УДК 631

Аналитическое решение краевой задачи теплопроводности в связи с процессом охлаждения крема кондитерского в холодильной камере

Бараненко А.В., Вороненко Б.А., Поляков С.В., Пеленко В.В.

Поставлена и решена краевая задача охлаждения крема кондитерского, упакованного в тару, в холодильной камере. Получено аналитическое решение поставленной краевой задачи в виде распределения температур в продукте и оболочке (таре). Это решение определяет зависимость температурных полей от теплофизических характеристик продукта и оболочки, их геометрической формы и размеров, теплоотводящей среды и времени процесса охлаждения.

Ключевые слова: крем кондитерский, аналитическое решение, краевая задача, уравнение теплопроводности, тара, холодильная камера.

Одним из этапов технологического процесса производства крема кондитерского является охлаждение упакованного в транспортную тару продукта в холодильной камере для его созревания в течение суток от начальной температуры примерно 18^{0}С до конечной, равной 3-5^{0}С. Длительность охлаждения зависит от теплопроводных свойств продукта и упаковки, их геометрической формы и размеров, от температуры теплоотводящей среды. Все эти параметры определяют качество конечного(готового) продукта [1].

Тара (оболочка), которую полностью (без зазоров) заполняет кондитерский крем, представляет собою параллелепипед, т.е. пластину конечных размеров $2l_1 \times 2l_2 \times 2l_3$.

Таким образом, имеем слоистую систему, состоящую из трех тел: тара-продукт-тара. Математическое описание процесса охлаждения крема кондитерского заключается в формировании и решении системы уравнений теплопроводности:

$$\frac{\partial t_1(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} = a_1 \nabla^2 t_1(x,y,z,\tau) \quad (\tau > 0,\ 0 < x < l_i, i = 1, 2, 3); \tag{1}$$

$$\frac{\partial t_2(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} = a_2 \nabla^2 t_2(x,y,z,\tau) \quad (\tau > 0,\ l_1 < x < R_i, i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

при следующих краевых условиях:

$$t_1(x,y,z,o) = t_2(x,y,z,0) = t_o = const; \tag{3}$$

$$t_1(l_1,y,z,\tau) = t_2(l_1,y,z,\tau); \tag{4}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1(l_1,y,z,\tau)}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial t_2(l_1,y,z,\tau)}{\partial x}; \tag{5}$$

$$t_1(x,l_2,z,\tau) = t_2(x,l_2,z,\tau); \tag{6}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1(x,l_2,z,\tau)}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial t_2(x,l_2,z,\tau)}{\partial y}; \tag{7}$$

$$t_1(x,y,l_3,\tau)=t_2(x,y,l_3,\tau); \tag{8}$$

$$-\lambda_1\frac{\partial t_1(x,y,l_3,\tau)}{\partial z}=-\lambda_2\frac{\partial t_2(x,y,l_3,\tau)}{\partial z}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial t_1(0,y,z,\tau)}{\partial x}=\frac{\partial t_1(x,0,z,\tau)}{\partial y}=\frac{\partial t_1(x,y,0,\tau)}{\partial z}=0; \tag{10}$$

$$t_2(R_1,y,z,\tau)=t_2(x,R_2,z,\tau)=t_2(x,y,R_3,\tau)=t_c=const \tag{11}$$

Равенства (3) - начальные условия, описывающие равномерное распределение температуры по объему тела (продукта) и тары: не снижая общности постановки задачи, считаем, что в момент загрузки тары с продуктом (начало процесса охлаждения) они имеют одинаковую температуру.

Системы уравнений (4)-(5), (6)-(7), (8)-(9)-граничные условия четвертого рода, задающие равенства температур и тепловых потоков на границах продукта и оболочки при их совершенном термическом контакте.

(10) - условия симметрии.

Равенства (11) - граничные условия первого рода, задающие постоянство температуры на границе тары с окружающей средой холодильной камеры.

Решение краевой задачи (1)-(11) заключается в нахождении полей температур, т.е. распределения температуры $t_i(x,y,z,0)$ в продукте и таре в любой момент времени процесса охлаждения.

Исследованию проблемы теплопереноса в слоистых средах посвящено значительное количество работ [2-10]. В частности, в [2,5,6] показано, что для пластины конечных размеров $2l_1\times 2l_2\times 2l_3$, начальная температура которой везде одинакова и равна t_0, все поверхности которой мгновенно охлаждаются до некоторой температуры $t_c<t_0$, которая поддерживается постоянной на протяжении всего процесса охлаждения, решение может быть представлено как произведение решений для трех неограниченных пластин, толщина которых соответственно равна $2l_1$, $2l_2$, $2l_3$, т.е.

$$\frac{t_1(x,y,z,\tau)-t_c}{t_0-t_c}=\frac{t_1(x,\tau)-t_c}{t_0-t_c}\cdot\frac{t_1(y,\tau)-t_c}{t_0-t_c}\cdot\frac{t_1(z,\tau)-t_c}{t_0-t_c} \tag{12}$$

При этом температуры $t_1(x,\tau)$, $t_1(y,\tau)$, $t_1(z,\tau)$ определяются решением дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial t_1(x,\tau)}{\partial\tau}=a_1\frac{\partial^2 t_1(x,\tau)}{\partial x^2};\ \frac{\partial t_1(y,\tau)}{\partial\tau}=a_1\frac{\partial^2 t_1(y,\tau)}{\partial x^2};\ \frac{\partial t_1(z,\tau)}{\partial\tau}=a_1\frac{\partial^2 t_1(z,\tau)}{\partial x^2}$$

при соответствующих краевых условиях первого рода.

В нашем случае задача является сопряженной с задачей охлаждения оболочки и усложненной граничными условиями четвертого рода. С учетом этого окончательное решение краевой задачи (1)-(11) методами математической физики получено в следующем виде:

$$\theta_1=\frac{t_1(x,y,z,\tau)-t_c}{t_0-t_c}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}_n\mathrm{A}_m\mathrm{A}_k\cos(\mu_n X)\cos(\mu_m Y)\cos(\mu_k Z)\cdot\exp\left[-\left(\mu_n^2 k_{l_1}^2+\mu_m^2 k_{l_2}^2+\mu_k^2 k_{l_3}^2\right)Fo\right]; \tag{13}$$

$$\theta_2 = \frac{t_2(x,y,z,\tau) - t_c}{t_0 - t_c} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_n \mathrm{A}_m \mathrm{A}_k \; c_n c_m c_k \cdot \exp\left[-\left(\mu_n^2 k_{l_1}^2 + \mu_m^2 k_{l_2}^2 + \mu_k^2 k_{l_3}^2\right) Fo\right], \qquad (14)$$

где:

μ_n, μ_m, μ_k – последовательные положительные корни соответствующих уравнений: $k_\varepsilon tg\mu\, tg\left(\mu k_{l_s}\sqrt{k_a}\right) = 1,$ где $s=1$ - соответствует n (направление x), $s=2$ - m (направление y), $s=3$ – k (направление z);

$\mathrm{A}_s = \frac{2}{\mu_s \varphi_s}$ - начальная тепловая амплитуда;

$$\varphi_s = \left(1 + k_\varepsilon k_{l_s}\sqrt{k_a}\right)\sin\mu_s \cos\left(\mu_s k_{l_s}\sqrt{k_a}\right) + k_\varepsilon\left(1 + k_\varepsilon^{-1} k_{l_s}\sqrt{k_a}\right)\cos\mu_s \sin\left(\mu_3 k_{l_s}\sqrt{k_a}\right);$$

$$c_n = \cos\mu_n \cos(\mu_n\sqrt{k_a}(X-1)) - k_\varepsilon \sin\mu_n \sin(\mu_n\sqrt{k_a}(X-1));$$

$$c_m = \cos\mu_m \cos(\mu_m\sqrt{k_a}(Y-1)) - k_\varepsilon \sin\mu_m \sin(\mu_m\sqrt{k_a}(Y-1));$$

$$c_k = \cos\mu_k \cos(\mu_k\sqrt{k_a}(Z-1)) - k_\varepsilon \sin\mu_k \sin(\mu_k\sqrt{k_a}(X-1)).$$

Выводы

1. Поставлена краевая задача процесса охлаждения крема кондитерского, упакованного в тару, в холодильной камере.
2. Получено аналитическое решение поставленной краевой задачи в виде распределения температур в продукте и оболочке (таре). Это решение определяет зависимость температурных полей от теплофизических характеристик продукта и оболочки, их геометрической формы и размеров, температуры теплоотводящей среды и времени процесса охлаждения.
3. Из найденного аналитического решения могут быть определены теплопотери в процессе охлаждения путем нахождения средней температуры по объему параллелепипеда, а также интенсивность (темп) охлаждения.

Обозначения

$t_i(x,y,z,\tau)$	— температура;
t_0	— начальная температура;
t_c	— температура среды холодильной камеры;
x,y,z	— текущие координаты;
$2l_1, 2l_2, 2l_3$	— размеры продукта по осям координат;
$R_1 - l_1 = R_2 - l_2 = R_3 - l_3 = d$	— толщина оболочки (тары);
τ	— время;
i	— индекс;
$i=1$	— относится к первой среде – продукту;
$i=2$	— относится ко второй среде – оболочке;
a_i	— коэффициент температуропроводности;
λ_i	— коэффициент теплопроводности;
ρ_i	— плотность;
c_i	— удельная теплоемкость;
$k_a = \dfrac{a_1}{a_2}$	— число (критерий), характеризующее инерционные свойства первой среды по отношению ко второй;
$k_\lambda = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$	— число (критерий), характеризующее относительную проводимость среды;
$k_\varepsilon = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}} = \sqrt{\dfrac{\lambda_1 c_1 \rho_1}{\lambda_2 c_2 \rho_2}} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \dfrac{k_\lambda}{\sqrt{k_a}}$	— критерий, характеризующий активность первой среды по отношению ко второй;
$\varepsilon = \sqrt{\lambda c \rho} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{a}}$	— термический коэффициент, коэффициент проникновения или коэффициент тепловой активности;
$X = \dfrac{x}{l_1}, Y = \dfrac{y}{l_2}, Z = \dfrac{z}{l_3}$	— безразмерные координаты;
$Fo = \dfrac{a_1 \tau}{l^2}$	— число Фурье;
$k_{l_s} = \dfrac{l}{l_s}$ $(s = 1,2,3)$,	
l	— обобщенный размер: $\dfrac{1}{l^2} = \dfrac{1}{l_1^2} + \dfrac{1}{l_2^2} + \dfrac{1}{l_3^2}$;
$d = R_s - l_s$	— толщина оболочки;
$\Theta_i = \Theta_i(X,Y,Z,Fo) = \dfrac{t_i(x,y,z,\tau) - t_c}{t_o - t_c}$	— относительная избыточная температура.

Список литературы

1. Гуляев В.А., Крысин А.Г., Цуранов О.А. О связи параметров охлаждения продуктов в аппаратах интенсивного охлаждения // Сб.науч.трудов Санкт-Петербургского торгово-экономического института «Актуальные проблемы совершенствования торгово-технологического оборудования». –СПб, 2007. – С.4-9.
2. Смирнов М.С. Температурное поле в трехслойной стенке при граничных условиях четвертого рода. //Тепло- и массообмен в капиллярно-пористых телах. –М.-Л.: Госэнергоиздат, 1957, -С.17-20.
3. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. М.: Госэнергоиздат, 1963. –535 с.
4. Алямовский И.Г. Температурное поле ограниченного тела, имеющего форму параллелепипеда, с непрерывно действующим источником тепла. // Тепло- и массоперенос. –Минск: Издат.АН БССР, т.V «Методика расчета и моделирования процессов тепло- и массообмена», 1963. –С.14-18.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел.-М.: Наука, 1964. – 484 с.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. –М.: Высшая школа, 1967. –600с.
7. Егерев В.К. Диффузионная кинетика в неподвижных средах. –М: Наука, 1970. –239 с.
8. Цой П.В. Методы решения отдельных задач тепломасоопереноса. –М.: Энергия, 1971. –382 с.
9. Цой П.В. Методы расчета задач тепломассопереноса. –М.: Энергоатомиздат, 1984. –416 с.
10. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высшая школа, 2005. –430 с.