

УДК 51-74, 53.03, 536.79, 608

Универсальная метрика расчёта погрешности математической модели технологического процесса и конструкций холодильного оборудования

Канд. техн. наук **Менин Б.М.** meninbm@gmail.com
Эксперт-консультант по холодильному оборудованию,
8464209, Беэр-Шеба, ул. Яков Эфрат д.9, Израиль

В статье рассматривается безразмерный показатель для сравнения экспериментальных результатов наблюдаемых холодильных процессов/явлений и смоделированных данных. Предлагаемая метрика позволяет определить априори, до проведения экспериментов или компьютерных симуляций, соответствие между выбранной физико-математической моделью тепло- и массо-обменных процессов и требуемой точностью полевых экспериментов. Статья представляет интерес для ученых и проектировщиков. Примеры применения оригинальной методики для систем теплового аккумулирования энергии и процесса кристаллизации фаршеобразного продукта, замораживаемого на движущейся охлажденной цилиндрической стенке, приводятся.

Ключевые слова: априорный анализ погрешностей, математическое моделирование, предел точности измерений, теория информации, теория подобия, холодильная техника.

DOI:10.17586/2310-1148-2016-9-4-16-22

Universal metric of calculation of mathematical model uncertainty for technological processes and constructions of refrigeration equipment

Ph.D. Menin B.M. meninbm@gmail.com
Refrigeration Consultant, Energy Efficiency Supervisor
8464209, Beer-Sheba, 9 Yakov Efrat St., Israel

The article discusses the dimensionless parameter for comparison of the experimental results of observed refrigeration processes/phenomena and simulated data. The proposed metric is able to determine a priori, before conducting experiments or computer simulations, the concordance between the selected physical-mathematical model of heat- and mass-transfer processes and the required accuracy of field experiments. The article is of interest to scientists and designers. Examples of application of original method for thermal energy storage systems and the crystallization process of the minced-shaped product, frozen on a moving chilled cylindrical wall, are provided.

Keywords: accuracy limit of measurement, a priori uncertainty analysis, mathematical modeling, , refrigeration, theory of information, theory of similarity.

Постановка проблемы

Цель настоящей работы – доказать, что только путем реализации взвешенного и тщательного подхода к разработке физико-математической модели систем охлаждения и морозильного оборудования, возможно подготовить разумное технико-экономическое обоснование использования методов охлаждения с высокой энергоэффективностью в каждой стране.

Несмотря на многочисленные экспериментальные и компьютерные исследования, касающиеся характеристик холодильного оборудования (см. главу Анализ последних исследований и публикаций), точность расчетов технических параметров все еще неудовлетворительна, и существует необходимость разработать единый упрощенный метод для оценки совершенства холодильного оборудования (ХО). Это, в свою очередь, повысит способность понимать относительное влияние основных технических и технологических параметров холодильных машин.

Мы намереваемся найти минимальное значение расчетной экспериментальной/компьютерной погрешности математической модели, которое позволяет подтвердить ее приемлемость или пересмотреть её перед экспериментом. Эта априорная погрешность обусловлена только количеством выбранных переменных. Безусловно, помимо этой

погрешности, существуют апостериорные погрешности, связанные с внутренней структурой модели и ее последующей компьютеризацией: неточные вводные данные, неточные физические предположения, ограниченная точность решений интегро-дифференциальных уравнений и т.д.

Настоящий анализ ХО предназначен помочь ученым и проектантам определить наиболее простой и надежный способ выбора модели с оптимальным количеством учтённых переменных. Это позволит значительно сократить продолжительность исследований и стадии проектирования, тем самым, снизить стоимость проекта.

Анализ последних исследований и публикаций

В последние годы наблюдается резкое увеличение использования математического и численного моделирования в качестве инструмента оценки многофакторных или сложных физических процессов. Тем не менее, комплексное тестирование пока невозможно [1]. На практике, проверка модели направлена на повышение доверия к точности модели. Оценка модели может быть выполнена на разных уровнях детализации, но нет общепринятой/стандартной процедуры, которая устанавливает минимальные количественные требования для решений модельного тестирования [2]. В то же время, общие стратегии для выявления соответствия модели и изучаемого объекта, которые особенно популярны в последнее время, как с теоретической, так и прикладной точки зрения, это верификация и валидация (verification and validation, V & V) [3].

Верификация – это процесс подтверждения того факта, что вычислительная модель точно представляет основную математическую модель и ее решение; валидация – это процесс, который отвечает на вопрос, в какой степени модель гарантирует точное представление о реальном мире с точки зрения предполагаемого использования модели [4].

Можно сказать, что качественная валидация может быть полезна в некоторых сценариях, особенно, в процессе идентификации возможных причин ошибок в модели. Тем не менее, на данный момент, валидация не в состоянии обеспечить количественную меру согласия между экспериментальными и компьютерными данными. Это затрудняет задачу ее использования в попытке определить момент, когда требования к точности выполнены [3]. Более подробное обсуждение существующих разработок по V&V приводится в [5, 6]. Научно-технические работы по V&V результатов, достигнутых для различных математических моделей, в настоящее время регулярно можно найти в литературе.

Тем не менее, некоторые ученые предполагают, что V&V численных моделей природных систем невозможны [7, 8]. Авторы утверждают, что модель никогда не может полностью имитировать реальность в любых условиях, и, следовательно, не может быть подтверждена.

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы

Принимая во внимание вышеуказанное, мы изучили несколько источников технической информации об исследованиях, связанных с математическим моделированием процессов и конструкций ХО. Прежде всего, анализ охватывает публикации в журнале Холодильная техника в период 2006–2015 гг. Было найдено 9 статей, включая [9, 10, 11]. Незначительное число публикаций объясняется выбранной тематикой журнала. Кроме того, были проанализированы 1006 статей за период 2000–2015, опубликованных Международным Институтом Холода и в журнале International Journal of Refrigeration. Количество статей, специально посвященных моделированию ХО, составило 81. Большинство авторов заявляют, что «модельные предсказания подтверждены экспериментами», «компьютерные результаты охватывают области, найденные в экспериментальных исследованиях», «сравнение показало очень хорошее согласие между аналитическими, компьютерными и экспериментальными данными» и т.д.

Как было упомянуто выше, численные модели, аналитические формулы могут и должны быть «проверены» или «подтверждены» (V&V). В то же время, вышеуказанное утверждение для интересующей нас области исследования – математическое моделирование ХО – к сожалению, далеко от реальности, от выводов, основанных на изучении просмотренного материала. Фактически, никто не определяет/вычисляет обобщенную абсолютную погрешность конкретной целевой функции (консолидированного критерия), которая описывает «жизнедеятельность» исследуемого процесса или оборудования и характеризует его взаимодействие с окружающей средой. Никто не сравнивает разницу между численными прогнозами и экспериментальными результатами с достигнутой абсолютной погрешностью целевой функции.

Таким образом, существует значительный объем научно-технической литературы о методах разработки математических моделей, которая описывает изучаемый объект с возможно малым расхождением. В то же время, никто не пытался дать количественную оценку априорной концептуальной погрешности модели, обусловленной только выбором конечного числа учитываемых переменных.

Цель статьи

Использование предлагаемого способа позволит оценить близость модели к реальным характеристикам процесса или машины и рассчитать погрешность, которая может быть достигнута в экспериментальных исследованиях или при компьютерном моделировании.

Изложение основного материала

При разработке модели, описывающей изучаемый процесс или устройство, исследователь должен использовать физические законы и переменные, которые, все без исключения, включены в систему первичных переменных (СПП). Мы определяем СПП, как «ограниченный набор обстоятельств, в которых мир вокруг нас, и, конечно, любая реальная естественная система или процесс можно наблюдать и подвергнуть экспериментальной проверке.» СПП, такая как СИ (Международная система единиц), представляет собой набор размерных (РЗ) переменных, первичных и рассчитанных на их основе вторичных, которые необходимы и достаточны для описания известных законов природы, как в физическом содержании, так и количественно [12].

Мы рассматриваем СПП как инструмент, который характеризуется наличием равновероятного учета/регистрации любой переменной сознательным наблюдателем, который разрабатывает математическую модель. Каждая переменная позволяет исследователю получить определенное количество информации об исследуемом материальном объекте. Общее количество переменных в СПП может быть рассчитано (см. ниже), и это соответствует максимальному количеству информации, содержащейся в СПП. Основные определения и оценки количества информации в ходе физического эксперимента были четко сформулированы Л. Бриллюэном [13].

В рамках СПП, каждый аналитик выбирает конкретный класс явлений (КЯ) для изучения наблюдаемого процесса. КЯ это совокупность физических явлений и процессов, описываемых конечным числом первичных и вторичных переменных, характеризующих определенные черты исследуемого явления с количественных и качественных аспектов [14].

СИ включает в себя следующие семь основных переменных: L – длина, M – масса, T – время, I – ток, Θ – температура, J – интенсивность света, F – количество вещества. Размерность любой переменной q в СИ можно выразить уникальным сочетанием размерностей семи основных первичных переменных в различных степенях [12]:

$$q \ni L^l \cdot M^m \cdot T^t \cdot I^i \cdot \Theta^\theta \cdot J^j \cdot F^f. \quad (1)$$

Согласно [15], области изменения показателей степени основных первичных переменных следующие:

$$\begin{aligned} -3 \leq l \leq +3, -1 \leq m \leq +1, -4 \leq t \leq +4, -2 \leq i \leq +2, \\ -4 \leq \theta \leq +4, -1 \leq j \leq +1, -1 \leq f \leq +1. \end{aligned} \quad (2)$$

Показатели принимают только целочисленные значения [15], поэтому количество вариантов размерностей для каждого показателя e_l, \dots, e_f согласно (2), составляет:

$$e_l = 7; e_m = 3; e_t = 9; e_i = 5; e_\theta = 9; e_j = 3; e_f = 3. \quad (3)$$

Число возможных РЗ переменных в СИ может быть рассчитано следующим образом:

$$(e_l \cdot e_m \cdot e_t \cdot e_i \cdot e_\theta \cdot e_j \cdot e_f - 1) / 2 = 38272, \quad (4)$$

где: «-1» - соответствует случаю, когда все показатели первичных переменных в формуле (1) равны нулю; деление на 2 – означает, что есть прямые и обратные переменные, например, L^1 – длина, L^{-1} – прогонная длина.

Для дальнейших рассуждений воспользуемся методами теории подобия. Применение этой теории целесообразно по нескольким причинам. При изучении явлений, происходящих в ХО, желательно учитывать не отдельные значения переменных, а их совокупность или комплексы, имеющие определенный физический смысл. Методы теории подобия позволяют, на основе анализа интегро-дифференциальных уравнений и граничных условий, найти эти комплексы. Кроме того, переход от РЗ физических величин к безразмерным (БР) переменным, позволяет снизить количество учитываемых переменных. Предварительно определенное значение БР комплекса может быть получено в результате различных комбинаций РЗ переменных, входящих в комплекс. Это означает, что при

рассмотрении проблемы в новых переменных, рассматривается не единичный случай, а комплекс различных событий, объединенных некоторыми общими свойствами. Принимая во внимание вышесказанное и используя π -теорему [12, 14], в рамках системы СИ можно подсчитать наибольшее возможное количество БР комплексов:

$$n_{СИ} = 38272 - 7 = 38265, \tag{5}$$

где: 7 - соответствует количеству первичных переменных в СИ.

Безусловно, $n_{СИ}$ - это фиктивная система, так как она не существует в физической реальности. В то же время, реально существующий материальный объект может быть выражен этим набором. Впрочем, это замечание верно и для собственно системы СИ. В соответствии с предлагаемым подходом, можно, до начала полевых исследований прототипа ХО, найти минимальное значение расчетной погрешности эксперимента, чтобы подтвердить приемлемость выбранной модели. Для этой цели целесообразно вычислить универсальный показатель - ε сравнительную погрешность [13], присущую модели [16]:

$$\varepsilon = \Delta u_{рmm}/S \leq [(z'-\beta')/n_{СИ} + (z''-\beta'')/(z'-\beta')], \tag{6}$$

где: $\Delta u_{рmm}$ – БР абсолютная погрешность модели, обусловленная конечным числом учитываемых переменных; S - БР интервал изменения БР исследуемой переменной u ; z' - число физических РЗ переменных в выбранном КЯ; β' - число первичных физических РЗ переменных в выбранном КЯ; z'' - число физических РЗ переменных в выбранной модели; β'' - число первичных физических РЗ переменных в выбранной модели.

По своей сути, эта априорная концептуальная неопределенность (“первородная”) ε имманентно присуща любой физико-математической модели и не зависит от процесса измерения. Неопределенность, определяемая предлагаемым принципом, не есть результат измерения, она представляет собой внутреннее свойство модели, состояние которой обусловлено только количеством выбранных переменных. Поэтому общая/интегральная погрешность модели, включающая дополнительно погрешности, связанные со структурой модели и её последующей компьютеризацией, будет значительно больше, чем $\Delta u_{рmm}$.

Уравнение (6) количественно оценивает сравнительную погрешность модели ε , обусловленную конечным числом переменных, при теоретическом анализе физических явлений. С другой стороны, оно также устанавливает ограничение на целесообразное повышение точности измерений при проведении экспериментальных исследований. Фактически, уравнение (6) может рассматриваться в качестве принципа неопределенности для процесса разработки модели. А именно, любое изменение в уровне подробного описания материального объекта ($z''-\beta''$; $z'-\beta'$) вызывает изменение сравнительной погрешности модели ($\Delta u_{рmm}/S$), а также точности каждой основной РЗ/БР переменной, характеризующей свойства внутренней структуры или технические параметры ХО.

При сравнении различных моделей (по значению $\Delta u_{рmm}$), описывающих один и тот же материальный объект, предпочтение следует отдать той модели, для которой $\Delta u_{рmm}/\Delta u_{exp}$ ближе к 1, где Δu_{exp} - БР рассчитываемая экспериментальная погрешность в определении БР переменной u_{exp} .

Следует отметить, что сравнительные погрешности РЗ переменной U и БР переменной u равны:

$$(\Delta u/S) = (\Delta U/r^*)/(S^*/r^*) = (\Delta U/S^*), \tag{7}$$

где: Δu – БР абсолютная погрешность в определении БР переменной u ; ΔU – РЗ абсолютная погрешность в определении РЗ исследуемой переменной U ; S^* - РЗ интервал наблюдения измеряемой РЗ переменной U ; r^* - масштабный параметр с той же размерностью, которую имеют U и S^* .

Для конкретного КЯ (z'' , β''), для того, чтобы сформулировать условия достижения минимальной сравнительной погрешности модели $\Delta u_{рmm}/S$, требуется приравнять её частную производную по отношению к $z'-\beta'$, к нулю. Тогда мы получим:

$$(z'-\beta')^2/(G-\xi) = (z''-\beta''). \tag{8}$$

В рамках предлагаемого подхода и для выбранного КЯ, можно определить минимальную сравнительную погрешность, присущую модели с конечным числом переменных. Подсчитаем достижимую минимальную сравнительную погрешность $(\varepsilon_{min})_{LMT\Theta}$ для тепло- и массо-обменных процессов, которые широко используются при моделировании ХО: $KЯ_{СИ} \equiv LMT\Theta$. Принимая во внимание (3):

$$(z'-\beta') = (7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 9 - 1) / 2 - 4 = 846, \tag{9}$$

где: -1 – соответствует случаю, когда все показатели основных переменных в уравнении (1) равны 0; деление на 2 обусловлено наличием в системе прямых и обратных переменных, например, L^1 - длина, L^{-1} - прогонная длина. Объект можно судить, зная только одну из его симметричных частей, в то время как другие, структурно дублирующие эту часть, можно рассматривать как информационно пустые. Таким образом, количество вариантов размерностей может быть уменьшено в $\omega = 2$ раза; $\beta_{\square}=4$ – соответствует количеству основных первичных переменных: L, M, T, Θ .

Тогда, используя (4) и (8), получаем

$$(z''-\beta'') = (z'-\beta')^2 / \kappa_{SI} = 846^2 / 38265 \approx 19. \tag{10}$$

Подставляя (4), (9) и (10) в (6), мы находим

$$(\epsilon_{\min})_{LMT\Theta} = \Delta u_{\text{pmm}}/S = 0,0445. \tag{11}$$

Примеры применения

Следует отметить, что стиль изложения представленных ниже примеров носит дидактический характер, что объясняется желанием автора описать в деталях методику расчёта сравнительной погрешности.

1. Теория подобия была использована впервые, чтобы построить математическую модель для идеальной системы теплового аккумулирования энергии [17]. Обсуждались три типа таких систем. Обобщенные уравнения были представлены в размерной и безразмерной формах. Авторы изучали температуры теплоносителя во время накопления и утилизации энергии и в целом эффективность аккумулирования энергии посредством решения обобщенных уравнений.

Были приведены ряд обобщенных диаграмм эффективности хранения энергии с использованием четырех БР параметров, учитывающих различные характеристики, включая размерные параметры, жидкостные и тепловые свойства материала для хранения, а также условия эксплуатации, включая массовый расход жидкости, отношение периодов времени накопления и утилизации энергии.

В общей сложности были учтены 40 РЗ переменных и 20 БР критериев и чисел. К сожалению, не было проведено сравнение между расчётами теоретической модели и результатами экспериментов. К_{ЯСИ} исследуемых явлений $LMT\Theta$. В этом случае, рекомендуемое количество учтённых БР переменных $z''-\beta''$ в соответствии с уравнением (9) - 19. Это означает, что минимально достижимая сравнительная ошибка почти достигнута. Таким образом, инженеры могут с высокой достоверностью использовать диаграммы для разработки и калибровки размеров тепловых резервуаров и выбора эксплуатационных условий, не выполняя индивидуальное моделирование и сложные вычисления. В то же время, в ходе полевых испытаний требуется достигнуть значения общей интегрированной экспериментальной сравнительной ошибки, равной по величине сравнительной ошибке, сформулированной в (10).

Кроме того, можно утверждать, что авторы после многомесячных исследований подошли к минимальной сравнительной ошибке. В соответствии с предлагаемой схемой, требуемое количество учтённых переменных может быть вычислено в течение нескольких минут.

2. Процесс теплопередачи в тонком слое пасто- и фарше-образного материала, замораживаемого на движущейся охлажденной цилиндрической стенке, исследован в [18, 19]. Сформулированная модель относится к $K_{ЯСИ} \equiv LMT\Theta$. Согласно (8), мы находим $z'-\beta' = 846$. В модели учтены 18 РЗ переменных (z^*) и 5 (β^*) первичных физических РЗ переменных. Таким образом, используя π -теорему, рассчитываем количество БР комплексов $z^*-\beta^*=13$.

На основании разработанной модели проводился компьютерный эксперимент [20], реализованный с помощью метода случайного баланса [21]. Целевой функцией была выбрана БР конечная температура внешней поверхности замороженного продукта $\bar{\Theta}_k = (\Theta_k - \Theta_{xa}) / (\Theta_{kp} - \Theta_{xa})$, где Θ_{kp} , Θ_k , Θ_{xa} – температуры, соответственно, кристаллизации продукта, наружной поверхности замораживаемого материала и кипения холодильного агента. В работе представлены величины собственно температур и погрешности их измерения: $\Theta_{kp}=272^\circ\text{K}$, $\Theta_k=259^\circ\text{K}$, $\Theta_{xa}=243^\circ\text{K}$, $\Delta\Theta_{kp}=0.1^\circ\text{K}$, $\Delta\Theta_k=\Delta\Theta_{xa}=0.5^\circ\text{K}$. Достигнутое расхождение между экспериментальными и расчетными данными, в диапазоне допустимых значений критериев подобия и безразмерных коэффициентов, не превышало 8 %.

Мы принимаем во внимание, что прямые ошибки измерений намного меньше, чем измеренные значения переменных, и составляют несколько процентов. Тогда величину ошибки можно считать небольшим шагом

измеряемой переменной и заменить символами: $\Delta \Theta_{кр} \approx d\Theta_{кр}$, $\Delta \Theta_{ха} \approx d\Theta_{ха}$, $\Delta \Theta_{к} \approx d\Theta_{к}$, $\Delta \bar{\Theta}_{к} \approx d\bar{\Theta}_{к}$. Для того, чтобы найти величину $\Delta \bar{\Theta}_{к}$, применим математический аппарат дифференциального исчисления [22]:

$$\Delta \bar{\theta}_s = \sum_i^1 \left| \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial \theta_i} \Delta \theta_i \right|, \tag{12}$$

где: $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta_i}$ – частные производные по соответствующим переменным, $\Delta \theta_i$ – погрешность переменной θ_i .

Согласно (11) можно найти абсолютную БР погрешность непрямого экспериментального измерения конечной температуры на поверхности продукта:

$$(\Delta \bar{\Theta}_{к})_{экс} = (\Delta \Theta_{к} + \Delta \Theta_{ха}) / (|\Theta_{кр} - \Theta_{ха}|) + |\Theta_{к} - \Theta_{ха}| / ((\Delta \Theta_{кр} + \Delta \Theta_{ха}) \cdot |\Theta_{кр} - \Theta_{ха}|^2) \approx 0,066. \tag{13}$$

С другой стороны, используя (5), (6) и (8), находим величину БР погрешности разработанной модели

$$(\Delta \bar{\Theta}_{к})_{фмм} \leq \bar{\Theta}_{кмакс} \cdot ((z' - \beta') / \kappa_{СИ} + (z^* - \beta^*) / (z' - \beta')) = 0,93 \cdot [846/38,265 + 13/846] = 0,038. \tag{14}$$

где: $\bar{\Theta}_{кмакс}$ – БР величина, заданная в разработанной модели, интервала изменений БР конечной температуры внешней поверхности замораживаемого продукта [19].

Из (13) и (14) следует $(\Delta \bar{\Theta}_{к})_{экс} > (\Delta \bar{\Theta}_{к})_{фмм}$, т.е. ошибка эксперимента в 1,7 раза (0,066 / 0,038) превышает рекомендованный минимум. Это означает, что при выбранном числе БР критериев существующей точности измерения переменной $\bar{\Theta}_{к}$ недостаточно. Кроме того, количество учтённых БР переменных $(z^* - \beta^*) = 13$ меньше, чем рекомендуемое ≈ 19 (9), которое соответствует самой низкой сравнительной ошибке для $\kappa_{СИ} \equiv LMT\Theta$.

В дальнейшей экспериментальной работе требуется использовать устройства более высокого класса точности, достаточной для подтверждения / уточнения новой модели, разработанной с большим количеством БР переменных.

Таким образом, заявленное несоответствие 8% между экспериментальными и расчетными данными не гарантирует, что выбор структуры модели достаточно полный. Предложенная модель с сформулированными соотношениями между основными характеристиками исследуемого процесса может быть ошибочной, и поэтому должна быть улучшена.

Выводы и предложения

1. Впервые предложен универсальный показатель для выбора математической модели холодильного оборудования, которая является оптимальной по количеству зарегистрированных переменных.

2. Требуемое количество учитываемых переменных рассчитывается согласно математически сформулированной метрике. Это число соответствует минимальной сравнительной ошибке главной переменной, описывающей исследуемый процесс или конструкцию. Точность измерения в полевых экспериментах должна соответствовать расчетной сравнительной ошибке.

3. Результаты показывают, что предложенная метрика обеспечивает значения ошибки, которая способна количественно оценить разницу между разработанной моделью и исследуемым объектом. Расчёты проводятся очень просто и результаты легко интерпретируются.

4. Автор надеется, что эта статья стимулирует читателей к участию в развитии данного подхода в различных областях тепло- и хладо-техники. Изложенный подход позволяет учёным и инженерам вводить качественные и количественные данные, необходимые для достижения оптимальной модели изучаемого явления.

5. Применение концепции сравнительной ошибки снижает риск выбора завышенной холодопроизводительности холодильного оборудования. Это связано с тем, что проектировщики увеличивают установленную мощность более, чем на 20-40% из-за опасений, что расчетные модели не соответствуют фактическим условиям. Это, в свою очередь, может привести к судебным искам со стороны клиентов.

Автор выражает свою признательность за многочисленные советы, замечания, доброжелательную критику и

многoletнюю поддержку в разработке предложенной методики проф., д.т.н.

А.А. Гухману

проф., д.т.н. **Э.И. Гуйго** *и к.т.н. В.Б. Ржевской.*

Литература (References)

1. Osman B. Principles of Simulation Model Validation, Verification, and Testing // Trans. Of Society for Computer Simulation International. 14(1), 1997.
2. Bellocchi G., Confalonieri, R., Donatelli, M. Crop modelling and validation: integration of Irene DLL in the warm environment // Italian Journal of Agrometeorology. 3, 2006. Доступно: <http://goo.gl/9MO8Ie>.
3. Kat C.-J., Els P.S. Validation metric based on relative error // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems: Methods, Tools and Applications in Engineering and Related Sciences. 18(5), 2012. Доступно: <http://goo.gl/sFk9UR>.
4. ASME V&V 10-2006, Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics. The American Society of Mechanical Engineers standards, 2006. Доступно: <http://goo.gl/9gjVdA>.
5. Bahill A.T., Henderson, S.J. Requirements development, verification and validation exhibited in famous failures systems Engineering // Systems Engineering. 8(1), 2005. Доступно: <http://goo.gl/srriyy>.
6. Maropoulos P. G., Ceglarek D. Design verification and validation in product lifecycle // CIRP Annals – Manufacturing Technology. 59, 2010. Доступно: <http://goo.gl/sJc02G>.
7. Oreskes N., Shrader-Frechette K., Belitz K. Verification, validation and confirmation of numerical models in the Earth sciences // Science. 263, 1994. Доступно: <http://goo.gl/H2temb>.
8. Tedeschi O. Assessment of the mathematical models // Workshop on Mathematical Model analysis and Evaluation. 2004. Доступно: <http://nutritionmodels.com/papers/Tedeschi2004.pdf>.
9. Каухчешвили Н.Э., Мучкин Е.В. Исследование процесса теплообмена при замораживании овощей с применением механической вибрации // Холодильная техника. 2009. №7.
10. Колосов М.А., Егоров К.С. Система вентиляции и кондиционирования Большого зала Московской консерватории им. П.И.Чайковского. Математическое моделирование// Холодильная техника. 2012. №11.
11. Седойкин И.Е., Галимова Л.В. Моделирование и анализ энергосберегающей системы на базе абсорбционной бромистолитиевой холодильной машины для установок разделения воздуха // Холодильная техника. 2015. №7.
12. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. – М.: Высшая школа, 1973.
13. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. – М.: ГИФМЛ, 1960. Доступно: <http://goo.gl/dtPLUr>.
14. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1977. Доступно: https://dl.dropboxusercontent.com/u/19181110/uchebniki_po_fizike/Sedov%20L.I.%20Metody%20podobija%20i%20razmernosti%20v%20mehanike.djvu.
15. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. – М.: Наука, 1985.
16. Menin V.M. Comparative error of the phenomena model // International Referred Journal of Engineering and Science. № 3 (11), 2014. Доступно: <http://goo.gl/zMtMAU>.
17. Li P., Lew J.V., Chan C., Karaki W., Stephens J., O'Brien J.E. Similarity and generalized analysis of efficiencies of thermal energy storage systems // Renewable Energy. 39, 2012. Доступно: <https://goo.gl/QBbue9>.
18. Менин В.М. Исследование и расчет процесса замораживания слоя продукта на движущейся охлажденной стенке // Холодильная техника. 1981. №9.
19. Menin V.M. Drum Freezers: Computer simulation and applications. –Germany: Lambert Academic Publishing, 2014.
20. Хартман К., Лецкий Э., Шефер В. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов.- М.: Мир, 1977.
21. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. –М.: Наука, 1965. Доступно: <http://goo.gl/sktbyH>.
22. Тейлор Д. Введение в теорию ошибок.-М.: Мир, 1985. Доступно: <http://goo.gl/eoQoxj>.

Статья поступила в редакцию 05.11.2016 г.