

Математическое описание процессов тепло- и массопереноса в колбасных изделиях при их тепловой обработке

д.т.н. Вороненко Б.А., д.т.н. Пеленко В.В., аспирант Стариков В.В.

Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных и пищевых технологий

Для описания процессов тепло- и массообмена в продукте, представляющим собой дисперсную систему, рассмотрим колбасный батон не как совокупность отдельных дискретных частиц, а как сплошную среду, однородную и изотропную. На основе предпосылок предложена математическая модель совместного тепло-массопереноса тепловой обработки колбасного батона цилиндрической формы.

Ключевые слова: капиллярно-пористые тела, тепловая обработка, тепло-массоперенос, математическая модель, система дифференциальных уравнений, начальные и граничные условия.

Основные способы массопереноса при созревании мясного фарша, сушке, варке, превращении его в готовый продукт, как и у всех пищевых продуктов животного происхождения, — это перенос вещества на молекулярном уровне (молекулярная диффузия) и перенос на макроуровне в результате движения жидкости и пара (конвективный перенос) [1].

Фаршевые мясопродукты относятся к коллоидным капиллярно-пористым телам, так как наряду с развитой системой пор и капилляров они содержат и коллоидные частицы, входящие в каркас стенок.

Удаление влаги из материала связано с преодолением сопротивления со стороны продукта. Сопротивления возникают как при переходе от одного элемента объема тела к другому, так и при изменении состояния влаги в теле, ее формы связи.

Изучение процессов пищевой технологии должно базироваться на комплексном математическом описании целого ряда превращений сырья с использованием современной вычислительной техники. При этом компьютер выступает как средство не только вычисления, но и моделирования возможных технологических ситуаций, предвидеть которые без применения современных подходов практически невозможно. Системный анализ позволяет представить сырье как сложную систему, состоящую из ряда взаимосвязанных элементов, а технологический процесс — как совокупность преобразований этой системы, протекающих на разных, но взаимосвязанных уровнях. Такого рода представления удобны для последующей формализации с использованием ЭВМ, прежде всего в виде кибернетических моделей. Сочетание системного

анализа с аналитическим описанием процесса наиболее плодотворно, так как позволяет в качестве аппроксимирующих зависимостей использовать не случайные полиномиальные функции, а математические зависимости, вытекающие из фундаментальных законов природы, лежащих в основе математического описания тепловых и массообменных процессов [1].

Применительно к технологическим схемам производства мясных продуктов (варено-копченых колбас) отдельный батон можно считать биореактором, в котором последовательно и параллельно протекают гидромеханические, массообменные и тепловые процессы [1]. Для каждого продукта авторы выделяют ряд уровней, на каждом из которых сырье превращается в готовый продукт.

В производстве варено-копченых колбас основными процессами являются гидромеханические, массообменные и тепловые.

Колбасные батоны представляют собой твердообразные системы (частицы), содержащие элементы как исходных компонентов, в основном животных тканей, так и структуру, полученную при измельчении и смешивании компонентов. Эти частицы неоднородны по величине, структуре и физическим свойствам [2]. Поэтому для описания процессов тепло- и массообмена в продукте следовало бы написать дифференциальные уравнения для каждой отдельной частицы, что сделать невозможно. Однако размеры частиц и расстояния между ними ничтожно малы по сравнению с размерами массы материала, подвергаемого термообработке в копильной камере (реакторе), что дает возможность колбасный батон, представляющий собою дисперсную систему, рассматривать не как совокупность отдельных дискретных частиц, а как сплошную среду, однородную и изотропную.

Анализ работы применяемых в промышленности камер Autotherm показал, что основным способом передачи теплоты является конвективно-радиационный. В этом случае, если считать колбасный батон, подвергаемый тепловой обработке в камере, телом, имеющим форму неограниченного цилиндра, условия взаимодействия которого с окружающей средой выражаются граничными условиями второго рода (экспериментально найденными функциональными зависимостями удельных потоков тепла и вещества на поверхности тела от времени), краевую задачу совместного тепломассопереноса (дифференциальные уравнения и условия однозначности) можно сформулировать следующим образом:

требуется решить систему дифференциальных уравнений в частных производных [3]

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_q \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon \rho}{c_q} \frac{\partial u}{\partial \tau}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + a_m \delta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right); \quad (2)$$

$$(0 < \tau < \tau_1; 0 < r < R)$$

при следующих начальных

$$t(r, 0) = f_1(r); \quad (3)$$

$$u(r,0) = f_2(r) \quad (4)$$

и граничных условиях

$$\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial r} = \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial r} = 0; \quad (5)$$

$$t(0,\tau) < \infty; u(0,\tau) < \infty; \quad (6)$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(R,\tau)}{\partial r} + q(\tau) - (1-\varepsilon) \rho q_m(\tau) = 0; \quad (7)$$

$$a_m \gamma_0 \frac{\partial u(R,\tau)}{\partial r} + a_m \gamma_0 \delta \frac{\partial t(R,\tau)}{\partial r} + q_m(\tau) = 0 \quad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$t = (r, \tau)$ – температура, К, °С; $t_o = const$ – частный случай начальной температуры; t_{mc} – максимальная температура среды; $t_{mc} - t_o = \Delta t$;
 $T(X, Fo) = \frac{t(x, \tau) - t_o}{t_{mc} - t_o}$ – безразмерная температура;

$u = (r, \tau)$ – влагосодержание, кг влаги/кг абс. сух. вещества; $u_o = const$ – частный случай начального влагосодержания;
 $\theta(X, Fo) = \frac{u_o - t(x, \tau)}{u_o}$ – безразмерное

влагосодержание; r – текущая координата, м; R – радиус цилиндра, м; $X = r/R$ – безразмерная координата; τ – время, с;

τ_1 – время окончания первого периода термической обработки – прогрева и периода постоянной скорости сушки; $f_1(r)$ и $f_2(r)$ – распределение температуры и влагосодержания в материале соответственно; a_q – коэффициент температуропроводности, м²/с; ε – коэффициент фазового перехода ($0 < \varepsilon < 1$); ρ – удельная теплота испарения, Дж/кг; c_q – удельная теплоемкость материала, Дж/(кг·К); a_m – коэффициент потенциало- (влаго-) проводности м²/с;

δ – термоградиентный коэффициент, 1/К; λ_q – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);

$q(\tau)$ – плотность теплового потока – количество тепла, подводимого к единице площади поверхности твердого тела в единицу времени, Вт/м²; $q_m(\tau)$ – плотность потока массы вещества кг/(м²·с); γ_0 – плотность абсолютно сухого вещества, кг/м³;

(1) – уравнение теплопереноса; (2) – уравнение массо- (влаго-) переноса; равенства (3) и (4) – начальные условия; (5) и (6) – условия симметрии и физической ограниченности температуры и влагосодержания.

Граничное условие (7) является уравнением баланса тепла: подведенное тепло к поверхности тела $\bar{q}(\tau)$ расходуется на испарение жидкости $\rho \bar{q}_m(\tau)$ и на

нагрев тела $\left(-\lambda_q \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial r} \right)$.

Граничное условие (8) – уравнением баланса массы вещества – условие сушки влажных дисперсных сред в данном случае.

Коэффициенты системы уравнений и граничных условий – постоянные (усредненные) величины, различные для различных этапов процесса.

Для определения зависимости потока массы вещества от времени в заводских условиях был поставлен эксперимент по протеканию процесса термической обработки колбасных изделий под действием радиационного нагрева. В результате аналитической обработки была получена следующая зависимость удельного потока массы вещества от времени:

$$q_m(\tau) = k_2 u_0 R \gamma_0 e^{-k_2(\tau)} \quad (9)$$

где k_2 – эмпирическая постоянная – коэффициент сушки, 1/с.

Аналогично была найдена зависимость $q(\tau)$.

Поставленная краевая задача (1) – (8) решена методом последовательного применения конечного интегрального преобразования Ханкеля [3-5] и интегрального преобразования Лапласа [3].

Распределения полей температуры и влагосодержания в безразмерном виде при отмеченных допущениях получены в следующем виде:

$$T(X, Fo) = 2 \left[\int_0^1 XF_1(X) J_0(\mu X) dx + 1 - e^{-Pd_1 Fo} \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n X)}{J_0(\mu_n)} \left\{ \frac{Pd_1}{\mu_n^2 - Pd_1} (e^{-Pd_1 Fo} - e^{-\mu_n^2 Fo}) + \frac{\varepsilon Ko Pd_2 \mu_n^2 \left(\mu_n^2 - \frac{Pd_1}{Lu} \right)}{(\mu_n^2 - Pd_2) \left(\mu_n^2 - \frac{Pd_2}{Lu} \right)} e^{-Pd_2 Fo} + \frac{\varepsilon Ko Pd_2}{Lu - 1} \left(\frac{e^{-\mu_n^2 Lu Fo}}{\mu_n^2 - \frac{Pd_2}{Lu}} - \frac{Lue^{-\mu_n^2 Fo}}{\mu_n^2 - Pd_2} \right) \right\} \quad (10)$$

$$\theta(X, Fo) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{v_2^2 - v_1^2} e^{-Lu \mu_n^2 v_i^2 Fo} \quad (11)$$

где

$$Fo = \frac{a_q \tau}{R^2} \quad \text{критерий гомохронности (число Фурье);} \quad Lu = \frac{a_m}{a_q} \quad \text{критерий}$$

(число Лыкова) взаимосвязи массо- и теплопереноса; $Ko = \frac{r \Delta u}{c_q \Delta t}$ число

$$Pd_1 = \frac{k_1 R^2}{a_q}, Pd_2 = \frac{k_2 R^2}{a_q}$$

Коссовича; - числа Предводителя (теплообменное и массообменное).

$$\gamma_i = PnT_0 + (v_i^2 - 1)\theta_0, \quad \text{где} \quad T_0 = \int_0^1 XF_1(X) J_0(\mu_n X) dx, \quad \theta_0 = \int_0^1 XF_2(X) J_0(\mu_n X) dx$$

$$v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\alpha + (-1)^\alpha \sqrt{\alpha^2 - \frac{4}{Lu}} \right), \quad \text{где} \quad \alpha = 1 + \frac{1}{Lu} + \varepsilon Ko Pn$$

μ_n - последовательные положительные корни уравнения

$$J_1(\mu) = 0 \quad (12)$$

$J_0(z)$ и $J_1(z)$ - функции Бесселя от вещественного аргумента z первого рода и нулевого порядка соответственно.

Литература.

1. Афанасов Э.Э., Николаев Н.С., Рогов И.А. и др. Аналитические методы описания технологических процессов мясной промышленности. – М.: Мир, 2003. – 184 с.
2. Бражников А.М. Теория термической обработки мясопродуктов. – М.: Агропромиздат, 1987. – 271 с.
3. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
4. Снеддон И. Преобразование Фурье. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. – 667 с.
5. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов. – М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 228 с.

Mathematical description of heat and mass transfer in heat treated sausage goods

B.A. Voronenko DSc, V.V.Pelenko DSc, V.V.Starikov graduate student

Saint-Petersburg State University of Refrigeration & Food
Engineering

To describe heat and mass transfer in a product that is a disperse system, a long sausage loaf is assumed to be analyzed not as an aggregate of isolated discrete particles but as a solid homogeneous and isotropic medium. On the basis of prerequisites a mathematical model of combined heat and mass transfer is proposed for heat treatment of a long cylinder sausage loaf.

Key words: capillary-porous bodies, heat treatment, heat and mass transfer, mathematical model, differential equation set, initial and boundary conditions