

## **Разработка математической модели точности дозирования ингредиентов**

Д. т. н. В.В.Пеленко, к.т. н. А.Г. Крысин, Г.Д. Зильберштейн,  
аспирант А.С. Громцев, магистрант Д.С. Степкин

На современных хлебозаводах и многих других предприятиях пищевой промышленности широко применяются дозаторы и дозирочные станции непрерывного действия для добавления в исходное сырье и, в частности, для тестоприготовления, различных жидких компонентов. Подобные ингредиенты редко являются ньютоновскими жидкостями и часто представляют собой агрессивные среды, что делает задачу обеспечения точности дозирования и технологичности в эксплуатации и обслуживании названных устройств чрезвычайно сложной.

С целью обеспечения качественного технологического смешивания всех ингредиентов в тестомесильном оборудовании необходимо соответствие дозирочных станций следующим основным требованиям:

- непрерывность потока каждого жидкого компонента;
- обеспечение точности дозирования в пределах  $2 \div 2,5\%$  погрешности от номинальной производительности, ( $3 \div 5\%$  для неньютоновских сред);
- возможность плавного и дискретного регулирования производительности и точности дозирования без приостановки технологического процесса;
- возможность дозирования с требуемой точностью такого широкого спектра жидких компонентов (по их физико-механическим и реологическим характеристикам), как вода, солевой и сахарный растворы, дрожжевая суспензия, растительное масло, жидкая закваска, мочка, раствор патоки, жидкий маргарин и другие материалы;
- обеспечение стойкости конструкции к агрессивным средам;
- исключение из конструкции дозаторов и дозирующих станций быстроизнашивающихся узлов и деталей, таких, например, как электромагнитные клапаны и запорные пары типа седло-шарик ;
- возможность обеспечения высокой производительности дозирования жидкообразных компонентов при достаточной точности.

Широкий литературный и патентный поиск показывает, что наиболее полно отвечают перечисленным противоречивым условиям дозаторы так называемого «черпачкового типа». Они просты и надежны в эксплуатации, обеспечивают непрерывность потока и высокую производительность, конструктивно несложны, но имеют недостатки по обеспечению точности дозирования и возможности плавного регулирования производительности.

В одной из работ предложена конструкция дозирочной станции непрерывного действия Б8-ХДМ, разработанная в ООО «Пищепромавтоматика», изготовленная и успешно эксплуатируемая на

протяжении более шести лет в АООТ «Новгородхлеб», свободная от последних двух недостатков существующих черпачковых дозаторов.

Теоретической основой возможности создания такой дозировочной станции явилась предварительная разработка соответствующей математической модели точности дозирования жидких ингредиентов, зависящей от значительного количества влияющих факторов различной природы (конструктивной, геометрической, кинематической, реологической и др.).

Работа дозирующей станции осуществляется следующим образом.

Жидкая или жидкообразная среда по мере убывания уровня в общей ванне за счет зачерпывания ингредиента большими черпачками, периодически подается в общую ванну через поплавковый клапан регулятора уровня с диапазоном нечувствительности  $\Delta S$ , обуславливающим периодические колебания уровня в общей ванне с амплитудой  $\Delta H$ .

Зачерпнутая из общей ванны большими черпачками жидкая среда через трубчатое колено сливается в малую ванну, которая отрегулирована таким образом, что излишняя жидкость сливается через край обратно в общую большую ванну. В результате поддерживается достаточно постоянный уровень жидкости в малой ванне  $h \pm \Delta h$  ( $\Delta h \ll \Delta H$ ) и тем самым обеспечивается достаточно точная доза компонента в черпачках малого диска. Изменяя положение малой ванны винтом без прерывания процесса дозирования, на ходу, имеется возможность регулировать величину колебания уровня в малой ванне  $\Delta h$  и, тем самым, изменять дозу, а, следовательно, производительность и точность дозирования.

Рассмотрение физической описанной модели процесса показывает, что для повышения точности дозы следует уменьшать величину  $\Delta h$  колебаний уровня жидкости в малой ванне, но при этом уменьшится и объем зачерпываемой малым черпачком дозы и, естественно, снизится производительность. Таким образом, требование одновременного повышения производительности и точности за счет повышения уровня является противоречивым, свидетельствующим о том, что достигать требуемой точности следует снижением величины  $\Delta h$ , а добиваться повышения производительности необходимо изменением такого кинематического параметра, как угловая скорость  $\omega_v$  вращения несущего черпачки вала, в сторону увеличения.

Заключительной фазой процесса дозирования является слив дозы, сформированной малым черпачком, через его трубчатое колено в лоток.

Анализ конструктивного устройства, структуры и взаимосвязей узлов и элементов дозатора, а также его геометрических, кинематических и гидродинамических характеристик позволяет выявить основные факторы, влияющие на производительность и точность (относительную погрешность) дозирования.

1.  $\Delta S$  – ширина зоны нечувствительности поплавкового регулятора уровня влияет на погрешность дозы большого черпачка через колебания уровня зеркала жидкости в общей большой ванне  $\Delta H$ , а также может изменять

величину дозы при определенной синхронизации угловой скорости вала с циклической работой поплавкового регулятора уровня от значения  $D_{\max} = f(H_{\max} = H + \Delta H)$  до  $D_{\min} = f(H_{\min} = H - \Delta H)$ . Отметим, что в идеальном случае  $\Delta H = \Delta S$ .

2. Абсолютная погрешность дозы в большом черпачке определяется площадью свободной поверхности жидкости в нем и величиной  $\Delta H$ :  $\Delta D = F_{\text{чб}} \cdot \Delta H$ .  $F_{\text{чб}}$  – площадь свободной поверхности большого черпачка.

3. Относительная погрешность дозы в большом черпачке определяется, кроме  $\Delta D$ , номинальным объемом жидкости, зачерпываемым большим черпачком из общей ванны:  $\varepsilon_D = \frac{\Delta D}{D}$ .

Номинальный объем  $D$  определяется геометрическими характеристиками (размерами) черпачка, а также установкой регулятора уровня на номинальную высоту зеркала в общей ванне  $H$ , обеспечивающую номинальную дозу  $D$ .

4. Абсолютная погрешность дозы большого черпачка формирует при ее растекании по зеркалу жидкости в малой ванне абсолютную погрешность высоты уровня  $\Delta h$  в ней, которая и определяет конечную точность дозирования:  $\Delta h = \frac{\Delta D}{F_{\text{зм}}} = \frac{F_{\text{чб}}}{F_{\text{зм}}} \Delta H$ ;  $\Delta H = \Delta S$

Так как  $F_{\text{чб}} \ll F_{\text{зм}}$ , то  $\Delta h \ll \Delta H$ , где  $F_{\text{зм}}$  – площадь зеркала свободной поверхности жидкости в малой ванне.

Таким образом, двухэтапное дозирование является способом, позволяющим многократно повысить точность процесса окончательного дозирования.

При этом является очевидным вывод о необходимости увеличения поверхности зеркала жидкости малой ванны и уменьшения площади свободной поверхности большого и малого черпачков.

5. Абсолютная погрешность дозы малого черпачка определяется колебаниями высоты уровня  $\Delta h$  ( $\Delta d = F_{\text{чм}} \cdot \Delta h$ ) и может быть уменьшена за счет уменьшения величин  $\Delta D$  и  $D$ . Таким образом  $D$  следует уменьшать, то есть величины  $D$  и  $d$  конструктивно должны быть близкими. Здесь  $F_{\text{чм}}$  – площадь зеркала свободной поверхности в малом черпачке.

6. Относительная погрешность дозы в малом черпачке определяется, кроме  $\Delta d$ , номинальным объемом жидкости, зачерпываемой малым черпачком.

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d}$$

Номинальный объем  $d$  определяется геометрическими характеристиками (размерами) черпачка, а также установкой высоты зеркала малой ванны на номинальный уровень  $h$ , соответствующий номинальной дозе  $d$ , посредством изменения угла наклона (положения) малой ванны в пространстве относительно горизонтальной плоскости регулировочным винтом.

Так же, как и в п.4, совершенно очевидна целесообразность уменьшения площади свободной поверхности малого черпачка и максимизации его номинального объема.

7. Частота вращения  $\omega_v$  вала, несущего диски с большими и малыми черпачками определяет, с одной стороны, производительность станции, а с другой – влияет на частоту и размах колебаний уровней  $\Delta H$  и  $\Delta h$ , то есть на точность дозирования. Для стабилизации точности процесса  $\omega_v$  следует повышать.

8. Сдвиг начальных фаз углового расположения малого и большого черпачков на малом и большом дисках относительно друг друга определяет, в какой момент цикла наполнения малой ванны осуществляется зачерпывание дозы малым черпачком, тем самым определяет величину абсолютной погрешности дозирования.

С целью минимизации ошибки дозы необходимо обеспечить такой сдвиг фаз, чтобы к моменту окончания процесса зачерпывания дозы малым черпачком фаза зачерпывания дозы одним из больших черпачков завершилась, его трубчатое колено находилось в строго определенном положении, при котором уже начался процесс слива дозы большим черпачком в малую ванну, то есть должен быть обеспечен максимальный промежуток времени для слива излишков жидкости из малой ванны вровень с ее краем, что позволит в большей мере обеспечить величину и стабильность выставленного винтом номинального уровня зеркала свободной поверхности, сводя к нулю  $\Delta h$  в момент окончания формирования дозируемого объема  $d$ .

1. Как логически следует из п.8, для приведения  $\Delta h$  к нулю как можно в более короткое время, необходимо целенаправленно увеличивать ширину малой ванны «В».
2. Требуется, наконец, отметить, что на точность процесса формирования конечной дозы  $d$  влияет площадь живого сечения гидросоединительного отверстия в перегородке малой ванны, которая определяет скорость подъема уровня жидкости в зоне зачерпывания малым черпачком. Величину этой площади необходимо по возможности увеличивать.
3. Производительность дозатора определяется соотношением:

$$Q = \frac{nd}{2\pi} \omega$$

где  $n$  — количество малых черпачков на диске;  $d$  — номинальный объем (доза) малого черпачка;  $\omega$  — угловая скорость вращения малого диска.

Кроме величины производительности соотношение между величинами  $n$ ,  $d$  и  $\omega$  регламентируется требованием обеспечения непрерывности процесса дозирования для равномерного распределения ингредиентов в тестомесильном оборудовании.

Таким образом, за время слива дозы  $d$  малый диск должен повернуться на угол  $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ .

Учитывая, что реологические характеристики дозируемых жидких материалов имеют чрезвычайно высокий разброс, для реально требуемых значений производительности  $(2,5 \div 100) \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}$ , и принятых конструктивно

размерах и количестве черпачков  $n=6$ , выбрана угловая скорость вращения дисков:

$$\omega=0,4 \text{ с}^{-1}.$$

Для теоретической оценки параметров точности дозирования жидких продуктов черпачковым дозатором, записывая уравнение неразрывности для потока из малой ванны в черпачковый дозатор, после линеаризации относительно колебаний высоты уровня  $\Delta h$ , получаем дифференциальное уравнение движения зеркала жидкости в малой ванне:

$$\frac{d(\Delta h)}{dt} = \frac{Q_{II} - Q_P - v_{сл} B \Delta h}{F_{ЗМ}} \quad (1)$$

где  $v_{сл}$  – скорость сливающейся избыточной жидкой среды из малой ванны в общую.

Производительность по приходящей из большого черпака жидкости:

$$Q_n = \frac{n \cdot D}{2\pi} \cdot \omega.$$

Производительность по расходуемой малым черпаком жидкой среде:

$$Q_p = \frac{n \cdot d}{2\pi} \cdot \omega.$$

Из уравнения Бернулли скорость слива найдем по соотношению:

$$v_{\text{н\ddot{e}}} = \xi \sqrt{2g\Delta h},$$

где  $\xi$  — коэффициент скорости истечения.

Как было показано выше (п.4.)

$$\Delta h = \frac{F_{ч.б.}}{F_{З.М.}} \cdot \Delta S, \text{ тогда } v_{сл} = \xi \sqrt{\frac{2gF_{ч.б.}\Delta S}{F_{З.М.}}}.$$

Дифференциальное уравнение движения зеркала жидкости в малой ванне примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta h)}{dt} &= \frac{n \cdot \omega(D-d)}{2\pi F_{З.М.}} - \frac{\xi \sqrt{\frac{2gF_{ч.б.}\Delta S}{F_{З.М.}}} \cdot B \cdot \frac{F_{ч.б.}}{F_{З.М.}} \cdot \Delta S}{F_{З.М.}} \text{ или} \\ \frac{d(\Delta h)}{dt} &= \frac{n \cdot \omega(D-d)}{2\pi F_{З.М.}} - \frac{\xi \sqrt{2g} \cdot B \cdot \left(\frac{F_{ч.б.}}{F_{З.М.}} \cdot \Delta S\right)^{3/2}}{F_{З.М.}} \end{aligned} \quad (2)$$

В общем случае уравнение (1) представляет собой математическое описание процесса регулирования уровня неполным притоком.

Его решение рассматриваем для двух стадий:

Первая стадия — подъем зеркала жидкости, которая наблюдается в процессе наполнения малой ванны большим черпаком.

$$\frac{d(\Delta h)}{dt} = \frac{n \cdot \omega \cdot D}{2\pi F_{\varphi,i}} - \frac{\xi \sqrt{2g} \cdot B \cdot \left(\frac{F_{\varphi,i}}{F_{\varphi,i}} \cdot \Delta S\right)^{3/2}}{F_{\varphi,i}} \quad (3)$$

Решение (3) дает:

$$t_n = \frac{\frac{F_{ч.б.}}{F_{з.м.}} \cdot \Delta S}{a_1}; \quad a_1 = \frac{Q_{п1} - Q_{р1}}{F_{з.м.}}; \quad \Delta h_{п} = a_1 \cdot t,$$

где:  $t_n$  — время подъема зеркала жидкости в малой ванне от исходного нулевого положения до высоты  $\Delta h_{п} = \frac{F_{ч.б.}}{F_{з.м.}} \cdot \Delta S$ ;

$Q_{п1} = \frac{n\omega D}{2\pi}$  — расход приходящей жидкости на стадии подъема;

$Q_{р1} = \xi \sqrt{2g} \cdot B \left( \frac{F_{ч.б.}}{F_{з.м.}} \cdot \Delta S \right)^{3/2}$  — расход излишней жидкости, сливающейся

через край малой ванны в общую большую ванну;

$a_1$  — скорость подъема зеркала жидкости.

Вторая стадия — опускание зеркала жидкости, которая наблюдается в процессе зачерпывания жидкого ингредиента из малой ванны малым черпаком и одновременного слива излишков через край малой ванны.

Решение (2) дает:

$$t_{on} = -\frac{\frac{F_{ч.б.}}{F_{з.м.}} \cdot \Delta S}{a_2}; \quad a_2 = \frac{Q_{р2} - Q_{п1}}{F_{з.м.}}; \quad \Delta h_{on} = a_2 \cdot t,$$

где  $t_{on}$  — время опускания зеркала жидкости в малой ванне от высоты  $\Delta d_n = \frac{F_{ч.б.}}{F_{з.м.}} \cdot \Delta S$  до нулевого исходного уровня;

$Q_{р2} = \frac{-n\omega D}{2\pi}$  — расход, зачерпываемый малым черпаком жидкости из малой ванны на стадии опускания зеркала жидкой среды;

$a_2$  — скорость опускания зеркала жидкости в малой ванне.

Максимальное значение колебаний, то есть погрешности дозы, составляет следующее выражение:

$$\Delta d = F_{ч.м.} \cdot \Delta h = F_{ч.м.} \cdot \frac{F_{ч.б.}}{F_{з.м.}} \cdot \Delta S \quad (4)$$

Анализ этого детерминированного статистического уравнения (4) показывает, что для минимизации погрешности дозирования конструктивными методами, следует уменьшать площади зеркал поверхности жидкости в большом и малом черпачках, увеличивать площадь зеркала жидкости в малой ванне и уменьшать ширину зоны чувствительности поплавкового регулятора.

Из анализа дифференциального уравнения динамики колебаний зеркала жидкости в малой ванне вытекает, что для уменьшения величины  $\Delta h$  необходимо по возможности сближать значения  $D$  и  $d$ , а так же увеличивать ширину “В” малой ванны и уменьшать произведения  $(n \cdot \omega)$ .

Для анализа влияния на точность дозирования фазово-частотных характеристик дозирующей станции требуется записать уравнение точности в стохастической форме.

Предварительно вернемся к дифференциальному уравнению (1), решим его относительно  $\Delta h$ :

$$F_{з.м.} \cdot \int_{h_1}^{h_2} \frac{d(\Delta h)}{Q_{II} - Q_P - v_{сн} \cdot B(\Delta h)} = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

Учитывая зависимость  $v_{сн} = \xi \sqrt{2g\Delta h}$ , запишем:

$$F_{з.м.} \cdot \int_{h_1}^{h_2} \frac{d(\Delta h)}{Q_{II} - Q_P - \xi \sqrt{2g} \cdot B(\Delta h)^{3/2}} = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

Вычислим интеграл  $J = \int \frac{d(\Delta h)}{Q_{II} - Q_P - \xi \sqrt{2g} \cdot B(\Delta h)}$

Тогда:

$$\frac{1}{F_{з.м.}} \cdot t = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2g\xi^2 B^2}{(Q_{II} - Q_P)^2}} \cdot \sqrt{\Delta h} + \frac{1}{4\sqrt{2g\xi B \sqrt{\Delta h}}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2g\xi B}}{(Q_{II} - Q_P)}}$$

Решая теперь полученное уравнение относительно  $t$  при заданной величине колебаний уровня в малой ванне  $\Delta h$  найдем время подъема или опускания зеркала жидкости или, при заданном времени дозирования, определим размах колебаний уровня, то есть сможем оценить точность дозирования.

Оценка показывает, что при диапазоне чувствительности регулятора уровня  $\Delta S \approx 8 \cdot 10^{-3}$  м,  $\Delta h$  составляет величину около  $1 \cdot 10^{-3}$  м и время подъема или опускания уровня зеркала жидкости в малой ванне составит величину  $t \approx 2,5$  с. Таким образом, цикличность следования малых черпаков должна быть по углу их установки  $Y = \omega \cdot t \approx 0,4 \cdot 2,5 = 1$  рад  $\approx 60^\circ$ .

Количество черпаков определим из соотношения  $n = \frac{2\pi}{Y} \approx 6$  штук.

При выбранном количестве черпаков может быть решена обратная задача.

Определим угол циклической установки черпаков  $Y = \frac{2\pi}{n}$ , а теперь при известной скорости углового вращения малого диска можем определить время цикла  $t_y = \frac{Y}{\omega}$ , а по времени  $t_y$ , решая уравнение (5) относительно  $\Delta h$  находим точность поддержания уровня в малой ванне. Другим вариантом является нахождение требуемой угловой скорости при заданной точности  $\Delta h$ . Действительно, задаваясь величиной  $\Delta h$ , из (5) находим время цикла  $t_y$  и теперь вычисляем  $\omega = \frac{Y}{t_y}$ .

Возвращаясь к стохастической задаче, отметим, что ошибка дозы в координатах текущего времени носит вероятностный характер, а отклонение расхода от номинального значения во временном диапазоне распределена с амплитудой  $2 \Delta Q$ .

Функция плотности распределения для  $\Delta Q$ :

$$Y = \frac{1}{2\Delta Q}.$$

Математическое ожидание:

$$M(\Delta Q) = \frac{\Delta Q_{\max} + \Delta Q_{\min}}{2}.$$

Дисперсия:

$$D(\Delta Q) = \frac{(\Delta Q_{\max} + \Delta Q_{\min})^2}{12} = \frac{(2\Delta Q)^2}{12} = \frac{\Delta Q^2}{3}.$$

Среднее квадратичное отклонение составит величину:

$$\sigma_{\Delta Q} = \sqrt{D(\Delta Q)} = \frac{\Delta Q}{\sqrt{3}}.$$

Известное выражение для корреляционной функции  $R(\tau)$  на обеих стадиях перемещения зеркала свободной поверхности жидкости в малой ванне после аппроксимации экспоненциально-гармонической функцией, записывается:

$$R_{\Delta Q}(\tau) = D(\Delta Q) \cdot e^{-\beta\tau} \cos \nu \cdot \tau$$

где:

$$D(\Delta Q) = \frac{\Delta Q^2}{3}; \quad \Delta Q = \frac{n\omega}{2\pi} \cdot \Delta d; \quad \Delta d = \frac{F_{\text{ч.м.}} \cdot F_{\text{ч.б.}}}{F_{\text{з.м.}}} \Delta S$$

ПОЭТОМУ:

$$D(\Delta Q) = \frac{n^2 \omega^2}{12\pi^2} \frac{F_{\text{ч.м.}}^2 \cdot F_{\text{ч.б.}}^2}{F_{\text{з.м.}}^2} \Delta S^2,$$

где  $\beta$ ,  $\nu$  – параметры затухания.

При такой записи корреляционной функции спектральная плотность для  $\Delta Q$  преобразуется к форме:

$$S_{\Delta Q \Delta Q}(\nu) = 2D_{\Delta Q} \left[ \frac{\beta_i}{\beta_i^2 + (\nu + \nu_i)^2} + \frac{\beta_i}{\beta_i^2 + (\nu - \nu_i)^2} \right]$$

Средняя квадратичная ошибка дозы в этом случае для обеих стадий перемещения зеркала жидкости в малой ванне имеет вид:

$$\sigma_{\Delta d} = \frac{n\omega}{2\pi} \frac{F_{\text{ч.м.}} \cdot F_{\text{ч.б.}}}{F_{\text{з.м.}} \cdot \sqrt{3}} \cdot \Delta S^2 \cdot \Psi(\beta_i, \nu_i, \Delta t_i)$$

Полученные соотношения позволяют при заданных конструктивных параметрах дозирующей станции определять ее соответствие предъявляемым требованиям, и наоборот – по заданной в вероятностной форме точности дозирования, рассчитывать конструктивные параметры дозатора:

$$\beta_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_1}{D(\Delta Q)\Delta S} = 18 \frac{\left[ \frac{n\omega D}{2\pi} - \sqrt{2g} \cdot \xi \cdot B \cdot \left( \frac{F_{\text{ч.б.}}}{F_{\text{з.м.}}} \cdot \Delta S \right)^{3/2} \right]}{n^2 \cdot \omega^2 \cdot F_{\text{ч.м.}}^2 \cdot F_{\text{ч.б.}}^2 \cdot \Delta S^3} \cdot \pi^2 F_{\text{з.м.}}^2$$



$$\omega_n = 9\pi^3 F_{3.M}^2 \cdot \frac{\left[ \frac{n\omega D}{2\pi} - \sqrt{2g} \cdot \xi \cdot B \cdot \left( \frac{F_{4.б.} \cdot \Delta S}{F_{3.M}} \right)^{3/2} \right]}{n^2 \cdot \omega^2 \cdot F_{ч.м.}^2 \cdot F_{ч.б.}^2 \cdot \Delta S^3}$$

$$\beta_{on} = 18 \frac{\left[ -\frac{n\omega d}{2\pi} - \sqrt{2g} \cdot \xi \cdot B \cdot \left( \frac{F_{4.б.} \cdot \Delta S}{F_{3.M}} \right)^{3/2} \right]}{n^2 \cdot \omega^2 \cdot F_{ч.м.}^2 \cdot F_{ч.б.}^2 \cdot \Delta S^3} \cdot \pi^2 F_{3.M}^2$$

$$\omega_{on} = 9\pi^3 F_{3.M}^2 \cdot \frac{\left[ -\frac{n\omega d}{2\pi} - \sqrt{2g} \cdot \xi \cdot B \cdot \left( \frac{F_{4.б.} \cdot \Delta S}{F_{3.M}} \right)^{3/2} \right]}{n^2 \cdot \omega^2 \cdot F_{ч.м.}^2 \cdot F_{ч.б.}^2 \cdot \Delta S^3}$$

На основании рассмотренных теоретических результатов была выполнена и прошла экспериментальные и эксплуатационные испытания дозировочная станция непрерывного действия Б8-ХДН.

Как следует из результатов испытаний, с доверительной вероятностью 95% все результаты попадают в поле допуска 1,5 ÷ 2,5% относительной погрешности для жидких материалов близких к Ньютоновским и в поле допуска 3 ÷ 5% относительной погрешности для суспензий, закваски, мочки и других сугубо Неньютоновских жидкостей .