

Моделирование течения вязкой жидкости в трубе

Зайцев А.В., Пеленко Ф.В.

zai_inbox.ru

Санкт-Петербургский национальный исследовательский
университет информационных технологий, механики и оптики.
Институт холода и биотехнологий.

Современные возможности математического моделирования и программной реализации позволяют сильно упростить процесс исследования закономерностей течения вязких жидкостей в трубах с целью оптимального проектирования оборудования. В работе приведено теоретическое исследование на численной модели влияния внутренней вязкости и трения на скорость транспортирования продукта по трубе.

Ключевые слова: вязкость, трение, математическая модель, численный эксперимент.

Modeling of Viscous Liquid Flow in the Tube

Zaitsev A.V., Pelenko F.V.

zai_inbox.ru

St. Petersburg National Research University
of Information Technologies, Mechanics and Optics.
Institute of Refrigeration and Biotechnologies

Modern capabilities of mathematical modeling and program realization allow to simplify greatly the investigation process of flow laws of viscous liquids in tubes for the purpose of optimal equipment designing. The influence of viscosity and friction on the product transportation velocity along the tube is investigated theoretically using the numerical model in this paper.

Keywords: viscosity, friction, mathematical model, numerical experiment.

Вязкость является одним из важнейших понятий в реологии пищевых продуктов. В основе же реологии лежит механика сплошных сред [1] и для случая любого пространственного движения вязкой жидкости в соответствии с известным реологическим обобщённым законом Ньютона о линейной связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформации [2] возможно изучение влияния вязкости на течение соответствующих пищевых продуктов.

Наиболее удобным методом исследования параметров транспортировки пищевых продуктов по трубам при конструировании соответствующего оборудования во многих случаях следует признать физическое моделирование в силу его относительной доступности и простоты. С другой стороны, математическое моделирование на основе теоретического представления позволяет проводить обобщающий анализ, с широким варьированием параметров, не всегда доступным при эксперименте в силу дороговизны или технических возможностей.

Из вышесказанного вытекает определённый интерес к теоретическому исследованию зависимости скорости (следовательно, и расхода, затрачиваемой мощности для прокачивания и общих экономических показателей) от внутреннего и внешнего трения (т.е. динамической вязкости текучей среды и трения на внутренней стенке трубы).

Рассмотрим течение вязкой жидкости в трубе. В [3] рассматривается задача течения в самом общем виде, со многими факторами воздействия, и приведена модель и методика решения системы дифференциальных уравнений; разработана соответствующая компьютерная программа. Применим эту модель, введя допущения для сужения задачи в соответствии со сформулированной целью.

Будем использовать нестационарные уравнения для обеспечения сходимости разностной системы при расчёте так называемым методом установления. На данном этапе исследований специально отключим уравнения энергии и состояния, т.е. рассмотрим адиабатный процесс, оставив тепловые процессы на следующие этапы исследований. Математическая формулировка представляет собой параболизированное уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности в интегральной форме.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial \tau} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right); \\ \int_F \rho w dF = \text{const} = G_0. \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\int_F \rho w dF = \text{const} = G_0. \quad (2)$$

Искомыми неизвестными функциями в этой системе уравнений являются распределение продольной проекции скорости по трубе $w(x, y, z, \tau)$, и распределение давления вдоль канала $p(x, y, z, \tau)$.

При переходе от дифференциалов к конечным разностям для упрощения записи введём обозначения:

$$\begin{aligned} f &= f_{i,j,k}^n; & f' &= f_{i,j,k}^{n-1}; & f_{i-1} &= f_{i-1,j,k}^n; & f_{i+1} &= f_{i+1,j,k}^n; \\ f_{j-1} &= f_{i,j-1,k}^n; & f_{j+1} &= f_{i,j+1,k}^n; & f_{k-1} &= f_{i,j,k-1}^n; & f_{k+1} &= f_{i,j,k+1}^n, \end{aligned}$$

где $f_{i,j,k}^n$ обозначает одну из сеточных функций – $w_{i,j,k}^n$, $p_{i,j,k}^n$; i, j – индексы узлов пространственной сетки в поперечном сечении канала; k – индекс узлов пространственной сетки вдоль потока; n – номер временного слоя.

Тогда разностная аппроксимация системы уравнений:

– уравнение движения (переноса импульса)

$$w = w' + A_1 + A_2 + A_3 \Delta \tau, \quad (3)$$

где $A_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{p - p_{k-1}}{\Delta z}$ – определяет перенос за счёт сил давления;

$A_2 = -w \frac{w - w_{k-1}}{\Delta z}$ – конвективный член;

$A_3 = \mu \left(\frac{w_{i-1} - 2w + w_{i+1}}{\Delta x^2} + \frac{w_{j-1} - 2w + w_{j+1}}{\Delta y^2} + \frac{w_{k-1} - 2w + w_{k+1}}{\Delta z^2} \right)$ – вязкостный

член, учитывающий трение;

– уравнение неразрывности

$$\sum_{i,j} \rho_{ij} w_{ij} \Delta x \Delta y = G_0, \quad (4)$$

где G_0 – заданный массовый расход на входе в канал.

Согласно методике градиент давления $\partial p / \partial z$ рассматривается, как дополнительная неизвестная функция, и к системе (3), (4) добавляется уравнение для предварительной оценки давления в сечении на шаг вперёд:

$$p_{k+1} = p_k + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z. \quad (5)$$

В качестве начальных условий в общем случае принимается распределение скорости и давления по трубе ($w = w_n$; $p = p_n$), в том числе скачкообразное их изменение на входе ($w|_{\tau=0, z=0} = w_{\hat{a}\hat{o}}$; $p|_{\tau=0, z=0} = p_{\hat{a}\hat{o}}$).

Граничные условия: на входе оставим для определённости ($w|_{z=0} = w_{\hat{a}\hat{o}}$; $p|_{z=0} = p_{\hat{a}\hat{o}}$); на выходе можно задать, например, условия вытекания в окружающую среду ($w|_{z=L} = w_{\hat{a}\hat{o}}$; $p|_{z=L} = p_{\hat{a}\hat{o}}$). Учёт внешнего трения производится путём введения коэффициента проскальзывания $0 \leq c \leq 1$, который используется в граничных условиях на стенке трубы $w|_{\sqrt{x^2+y^2}=R} = cw_{\hat{y}}$, где $w_{\hat{y}}$ – скорость в ядре потока (в центральной части, или усреднённая).

Рассмотрим некоторые результаты расчётов для трубы диаметром 8 см и длиной 3 м (рис. 1–4). Параметры потока на входе и в начальный момент:

$w_{\text{âõ}} = w_{\text{íà±}} = 1 \hat{m} / \hat{n}$; $p_{\text{âõ}} = p_{\text{íà±}} = 0,1 \hat{I} \hat{I} \hat{à}$. Диапазон изменения вязкости $\mu = (0,001-0,4)$ Па·с, что охватывает такие продукты, как молоко, оливковое масло (для сравнения, вязкость глицерина $\mu = 1,49$ Па·с).

По результатам расчётов можно сделать различные выводы. В частности, можно отметить, что при заданных условиях, установившийся гидродинамический режим течения формируется при вязкости 0,0018 Па·с на расстоянии около 3 м от входа не раньше, чем через 5 мин, а при вязкости 0,4 Па·с – на расстоянии около 0,2 м через 10 секунд. На неустановившемся участке профиль скоростей соответствует стандартному случаю развития ламинарного пограничного слоя. Далее рассмотрим зависимости для установившегося режима.

При уменьшении вязкости $\mu \rightarrow 0$ скорость в ядре потока приближается к своему постоянному значению в зависимости от c и G_0 .

Очевидно, что с ростом трения на стенке скорость в центре трубы при неизменном массовом расходе возрастает (рис. 1). Повышение вязкости приводит к большему эффекту трения у стенки, чем в центре, поэтому скорость $w_{\text{я}}$ больше у продуктов с большей вязкостью. При этом независимо от трения для заданной геометрии и условий течения существует некоторое значение вязкости μ' , при котором $w_{\text{я}}$ достигает своего максимального значения и с последующим ростом вязкости очень медленно уменьшается. С ростом трения данная картина становится более выраженной.

Гидравлическое сопротивление dp/dz в первую очередь определяет необходимую мощность для прокачивания продукта через трубу. При нулевом коэффициенте проскальзывания (условие «прилипания») dp/dz максимально. Отсутствие трения ($c = 1$) вызывает отсутствие гидравлического сопротивления (рис. 2) – идеальный вариант для минимальной мощности прокачивания при любой длине трубы. При реальных условиях длина трубы ограничена суммарным перепадом давлений

$\int \frac{dp}{dz} dz = p_{\text{âõ}} - p_{\text{âûõ}}$. С ростом вязкости dp/dz возрастает практически линейно, с ростом трения – квадратично (рис. 4).

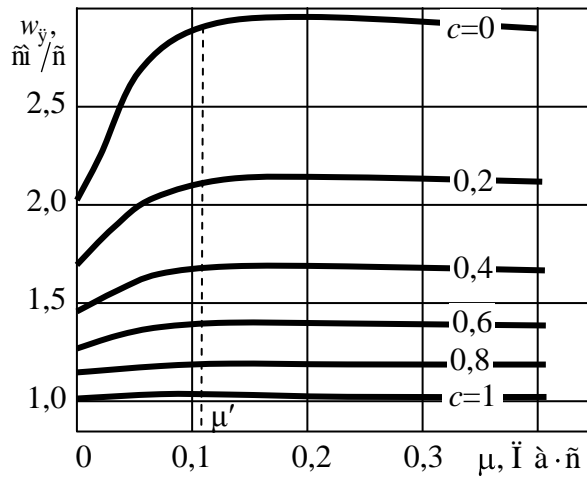


Рис. 1. Влияние вязкости на скорость в ядре потока

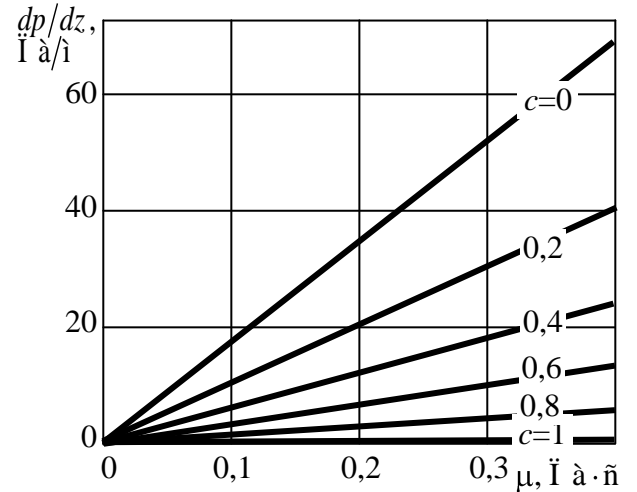


Рис. 2. Влияние вязкости на гидравлическое сопротивление

Гидродинамическая картина течения сильно зависит от вязкости только при относительно низких её значениях, начиная же с некоторого μ^* , дальнейший её рост не приводит к заметному изменению профиля скоростей. Так, на графике рис. 3 скорость при вязкости 0,04 Па·с практически совпадает со скоростью при вязкости 0,1 Па·с и скоростью при вязкости 0,4 Па·с.

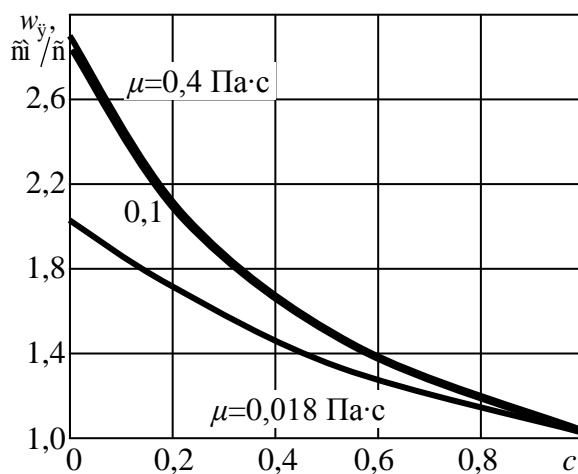


Рис. 3. Влияние трения на скорость в ядре потока

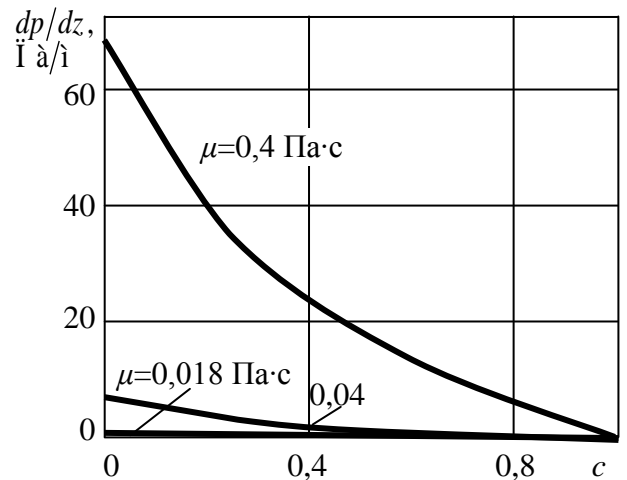


Рис. 4. Влияние трения на гидравлическое сопротивление

Приведённые данные отражают лишь некоторую часть результатов численного моделирования процесса течения вязкой среды в трубе. Дальнейшее получение и обработка результатов на представленной модели позволит провести всесторонний анализ исследуемого процесса и сделать принципиальные выводы.

Список литературы

1. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения / Пер. с англ. – СПб.: Профессия, 2007. – 560 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
3. Зайцев А.В. Разработка алгоритма решения уравнений Навье-Стокса для течения криогенной жидкости в трубе. / Вестник МАХ – СПб.: МАХ. 2011. № 3. С. 37–42.