УДК 621.047:621.926

Гидродинамические особенности течения газонаполненных напитков в кольцевом канале при розливе

Лунев К.Н., Алексеев Г.В., gva2003@rambler.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных и пищевых технологий

Серьезные проблемы в совершенствовании производства газонаполненных напитков с точки зрения повышения ресурсосбережения создает стадия их розлива. С одной стороны, неконтролируемые скорость и газосодержание приводит к несанкционированному повышению давления и «выплескам» напитков. С другой стороны, заведомо заниженные скорости розлива уменьшают производительность процесса. Одним из путей преодоления существующих проблем является автоматическое отслеживание скачков избыточного давления за счет совершенствования разливочного устройства.

Ключевые слова: розлив газонаполненных напитков, избыточное давление квадратичная область гидравлического сопротивления.

В промышленной практике широко распространен случай изотермического движения несжимаемой жидкости в кольцевом зазоре между двумя концентрическими трубами. Такая задача возникает, например, при розливе шампанского, пива и других газонаполненных жидкостей.

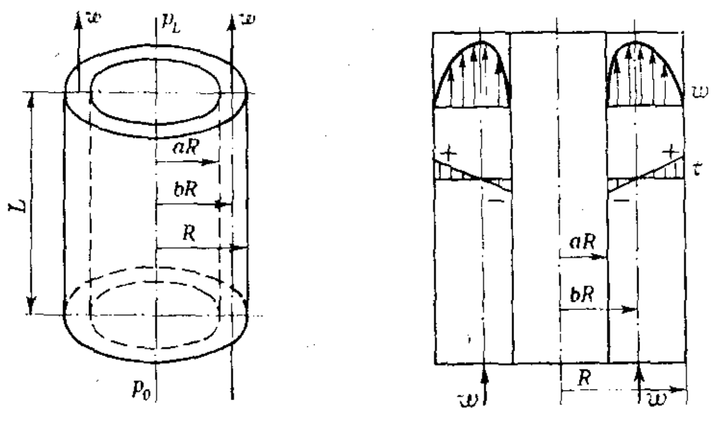


Рис.1 Движение жидкости в кольцевом зазоре между двумя концентрическими трубами.

Рассмотрим модель разливочного устройства в виде двух концентрически размещенных цилиндров.

На некотором расстоянии *bR* от оси цилиндров будет наблюдаться максимальная скорость движения модельной среды. Движение ее восходящего потока в кольцевом пространстве может быть описано уравнением в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{dp}{dx}=\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr}$$

или

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\cdot\left(r\cdot\frac{dp}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{dp}{dx}=const\,. \qquad (1)$$

Распределение скоростей и сил внутреннего трения в кольцевом сечении можно определить интегрированием уравнения (1):

$$\left(2\pi L\tau\right)_r-\left(2\pi rL\tau\right)_{r+\Delta r}+\left(2\pi r\Delta r\rho w^2\right)_{z=0}-\left(2\pi r\Delta r\rho w^2\right)_{z=L}-2\pi r\Delta rL\rho g+2\pi r\Delta r\left(p\;\;-p_L\right)=0\,. \qquad (2)$$

Для несжимаемой жидкости её скорость w_z при z = 0 и при z = L одинакова, следовательно, третий и четвёртый члены уравнения можно исключить. Сократив уравнение на $2\pi L\Delta r$, при стремлении Δr к нулю получим:

$$\lim_{\Delta r\to 0}\left(\frac{\left(r\tau\right)_{r+\Delta r}-\left(r\tau\right)_r}{\Delta r}\right)=\frac{p_0-p_L}{L}\,. \qquad (3)$$

Левая часть уравнения (3) представляет собой первую производную, поэтому представим ее в виде

$$\frac{d}{dr}(r\tau)=\frac{p_0-p_L}{L}r\,, \qquad (4)$$

где $p_0=p_L+\rho gh$, поскольку силы давления и тяжести действуют в противоположных направлениях.

Интегрируя уравнение (4), получим:

$$\tau=\frac{p_0-p_L}{2L}r+\frac{C_1}{r}\,. \qquad (5)$$

Расстояние от оси, на котором скорость потока будет максимальна, r = bR, тогда при τ = 0 константа $C_1={}^1\!/_2(p_0-p_L)\times(bR)^2/L$ и уравнение (5) примет вид

$$\tau=\frac{(p_0-p_L)R}{2L}\left(\frac{r}{R}-b\;\frac{R}{r}\right). \qquad (6)$$

Поскольку $\tau=-\mu\left({}^{dw_z}\!/_{dr}\right)$, распределение скорости будет описываться уравнением

$$\frac{dw_z}{dr}=-\frac{(p_0-p_L)R}{2\mu L}\left(\frac{r}{R}-b^2\frac{R}{r}\right). \qquad (7)$$

После интегрирования последнего соотношения имеем:

$$w_z = -\frac{(p_0 - p_L)R^2}{4\mu L}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2b^2 \ln\frac{r}{R} + C_2\right]. \qquad (8)$$

Для определения константы интегрирования C_2 учтём граничные условия:

$$\begin{aligned} &w_z = 0 \text{ при } r=aR; \\ &w_z = 0 \text{ при } r = R. \end{aligned} \qquad (9)$$

После чего получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\frac{(p_0 - p_L)R^2}{4\mu_L}\left(a^2 - 2b^2 \ln a + C_2\right) \\ 0 &= -\frac{(p_0 - p_L)R^2}{4\mu L}\left(1 + C_2\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (10)$$

откуда

$$b^2 = \frac{1-a^2}{2\ln(1/a)} \text{ и } C_2 = -1.$$

Окончательно профиль скоростей при ламинарном движении потока в кольцевом зазоре определяется соотношением:

$$w_z = \frac{(p_0 - p_L)R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1-a^2}{\ln(1/a)}\ln\frac{r}{R}\right]. \qquad (11)$$

Профиль напряжений в этом случае описывается уравнением

$$\tau = \frac{\Delta p}{2L}R\left[\frac{r}{R} - \frac{1-a^2}{2\ln(1/a)}\frac{r}{R}\right]. \qquad (12)$$

В предельном случае при *a = 0* уравнение (11) превращается в известное уравнение описывающее течение ньютоновской жидкости в цилиндрической трубе. Средняя скорость жидкости в кольцевом зазоре может быть определена следующим образом:

$$w_{ср} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{aR}^{R} w_z r dr d\theta}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{aR}^{R} r dr d\theta} = \frac{\Delta p R^2}{8\mu L}\left[\frac{1-a^4}{1-a^2} - \frac{1-a^2}{\ln(1/a)}\right]. \qquad (13)$$

Откуда объёмный расход:

$$V_{сек} = w_{ср} f = w_{ср}\pi K^2\left(1-a^2\right) = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu L}\left[\left(1-a^4\right) - \frac{\left(1-a^2\right)^2}{\ln(1/a)}\right]. \qquad (14)$$

Развивая использованный подход, рассмотрим режим турбулентного движения жидкости, реализуемый при перетекании модельной среды в ёмкость. С этой целью на первом этапе определим распределение скорости течения, а затем число Рейнольдса соответствующее интересующей нас области течения.

Известно, что при $\mathrm{Re} < 10^5$ для турбулентного режима движения коэффициент сопротивления λ зависит от числа Рейнольдса и от эффективной высоты выступов, а при $\mathrm{Re} > 10^5$ λ зависит только от шероховатости и носит название квадратичной области сопротивления.

Подставляя в формулу $\mathrm{Re} = \rho \dfrac{wd_э}{\mu}$ значение Re=10^5, оценим величину скорости движения среды соответствующее этому числу

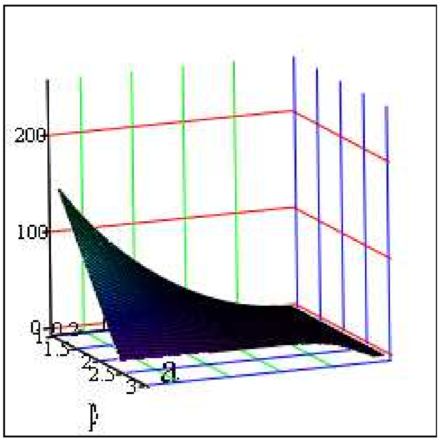
$$w = \frac{\mathrm{Re}\,\mu}{\rho d_э} = \frac{10^5 1.3 \cdot 10^{-3}}{1.035 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 31.3 \text{ (м/с).}$$

В рассматриваемом случае скорость определим по формуле (13), рассчитывая число Рейнольдса и оценивая соответствующий ему режим течения:

$$w_{cp} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{aR}^{R} w_z r dr d\theta}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{aR}^{R} r dr d\theta} = \frac{\Delta p R^2}{8\mu L}\left[\frac{1-a^4}{1-a^2} - \frac{1-a^2}{\ln(1/a)}\right] =$$

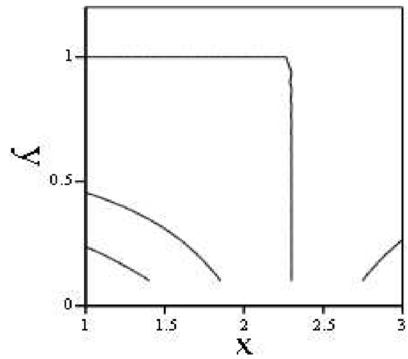
$$= \frac{(2.2-2)10^5 \cdot 0.02^2}{8 \cdot 1.3 \cdot 10^{-3} \cdot 0.14}\left[\frac{1-0.8^4}{1-0.8^2} - \frac{1-0.8^2}{\ln 1/0/8}\right] = 146.64 \text{ (м/с)}$$

Re = $4.7 \cdot 10^5$, и, следовательно, рассматриваемому режиму движения соответствует область квадратичного гидравлического сопротивления.



н

а)



н

б)

Рис. 2. Графическое отображение зависимости для средней скорости движения жидкости в кольцевом зазоре.

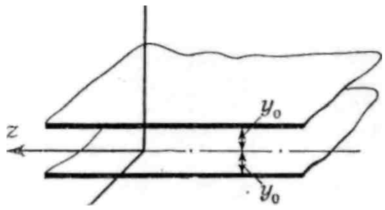
Гидродинамические особенности рассматриваемого процесса проанализируем графически на (рис.2а). Одновременно построим соответствующий график линий уровня (рис.2б). Для построения зависимостей приняты исходные данные наблюдаемые в эксперименте:

$$\mu = 1{,}3 \cdot 10^{-3};\ \ p_2 = 2{,}3;\ \ R = 0{,}2;\ \ L = 0{,}02\,.$$

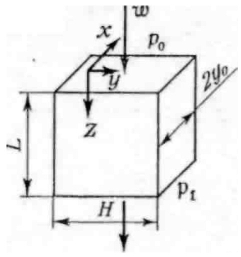
По оси *x* откладывали “*P*” — давление в баке розлива, по оси *y* — показания “*a*”, коэффициента соответствия внешнего и внутренних диаметров кольцевого канала, по оси *z* — “*w*”, скорость истечения жидкости.

Аналогичные результаты можно получить интегрированием уравнений движения для установившегося течения несжимаемой жидкости в щели (канале) между двумя плоскими параллельными стенками.

Рассмотрим канал, расположенный горизонтально, шириною $2y_0$, неограниченно простирающийся в направлении оси *z* (рис. 3а). Движение потока направлено по оси *x* причем рассматриваемый участок расположен достаточно далеко от входа и выхода канала.



а)



б)

Рис. 3. Движение потока в вертикально направленном канале. а — течение в горизонтальном канале; б — течение потока в вертикально направленном канале.

Для одномерного потока w_y и w_z равны нулю и уравнение неразрывности можно записать следующим образом:

$$\partial w_x / \partial x = 0\,. \tag{15}$$

Уравнение Навье-Стокса примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right). \tag{16}$$

Для канала расположенного горизонтально, массовая сила $\rho g_x = 0$; кроме того, поскольку w_x не зависит от *z* (канал неограниченно простирается в направлении оси z), то $\partial^2 w_x / \partial z^2 = 0$ и уравнение (16) упростится:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\,. \tag{17}$$

Ширина канала мала по сравнению с его протяженностью, поэтому $\partial p/\partial y = 0$ и $\partial p/\partial z = 0$, откуда следует, что $\partial p/\partial x = dp/dx$. Так как w_x и $\partial^2 w/\partial y^2$ не зависят от x, то значение градиента скоростного давления dp/dx во всех точках канала будет постоянным. Следовательно, можно записать:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = const\,. \tag{18}$$

После интегрирования получим:

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{y}\frac{\partial w_x}{\partial y} + C_1\,. \tag{19}$$

Константа интегрирования $C_1 = 0$, так как $\partial w/\partial y = 0$ при $y = 0$. В результате второго интегрирования запишем:

$$w = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(y^2 - {y_0}^2\right) + C_2\,. \tag{20}$$

При $y = y_0$ скорость $w = 0$ и константа интегрирования $C_2 = 0$.

Поскольку $y^2 < {y_0}^2$ уравнение (20) обычно представляют в виде

$$w = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left({y_0}^2 - y^2\right). \tag{21}$$

При $y = 0$ скорость $w = w_{макс}$, отсюда

$$w = w_{макс}\left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] \tag{22}$$

или

$$w/w_{макс} = 1 - \left(y/y_0\right)^2\,. \tag{23}$$

Аналогично можно решить задачу для вертикально направленного канала длиной L, шириной $2y_0$ и глубиной H (рис. 3б)

$$w_z = \frac{dp}{dz}\frac{{y_0}^2}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{y_0}\right)^2\right] \tag{24}$$

или

$$w_z = \frac{p_0 - p}{L}\frac{{y_0}^2}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{y_0}\right)^2\right]. \tag{25}$$

Приведенные решения анализируемой задачи позволяют рассмотреть ее относительно области, в которой коэффициент сопротивления зависит только от эффективной высоты выступов на поверхности дозирующей емкости, обращенной к жидкости.

В этом случае проследим зависимость объёмного расхода и газосодержания продукта от шероховатости труб «*e*», иначе от эффективной высоты выступов на внутренней поверхности трубы.

Из формулы (14) эту зависимость можно выразить, представив Δp через уравнение Дарси-Вейсбаха:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho w^2_{cp}}{2}, \tag{26}$$

где λ — коэффициент сопротивления.

Подставив в уравнение (26) значение $\Delta p / l = w_{cp} 8\mu / R^2$, согласно уравнению

$$w_{cp} = \frac{V_{сек}}{\pi R^2} = \frac{-(dp/\ dx)R^2}{8\mu} = \frac{w_{макс}}{2}$$

имеем:

$$\lambda = \frac{2d}{\rho w^2_{cp}} \frac{8\mu w_{\ cp}}{R^2} = \frac{32\mu}{\rho w_{cp} R}. \tag{27}$$

Обозначив $R = d/2$ и $w_{cp} d\rho = \mathrm{Re}$, получим закон сопротивления при ламинарном движении в круглой цилиндрической трубе с гладкой внутренней поверхностью:

$$\lambda = 64 / \mathrm{Re}. \tag{28}$$

При турбулентном режиме ($\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$) движения жидкости в трубе следует учитывать длину начального участка. По данным Никурадзе, $L_{нач} = (25 \div 40)d$; по данным Кирстена, $L_{нач} = (50 \div 100)d$.

В ламинарном подслое скорость жидкости мала, пульсации скорости практически отсутствуют, но вследствие прилипания жидкости к обтекаемым стенкам имеют место очень большие поперечные градиенты скорости, которые вызывают значительные напряжения силы трения. В турбулентном ядре уравнения движения заменяют зависимости между осреднёнными величинами и ищут их решения, используя параметры, описывающие мгновенное состояние движения потока.

Осреднение скорости обычно проводят по времени:

$$\varpi = \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_1}^{\tau_0 + \tau_1} w d\tau \tag{29}$$

или по площади сечения потока

$$w_{cp} = \frac{1}{S} \int w dS.$$

Таким образом, в случае турбулентного режима движения закон распределения скорости может быть получен только на основании анализа экспериментальных данных. Между ламинарным подслоем и турбулентным ядром находится переходная зона, для которой одинаково важны и молекулярная вязкость и турбулентность.

В ламинарном подслое распределение скоростей можно считать линейным:

$$w/\ w_{л} = r/\ \delta_{л} \tag{30}$$

где r — расстояние от оси трубы (в направлении, перпендикулярном стенке); $\delta_{л}$ — толщина ламинарного подслоя (порядка 1 мм).

В турбулентном ядре распределение осреднённых скоростей в пределах изменения значений критерия Рейнольдса от 10^4 до 10^5 хорошо описывается степенной зависимостью:

$$\frac{\varpi}{\varpi_{макс}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{31}$$

где n зависит от величины критерия Re и в рассматриваемых пределах может быть принято равным 7 (по экспериментальным данным).

Таким образом, приближённо для турбулентного течения

$$\varpi/\varpi_{макс} = 4/5. \tag{32}$$

При решении задач, связанных с определением режима транспортирования жидкостей или газов в трубопроводах, обычно пользуются зависимостью между отношением $w_{ср}/w_{макс}$ и значением критерия Рейнольдса

$$w_{ср} = 0.817\varpi_{макс}.$$

Для определения коэффициента сопротивления λ при турбулентном режиме движения в пределах изменения значений критерия Re от $4 \cdot 10^3 \div 10^5$ для гидравлически гладких труб можно пользоваться формулой Блазиуса:

$$\lambda = 0.316 / \mathrm{Re}^{1/4}. \tag{33}$$

Более точная зависимость (для больших значений Re) между коэффициентом сопротивления λ и режимом движения может быть получена при использовании логарифмического закона распределения скоростей. При выводе логарифмического профиля $\mathrm{Re} \to \infty$, поскольку пренебрегают молекулярной вязкостью μ по сравнению с вязкостью при турбулентном течениии μ_T.

Для значений Re > 10^5 коэффициент сопротивления можно рассчитать по формуле:

$$1/\sqrt{\lambda} = 2\lg\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right) - 0.8. \tag{34}$$

Исследованиями Никурадзе, Шиллера и других учёных установлено, что коэффициент сопротивления λ в значительной степени зависит также и от шероховатости труб:

$$\lambda = f(\mathrm{Re}, e), \tag{35}$$

где e — эффективная высота выступов на внутренней поверхности трубы. Обычно для характеристики шероховатости используют так называемую относительную шероховатость *e/d* или *d/e* (где *d* — диаметр трубы).

Если высота выступов *e* в трубе меньше толщины ламинарного подслоя δ, то шероховатость стенок не влияет на величину коэффициента сопротивления λ при турбулентном режиме движения потока. При большой высоте выступов ($e > \delta$) турбулентность потока увеличивается, и сопротивление возрастает.

Для равномерно зернистой шероховатости стенку трубы можно принимать гидравлически гладкой в тех случаях, когда относительная шероховатость меньше предельного значения

$$\left(\overline{e}\,/\,d\right)_{пр} = 17.85\,\mathrm{Re}^{-0,875}.$$

При ламинарном режиме движения влияние шероховатости стенок трубы на сопротивление очень незначительно и им обычно пренебрегают.

В переходной области от ламинарного к турбулентному режиму величина относительной шероховатости почти не оказывает влияние на коэффициент сопротивления λ

$$\mathrm{Re} = w_{ср} d\rho / \mu .$$

Область, в которой коэффициент λ зависит только от относительной шероховатости и не зависит от Re, носит название области квадратичной зависимости сопротивления от скорости потока $\left(\Delta p; w^2{}_{ср}\right)$.

Приведенные выше законы сопротивления справедливы как для труб с круглым сечением, так и с некруглым, если в критерий Рейнольдса ввести вместо диаметра трубы *d* эквивалентный или гидравлический диаметр $d_э$, равный учетверённому гидравлическому радиусу.

Так, например, для сечения межтрубного пространства дозирующей емкости типа «труба в трубе» эквивалентный диаметр

$$d_э = \frac{4\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4\pi\left(D + d\right)} = D - d .$$

Чтобы проследить зависимость объёмного расхода и газосодержания от шероховатости поверхности внутренних стенок дозатора следует рассматривать область развитой турбулентности или область квадратичной зависимости.

В области квадратичной зависимости, течение жидкости описывается уравнением Прандтля-Никурадзе

$$\lambda = \frac{1}{\left(1.14 + 2\lg\frac{d}{k}\right)^2}. \tag{36}$$

Зависимость газосодержания от шероховатости внутренней поверхности можно вычислить при помощи формулы (37)

$$\varepsilon_Г' = \frac{p''\varepsilon_Г''}{p''\varepsilon_Г'' + p'\varepsilon_и''}, \tag{37}$$

где $\varepsilon_Г'$ — объёмная доля газа в жидкости или газосодержание разлитого напитка в ёмкость, $\varepsilon_Г''$ — объёмная доля газа в жидкости или газосодержание жидкости в баке розлива, $\varepsilon_и''$ — объёмная доля жидкой фазы в двух фазной смеси в баке розлива p' — соответственно давление в баке и в бутылке при розливе.

Далее, если представить $p' = p'' - \Delta p$, где Δp — определяется с учётом коэффициента сопротивления λ, то

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho w^2_{ср}}{2}, \tag{38}$$

а λ в свою очередь определяется по формуле (36).

Приведенные рассуждения позволяют проследить зависимость газосодержания, а, следовательно, и качества продукта, от внутренней шероховатости стенок разливочного устройства.

Записанные соотношения устанавливают зависимость влияния шероховатости внутренней поверхности цилиндрической части дозатора на объёмный расход (точность дозирования).

Список литературы

1. Алексеев Г.В., Лунев К.Н. Возможности совершенствования процесса и аппарата для розлива газонаполненной жидкости. Электронный научный журнал. — Процессы и аппараты пищевых производств, 2009, №1, www.open-mechanics.com/journals
2. Гидромеханические процессы химической технологии. Романков П.Г. 1982. Л., химия, 3 изд. 287 с.
3. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д. Нефтегазовая гидромеханика. 2005 г., 544 с.
4. Хьюитт Д., Холл-Тейлор Н. Кольцевые двухфазные течения. Пер. с англ., М., Энергия, 1974.

Hydrodynamic features of flow in gas-filled drinks in an annular channel at bottling

Lunyov K.N., Alexeyev G.V.

Saint-Petersburg State University of Refrigeration
and Food Engineering

From the standpoint of resource-saving, serious problems for improvement of manufacture of gas-filled drinks arise at the stage of bottling. On one hand, uncontrolled speed and gas content result in unapproved pressure rising and drinks "splashing". On the other hand – deliberately understated speeds of bottling slow down process productivity. One way to overcome the existing problems is automatic monitoring overpressure jumps owing to perfection of filling devices.

Keywords: gas-filled drinks bottling, excess pressure, quadratic realm of hydraulic resistance.