrt[3]{\frac{E(d_0+\xi)}{15E_H(1-\nu) \left\{ \frac{\xi}{8} [(5+\nu)] - \frac{(4\xi-d_0)}{75} [(6+\nu)] \right\}}}. \tag{33}$$

6. Количественная оценка теоретических результатов

Для решетки и ножа, выполненных из инструментальной стали (например, P12), можем положить $\nu = 0,33$ и равенство упругих характеристик $E = E_H$. Тогда, в соответствии с выражением (33), получим значение толщины лезвия ножа в зависимости от трех конструктивных параметров экструдера – толщины выходной решетки δ_p , диаметра отверстий выходной решетки d_0 , величины кольцевого зазора шлюзования ξ экструдруемого материала в виде

$$\delta_n = \delta_p \cdot \sqrt[3]{\frac{(d_0+\xi)}{\{3,306\xi+0,848d_0\}}}.$$

Для реального образца шнекового экструдера (для малых предприятий) с параметрами $\xi = 0,001$ м,

и $d_0 = 0,005$ м, получим требуемое соотношение толщин решетки и ножа $\delta_n = 0,926\delta_p$.

В случае промышленного, крупного образца $\xi = 0,0015$ м, и $d_0 = 0,020$ м, это соотношение примет вид $\delta_n = 0,994\delta_p$.

При $\xi = 0, P_{ц} = P_{ш}$, тогда, для промышленного образца, зависимость толщины лезвия ножа от толщины выходной измельчительной решетки составит

$$\delta_n = \delta_p \cdot \sqrt[3]{\frac{8E}{3E_n(1-\nu)(5+\nu)}} = 0,907\delta_p.$$

Отличие составляет около 9% и с точки зрения процессов износа представляет собой существенную, значимую величину.

Рассчитаем величины прогибов ножа с толщиной, вычисленной в условиях постоянной и переменной нагрузки:

$$J = \frac{b_l \delta_n^3}{12},$$

$$E_n = 2 \cdot 10^{11}; b_l = 0,01 \text{ м}; \delta_n = 0,005 \text{ м}; \delta_{n1} = 0,907\delta_n = 0,0045 \text{ м}; R = 0,06 \text{ м}$$

$$W_{n,max} = W_n(R) = -\frac{1}{120 \cdot E_n J} b_l R^4 (P_{ц} + 4P_{ш}).$$

$$J = 0,01 \cdot \frac{0,005^3}{12} = 10,4 \cdot 10^{-11},$$

$$J_1 = 0,01 \cdot \frac{0,0045^3}{12} = 7,6 \cdot 10^{-11},$$

$$P_{ц} = P_{ш} = 0,5 \text{ МПа} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$W_{n,max} = \frac{1}{120 \cdot 20,8} \cdot 0,01 \cdot 0,06^4 \cdot 5 \cdot 0,5 \cdot 10^6 = 129,8 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

$$W_{n,max1} = \frac{1}{120 \cdot 15,2} \cdot 0,01 \cdot 0,06^4 \cdot 5 \cdot 0,5 \cdot 10^6 = 177,6 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

$$\Delta W_n = W_{n,max} - W_{n,max1} = -47,8 \text{ мкм} (-26,9\%).$$

Таким образом, при отклонении расчетной толщины ножа от оптимального значения, определенного по уточненному уравнению (32), учитывающему линейно убывающий характер нагрузки, избыточный дополнительный износ составляет 47,8 мкм или 26,9% от общего прогиба.

Учитывая, что скорость износа γ ножей мясорубок составляет 1,4–2,2 мкм/час, по данным работы [20], возможное увеличение периода эксплуатации ножей до очередной перезаточки может быть вычислено по соотношению

$$\Delta T = \frac{\Delta W_n}{\gamma} = 22-34 \text{ ч.}$$

При средней продолжительности периода перезаточки ножей 90 ч избыточное время износа до полной притирки ножа к решетке составляет от 22 до 34 ч. То есть, около третьей части времени работы кинематическая пара трения нож–решетка эксплуатируется в неоптимальном режиме, а в условиях повышенного износа.

Выводы

В работе аппроксимирован закон изменения давления пищевого материала вдоль радиуса выходной измельчительной решетки линейной функцией; осуществлено математическое моделирование процесса изгиба выходной измельчительной решетки волчка как круглой перфорированной пластинки, находящейся под действием нагрузки, линейно убывающей по радиусу, для определенных краевых условий закрепления; аналитически определен прогиб лезвия ножа под действием переменной нагрузки линейно убывающей по радиусу; сформулировано условие минимизации внутренних усилий взаимодействия лезвия ножа и решетки, обеспечивающее снижение энергоемкости процесса измельчения и величины износа контактирующих элементов; установлена аналитическая зависимость толщины ножа от толщины выходной измельчительной решетки в зависимости от их физико-

механических характеристик и геометрических параметров элементов волчка.

Показано, что пара нож–решетка, рассчитанная без учета линейно изменяющейся нагрузки, около 30% времени наработки до момента очередной перезаточки, эксплуатируется в режиме повышенного износа.

Литература

1. Усманов И.И., Пеленко В.В. Элементы теории расчета волчков. СПб.: Ношир, 2018. 88 с.
2. Пелеев А.И. Технологическое оборудование предприятий мясной промышленности. М.: Пищевая промышленность, 1971. 510 с.
3. Пелеев А.И., Клименко М.Н. Зависимость сопротивления резания и модуля упругости мяса от температуры // Мясная индустрия СССР. 1965. № 6. С. 44–46.
4. Фатыхов Ю., Канопка Л. Экструзионные технологии пищевых производств. Вильнюс: Вильнюсский технический университет, 2007. 88 с.
5. Некоз О.И., Осипенко В.И., Філімонова Н.В., Батраченко О.В. Гідравлічний опір різального вузла вовчків // Вісник Хмельницького національного університету. 2015. № 6. С. 13–19.
6. Філімонова Н.В. Підвищення ефективності роботи вовчків шляхом узгодження подачі та процесу подрібнення м'ясної сировини: автореф. ... дис. канд. техн. наук. Харків, 2017. 21 с.
7. Усманов И.И. Определение закона изменения давления мясного сырья вдоль шнекового канала волчков // Известия Санкт-Петербургского государственного аграрного университета. 2018. № 3. С. 237–243.
8. Полуян В.А., Полуян А.Г. Обоснование предельной толщины лезвия ножа мясорубки МП-180 // Технология и средства повышения надежности машин в АПК: сб. науч. тр. зерноград, 2005. Вып. 1. С. 99–105.
9. Полуян В.А., Полуян А.Г. Повышение долговечности ножей мясорубок // Сб. науч. трудов Краснодарской СХА. Краснодар, 2002. С. 96–97.
10. Пеленко В.В., Верболоз Е.И., Демченко В.А., Усманов И.И., Евона Н.К., Иванова М.А. Экспериментальные исследования процесса измельчения материалов в шнековом оборудовании // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2020. № 1. С. 27–38.
11. Корнюшко Л.М. Механическое оборудование предприятий общественного питания. СПб.: Гиорд, 2006. 288 с.
12. Usmanov I.I. Influence of the material reverse flow process on the regularities of pressure formation along the length of the screw surface of extruders. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*. 2021, V. 699, article 012059.
13. Пеленко В.В., Зуев Н.А., Ольшевский Р.Г., Иваненко В.П., Крысин А.Г. Оценка зависимости производительности измельчителей мяса от их конструкции и физико-механических свойств сырья // Вестник Международной академии холода. 2015. № 1. С. 9–16.
14. Verboloz E.I., Pelenko V.V., Baranenko A.V. The theoretical analysis and optimization of the cutting knife-grille pair parameters in the screws. *Agronomy Research*. 2015, V. 13, no. 3, pp. 709–722.
15. Pelenko V.V., Usmanov I.I., Pokholchenko V.A., Smirnova I. Mathematical model of pressure formation process along the helix channel length of screw grinder. *KnE Life Sciences*. 2020, pp. 633–643.
16. Пеленко В.В., Малявко Д.П., Усманов И.И., Екимов В.Г., Крысин А.Г. Оптимизация процесса измельчения пищевых материалов в волчках // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2016. № 2. С. 32–39.
17. Тимошенко И.А. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1965. 480 с.
18. Дожжел Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 568 с.
19. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. Киев: Будивельник, 1970. 436 с.
20. Полещук О. Б. Оптимизация работы мясоизмельчительных шнековых машин на основе изучения закономерностей переноса влаги в мясном фарше: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Ленинград, 1988. 16 с.

References

1. Usmanov I.I., Pelenko V.V. *Elements of the theory of calculating tops*. St. Petersburg, Noshir Publ., 2018. 88 p. (In Russian)
2. Peleev A.I. *Technological equipment for meat industry enterprises*. Moscow, Food Industry Publ., 1971. 510 p. (In Russian)
3. Peleev A.I., Klimenko M.N. Dependence of cutting resistance and elastic modulus of meat on temperature. *Meat Industry*. 1965, no. 6, pp. 44–46. (In Russian)
4. Fatykhov Yu.A., Kanopka L. *Extrusion technologies for food production*. Vilnius, Vilniussky Technical University Publ., 2007. 88 p. (In Russian)
5. Nekoz O.I., Osipenko V.I., Filimonova N.V., Batrachenko O.V. Hydraulic support for the cutting unit of tops.

- Herald of Khmelnytsky National University. 2015, no. 6, pp. 13–19. (In Ukrainian)
6. Filimonova N.V. *Improving the efficiency of wolves by coordinating the supply and grinding process of raw meat. Extended abstract of candidate's thesis.* Harkiv. 2017. 21 p. (In Ukrainian)
 7. Usmanov I.I. Determination of the law of change of pressure of raw meat along the screw channel of tops. *Proceedings of St. Petersburg State Agrarian University.* 2018, no. 3, pp. 237–243. (In Russian)
 8. Poluyan V.A., Poluyan A.G. Substantiation of the maximum thickness of the blade of the knife of the meat grinder MP-180. *Technology and means to increase the reliability of machines in agriculture.* Collection of Works. Zernograd, 2005, no. 1, pp. 99–105. (In Russian)
 9. Poluyan V.A., Poluyan A.G. Increase of durability of knives of meat grinders. *Collection of Works of the Krasnodar Agricultural Academy.* Krasnodar, 2002, pp. 96–97. (In Russian)
 10. Pelenko V.V., Verboloz E.I., Demchenko V.A., Usmanov I.I., Evona N.K., Ivanova M.A. Experimental studies of grinding process in auger equipment. *Processes and Food Production Equipment.* 2020, no. 1, pp. 27–38. (In Russian)
 11. Korniyushko L.M. *Mechanical equipment of catering establishments.* St. Petersburg, Giord Publ., 2000. 116 p. (In Russian)
 12. Usmanov I.I. Influence of the material reverse flow process on the regularities of pressure formation along the length of the screw surface of extruders. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science.* 2021, V. 699, article 012059. (In Russian)
 13. Pelenko V.V., Zuev N.A., Olszevsky R.G., Ivanenko V.P., Krysin A.G. Evaluation of meat grinder performance depending on their design and physical and mechanical properties of raw-material. *Journal of International Academy of Refrigeration.* 2015, no. 1, pp. 9–16. (In Russian)
 14. Verboloz E.I., Pelenko V.V., Baranenko A.V. The theoretical analysis and optimization of the cutting knife-grille pair parameters in the screws. *Agronomy Research.* 2015, V. 13, no. 3, pp. 709–722. (In Russian)
 15. Pelenko V.V., Usmanov I.I., Pokholchenko V.A., Smirnova I. Mathematical model of pressure formation process along the helix channel length of screw grinder. *KnE Life Sciences.* 2020, pp. 633–643. (In Russian)
 16. Pelenko V.V., Malayvko D.P., Usmanov I.I., Ekimov V.G. Optimization of food grinding process in grinders. *Processes and Food Production Equipment.* 2016, no. 2, pp. 32–39. (In Russian)
 17. Timoshenko I.A. *Strength of materials.* Moscow, Nauka Publ., 1965. 480 p. (In Russian)
 18. Dozhzhel L.G. *Beams, plates and shells.* Moscow, Nauka Publ., 1982. 568 p. (In Russian)
 19. Vajnberg D.V., Vajnberg E.D. *Plate calculation.* Kiev, Budivel'nik Publ., 1970. 436 p.
 20. Poleshchuk O. B. Optimization of the operation of the meat grinder based on the study of the patterns of moisture transfer in minced meat. *Extended abstract of candidate's thesis.* Leningrad, 1988. 16 p. (In Russian)

Информация об авторах

Валерий Викторович Пеленко – д-р техн. наук, профессор Высшей школы технологии и энергетики
Василий Васильевич Нечитайлов – канд. техн. наук, доцент Высшей школы технологии и энергетики
Александр Павлович Верболоз – канд. техн. наук, Факультет энергетики и экотехнологий
Вера Артемовна Демченко – канд. техн. наук, старший научный сотрудник
Дмитрий Александрович Куценко – магистрант Факультета биотехнологий
Григорий Владимирович Баринов – магистрант Факультета биотехнологий

Information about the authors

Valery V. Pelenko, D. Sc., Professor of the Higher School of Technology and Energy
Vasily V. Nechitaylov, Ph. D., Associate Professor of the Higher School of Technology and Energy
Alexander P. Verboloz, Ph. D., Faculty of the Energy and Ecotechnology
Vera A. Demchenko, Ph. D., Senior researcher
Dmitry A. Kutsenko, Undergraduate of the Faculty of Biotechnologies
Grigory V. Barinov, Undergraduate of the Faculty of Biotechnologies

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests

Статья поступила в редакцию 22.04.2021
Одобрена после рецензирования 26.05.2021
Принята к публикации 31.05.2021

The article was submitted 22.04.2021
Approved after reviewing 26.05.2021
Accepted for publication 31.05.2021