УДК 637.5

Решение задачи нагрева колбасных изделий в электромагнитном поле сверхвысоких частот

Д.т.н. Б.А. Вороненко, аспирант В.М. Савватеев

Поставлена и решена задача нагрева колбасных изделий в электромагнитном поле сверхвысоких частот в виде аналитического решения краевой задачи совместного тепломассопереноса для тела основной геометрической формы – неограниченного цилиндра – при условиях его влагоизоляции и постоянного теплового потока на границе.

Ключевые слова: колбасы, сверхвысокие частоты, нагрев, аналитическое решение.

В работе [1] на основе физических предпосылок были получены адекватные экспериментальным данным формулы для определения глубин проникновения напряженности и удельной мощности электромагнитного поля сверхвысоких частот внутрь полупроводников и реальных диэлектриков. Было показано, что распределение энергии электромагнитного поля сверхвысоких частот в различных пищевых продуктах (например, в таких, как говядина, свинина, баранина, хек, треска, картофель, яблоки и др.) может быть описано параболическим законом, что позволило решить краевую задачу нагрева указанных тел в этом поле.

В настоящей работе решается задача совместного тепло- и массопереноса в колбасных изделиях при СВЧ-нагреве.

Математически искомая задача может быть сформулирована следующим образом.

Требуется решить систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих взаимосвязанный тепломассоперенос [2] в капиллярно-пористом теле цилиндрической формы бесконечной длины, с учетом непрерывно действующего источника теплоты внутри тела

$$\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau} = a_q \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial r}\right) + \frac{\varepsilon\rho}{c_q}\frac{\partial u(r,\tau)}{\partial \tau} + \frac{w_0}{c_q\gamma}(1-br^2)\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(r,\tau)}{\partial \tau} = a_m \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r,\tau)}{\partial r}\right) + a_m\delta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial r}\right) \tag{2}$$

$(t > 0,\ \ 0 < r < r)$

при следующих краевых условиях:

$$t(r,0) = f(r)\,; \tag{3}$$

$$u(r,0) = \varphi(r)\,; \tag{4}$$

$$\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial r} = \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial r} = 0;\ t(0,\tau) < \infty;\ u(0,\tau) < \infty\,; \tag{5}$$

$$\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial r}+\delta\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial r}=0; \qquad (6)$$

$$-\lambda_q\frac{\partial t(R,\tau)}{\partial r}+q(\tau)=0 \qquad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$t(r,\tau)$ – температура тела (колбасного изделия);
$u(r,\tau)$ – влагосодержание тела;
r – координата; R – радиус поперечного сечения цилиндра;
τ – время;
a_q – коэффициент температуропроводности;
ε – коэффициент фазового превращения жидкости в пар или пара в жидкость ($0 < \varepsilon < 1$; если $\varepsilon = 0$, то перенос влаги происходит в виде жидкости; если $\varepsilon = 1$, то перенос влаги происходит в виде пара);
ρ – удельная теплота фазового превращения;
c_q – удельная теплоемкость материала;
γ – плотность тела;
a_m – коэффициент потенциало-(влаго-) проводности;
δ – термоградиентный коэффициент;
λ_q – коэффициент теплопроводности тела.

СВЧ–энергия проникает в материал лишь на определенную глубину, вследствие чего внутренние слои тела нагреваются путем теплопроводности при непрерывно действующем источнике теплоты $w(r) = w_0(1–br^2)$, где w_0 – мощность источника на поверхности тела, $b = \frac{1}{\lambda_{пр}^2}$, λ_r – предельная глубина проникновения СВЧ- энергии.

Уравнение (1) – уравнение теплопереноса; уравнение (2) – уравнение влагопереноса.

Равенства (3) и (4) описывают распределение полей температуры и влагосодержания в момент начала процесса нагрева; принимаем начальное распределение температуры $f(r)$ и влагосодержания $\varphi(r)$равномерными, т.е. $f(r)= t_0 = \text{const}$, $f(r)= u_0 = \text{const}$.

Уравнения и неравенства (5) – условия симметрии и физической ограниченности искомых величин (температуры и влагосодержания), (6) – условие влагоизоляции.

Уравнение (7) – граничное условие второго рода; плотность теплового потока примем постоянным:

$$q(\tau) = q = \text{const}.$$

Аналитическое решение краевой задачи (1) – (7), то есть распределение полей температуры и влагосодержания, получено методом интегрального преобразования Лапласа. Приведем ввиду громоздкости решение только для температуры (в безразмерной форме), что является основным в данной задаче:

$$T(X,Fo)=\Phi_1+\frac{2}{\nu_2-N\nu_1}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_m J_0(\nu_1\mu_m X)\cdot\exp(-\mu_m{}^2 Fo)\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n J_0(\nu_2\mu_n X)\exp(-\mu_n{}^2 Fo)+\frac{1}{64}\Phi_2\right) \qquad (8)$$

где

$T\,(X, Fo) = \dfrac{t(r,\tau)-t_0}{t_0}$ - безразмерная температура;

$X = \dfrac{r}{R}$ - безразмерная координата;

$B = bR^2$;

$Fo = \dfrac{a_q\tau}{R^2}$ - число Фурье;

$L_u=\dfrac{a_m}{a_q}$ - число Лыкова;

$Ko = \dfrac{\rho u_0}{c_q t_0}$ - число Коссовича;

$Po = \dfrac{w_0 R^2}{\lambda_q t_0}$ - число Померанцева;

$Ki=\dfrac{qR}{\lambda_q t_0}$ - число Кирпичева;

$Pn = \dfrac{\delta t_0}{u_0}$ - число Поснова;

$Fe = \varepsilon KoPn$ - число Федорова;

μ_m – последовательные положительные корни характеристического уравнения

$J_1(\nu_1\mu) = 0$; (9)

μ_n – последовательные положительные корни характеристического уравнения

$J_1(\nu_2\mu) = 0$; (10)

$J_0(z)$ и $J_1(z)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно; корни (нули) уравнений (9) и (10) можно найти в [3] и [4];

$\Phi_1=FoPo\,(1-BX^2-2B(FeLu+1)Fo);$

$$\Phi_2=(a_1\nu_1^3-a_2\nu_2^3)X^4+16\left(\frac{1}{\nu_1^2}\left(Fo-\frac{KiN}{a_1}-\frac{\nu_1^2}{8}\right)-\frac{1}{\nu_2^2}\left(Fo-\frac{Ki}{a_2}+\frac{\nu_2^2}{8}\right)\right)X^2+$$
$$+8Ki\left(\frac{N}{a_1\nu_1^2}-\frac{1}{a_2\nu_2^2}\right)-8Fo\left(\frac{1}{\nu_1^2}\left(\frac{8KiN}{a_1\nu_1^2}+1\right)-\frac{1}{\nu_2^2}\left(\frac{8Ki}{a_2\nu_2^2}+1\right)\right)+32Fo^2\left(\frac{1}{\nu_1^4}-\frac{1}{\nu_2^4}\right);$$

$a_1=2BPo\,(Fe\nu_2-N);\ a_2=2BPo\,(Fe\nu_1-1);$

$\nu_1{}^2= (\alpha+(-1)^i\sqrt{\alpha^2-\dfrac{4}{Lu}}\ ),\quad (i=1,2),$

$\alpha=1+Fe+\frac{1}{Lu}\,;$

$N=\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\cdot\dfrac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2};$

$$\Phi_m = \frac{2BFePo\nu_2 + (Ki\mu_m^2 - 2BPo)N}{\nu_1\mu_m^4 J_0(\nu_1\mu_m)};$$

$$\Phi_n = \frac{2BFePo\nu_2 + Ki\mu_n^2 - 2BPo}{\nu_2\mu_n^4 J_0(\nu_2\mu_n)}.$$

Выводы

Поставлена и решена задача нагрева колбасных изделий в электромагнитном поле сверхвысоких частот в виде аналитического решения краевой задачи совместного тепломассопереноса для тела основной геометрической формы – неограниченного цилиндра – при условиях его влагоизоляции и постоянного теплового потока на границе.

После экспериментальной проверки, компьютерного исследования, анализа и возможного упрощения полученного аналитического решения разработанная математическая модель может быть рекомендована для инженерных расчетов и может послужить основой для оптимизации тепловой обработки колбасных изделий.

Список литературы

1. Белобородов В.В., Вороненко Б.А. Решение задачи нагрева тел в электромагнитном поле сверхвысоких частот.//Журнал прикладной химии АН СССР, «Наука» – Ленинградское отделение, №10, 1984.– С.2276 – 2282.
2. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. –М. –Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
3. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: «Наука», 1968. – 344 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.